Recibido: miércoles, 06 abril 2005

cultura ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 2, no. 2 (abr. 2006)

La paradoja en la ciencia y el arte II (*)

Paradojas visuales, de la teoría de la probabilidad y de la confirmación

Marta Macho Stadler
Departamento de Matemáticas
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
e-mail: marta.macho@ehu.es
página web: http://www.ehu.es/~mtwmastm

En la revista *Scientific American* **217** (pág. 50-56, 1967), el biólogo y matemático ruso Anatol Rapoport (1911-), experto en teoría de la comunicación y de juegos, escribe en el artículo titulado *Escape from paradox*:

> ***Paradoxes have played a dramatic part in intellectual history, often foreshadowing revolutionary developments in science, mathematics, and logic. Whenever, in any discipline, we discover a problem that cannot be solved within the conceptual framework that supposedly should apply, we experience shock. The shock may compel us to discard the old framework and adopt a new one. It is to this process of intellectual molting that we owe the birth of many of the major ideas in mathematics and science.***

En este texto se dan algunos ejemplos de cómo las paradojas aparecen tanto en el ámbito de la ciencia como del arte. La lista no es exhaustiva, es tan sólo una pequeña (y parcial) muestra, que pretende estimular la curiosidad del lector.

El texto está organizado en once apartados, dedicado cada uno de ellos a un tipo diferente de paradoja. Se incluye también una extensa bibliografía (aunque no completa), y en cada una de las secciones indicadas se dan diversos enlaces que pretenden poder continuar la lectura iniciada.

En esta sección:

En Ciencia:

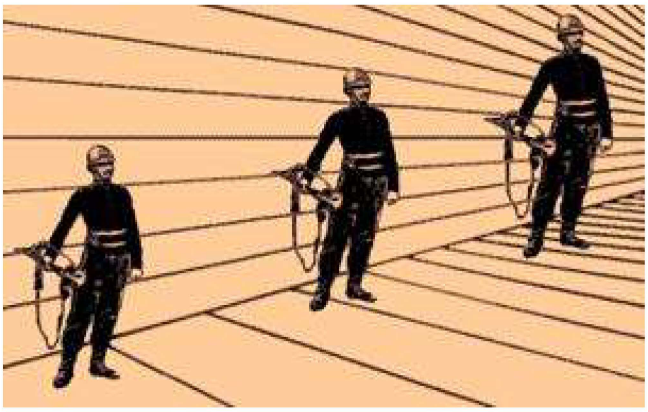
En Sociedad:

1. Paradojas visuales

Las paradojas visuales pueden deberse a diversas razones: imágenes engañosas, defectos de la visión humana, etc. A continuación se dan algunos ejemplos.

1.1. Paradojas de la perspectiva

Las siguientes son paradojas de la perspectiva: las líneas dibujadas provocan distorsiones en la percepción.



Paradoja de la perspectiva ascendente. ¿Son todos los soldados del mismo tamaño?

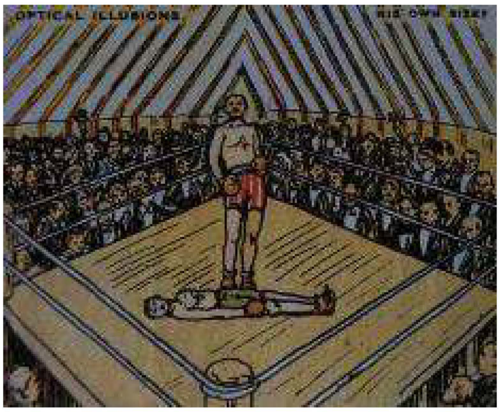
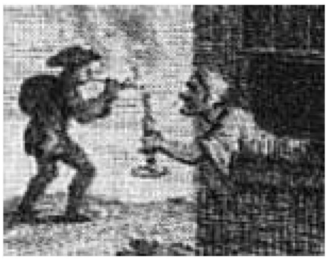


Imagen de caja de tabaco, 1926. ¿Cuál de los dos boxeadores es más alto?

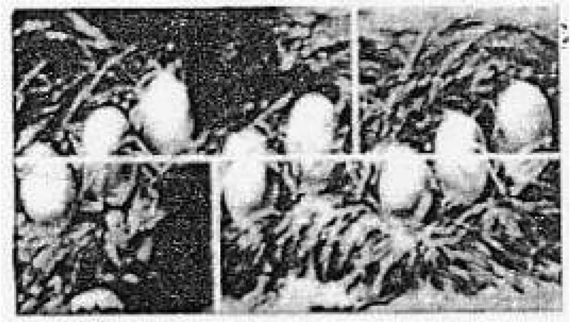
El siguiente ejemplo se debe al artista británico William Hogarth (1697-1764): el cuadro se titula *The Magpie on the Gallows* (1754) y contiene más de 20 errores de perspectiva; aquí se destacan tan sólo dos de ellos.



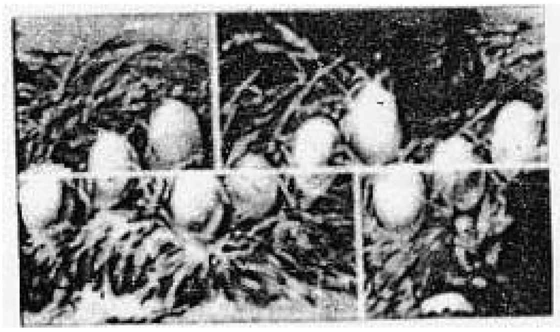
Otras obras de William Hogarth pueden encontrarse en http://www.library.northwestern.edu/spec/hogarth y en The Hogarth archive.

1.2. Desapariciones geométricas

1.2.1. La *paradoja del huevo que desaparece* es una variante lo que se denominan *desapariciones de línea*: realizando los cortes como se indica en la figura (uno horizontal y dos verticales), se obtienen cuatro trozos que pueden redistribuirse para obtener seis, siete, ocho, diez, once o doce huevos.



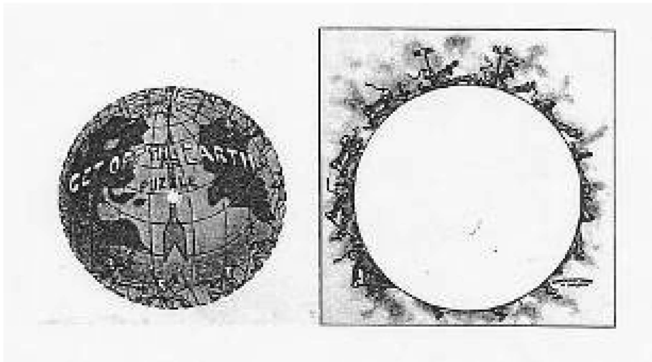
Recombinación de 8 huevos

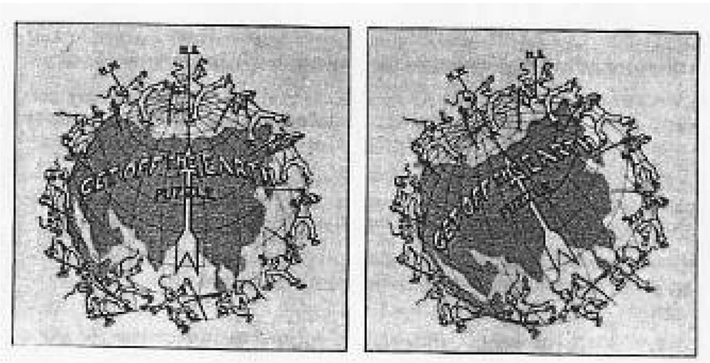


Recombinación de 10 huevos

1.2.2. Sam Loyd (1841-1911) es uno de los inventores de rompecabezas y acertijos más famosos del mundo. El puzzle *Abandone la tierra* aparece en su libro ***Cyclopedia of 5000 puzzles, tricks and conundrums, with answers***, Lamb. Pub. Co., 1914. En él transforma ingeniosamente una línea recta en una circunferencia para obtener su paradoja.

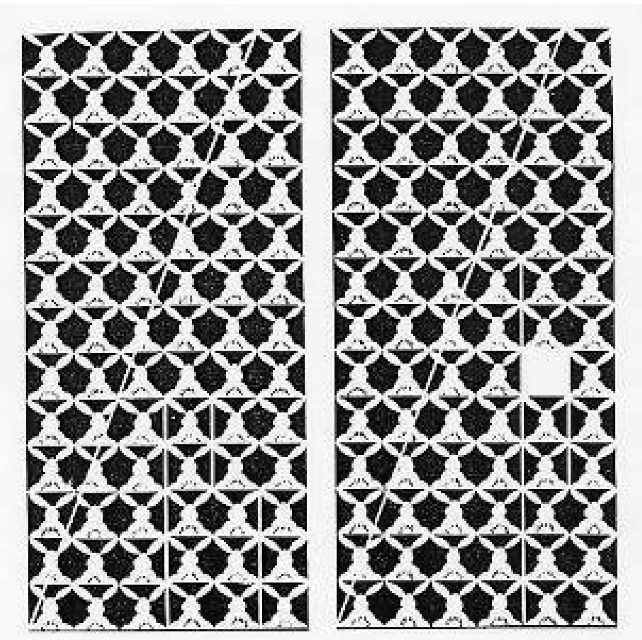
Su dibujo no tiene más que dos trozos, pero crea una serie de desapariciones y reapariciones impresionantes: se clava el círculo de la izquierda por su centro sobre el círculo vacío de la derecha, y entonces...





...uno se puede entretener girando ese círculo... Si la flecha apunta hacia el norte, aparecen **13** guerreros chinos, y si lo hace hacia el noroeste ¡no quedan más que **12**!

1.2.3. El matemático y mago Paul Curry ha combinado las llamadas *desapariciones de línea y superficie* para realizar su divertida paradoja del conejo.



El primer rectángulo de 6 por 13 encierra 78 casetas, cada una de las cuales contiene la silueta de un conejo. Si se corta este rectángulo según las líneas indicadas, una vez redispuesto como se muestra, se obtiene un nuevo rectángulo con el mismo número de casetas... pero

¡sólo con 77 conejos!

¿Dónde ha quedado el conejo que falta?

1.3. Anamorfosis

Una ***anamorfosis*** es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos, que se manifiesta cuando se mira de manera *no convencional*. Por ejemplo, en las anamorfosis *oblicuas* se construye una imagen proyectada sobre un plano oblicuo, de tal manera que queda ininteligible o simula una imagen bien diferente si no se mira desde el punto de vista excéntrico adoptado para la proyección. En una anamorfosis *catóptrica* la imagen debe verse reflejada en un espejo distorsionado; los ejemplos más típicos son los cilíndricos, cónicos y piramidales. Algunos ejemplos de anamorfosis *cilíndricas* del libro [**McLoughlin Bros.**, *The Magic Mirror: An antique optical toy*, Dover, 1979] son:

Un hombre gordo que lleva su estómago sobre una carretilla.

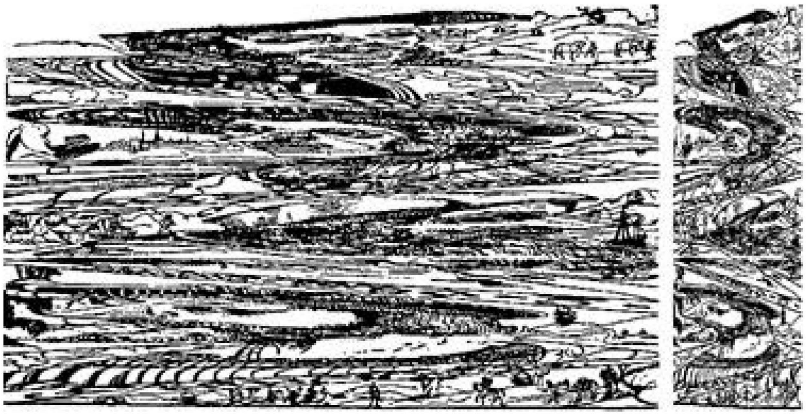
Sancho Panza y su burro. El espejo cilíndrico se coloca sobre el círculo dibujado para recuperar la imagen.

A la derecha aparece la anamorfosis cilíndrica *La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne* (1983) del diseñador gráfico húngaro István Orosz (1951-). Julio Verne aparece al colocar el espejo cilíndrico en la posición indicada.

La siguiente obra de István Orosz se titula *Escalera de dimensión tres*: debajo aparecen tres imágenes de la obra vista desde diferentes ángulos. Los dos primeros revelan una figura que camina sobre las escaleras, un tanto distorsionada.

Sólo la figura final resuelve la anamorfosis.

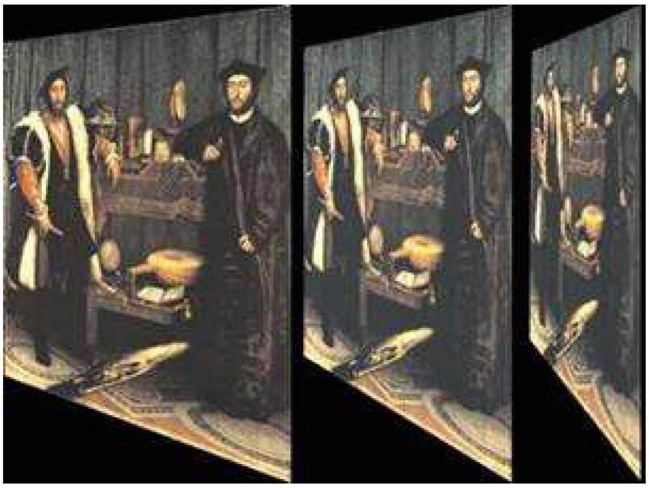
La siguiente composición anamórfica se debe a Erhard Schön (1491-1542). Se titula *Vexierbild* (1535), y a primera vista aparecen lugares, costas, barcos y ciudades. Pero al analizar la obra con más cuidado se descubre la composición anamórfica de Carlos V, Fernando I, el Papa Pablo III y Francisco I.



En esta época, los diseños de este tipo se utilizaban para esconder *imágenes secretas*, a veces de tipo erótico, otras de naturaleza política, etc.

La siguiente obra se titula *Los embajadores* (1533). Es la obra más célebre de Holbein el Joven (1497-1543). Representa a dos diplomáticos, colocados delante de un tapiz. Entre los dos hombres, diversos objetos, símbolos del poder (laico y eclesiástico) y del conocimiento científico (relojes solares, un globo terráqueo, instrumentos de navegación y de astronomía, libros...). La escena representada por el pintor está datada con gran precisión: 11 de abril de 1533. Poco tiempo antes, Enrique VIII solicitaba al papa Clemente VII anular su matrimonio con Catalina de Aragón, ya que de su unión no había nacido ningún heredero varón. El papa no accede a este favor, lo que no impide al monarca desposar en secreto a Ana Bolena el 25 de enero. A principios de abril, el arzobispo de Canterbury, Thomas Cranmer, anula él mismo el matrimonio anterior y declara a Ana Bolena reina de Inglaterra. El hecho no tenía precedentes, y se envió una embajada francesa para intentar una reconciliación con el papa. El cuadro de Holbein representa a los dos miembros de esta embajada: Jean de Dintevile (1504-1555, a la izquierda, ropa corta, poseedor del poder político) y Georges de Selve (1508-1541, a la derecha, ropa larga, depositario del poder religioso).

En primer plano, en el centro, se observa un objeto enigmático: se trata de un cráneo estirado, cuya forma no se aprecia delante del espectador más que si éste adopta un cierto punto de vista con respecto al cuadro. La técnica empleada por Holbein para producir este efecto es la de la *anamorfosis oblicua*. La imagen toma su dimensión y libra su secreto cuando uno se coloca al lado del cuadro para mirarlo oblicuamente: entonces se ve una calavera deformada proyectando una sombra sobre el embaldosado del suelo.



Como detalle curioso, el apellido Holbein significa *hueso* (Bein) *hueco* (hohl).

Los diseños anamórficos se utilizan también en la señalización de nuestras carreteras. La razón es que los conductores ven las marcas sobre el asfalto desde una posición inadecuada, con un aparente encogimiento de los objetos al ir avanzando. En el ejemplo de debajo, el tamaño de la flecha parece el mismo que el de la palabra CAR debajo de ella. Pero, visto de lado, se observa que la flecha es más del doble de larga que la palabra: la señalización utiliza la herramienta del *estiramiento*.

En http://myweb.tiscali.co.uk/artofanamorphosis/software.html se puede encontrar un programa para crear anamorfosis: *Anamorph me! (version 0.2)*. Se trata de un software libre que lee imágenes en formatos estándar (JPEG, BMP, etc.) y les aplica anamorfosis de diferentes tipos, para crear figuras sorprendentes. Funciona sólo en Windows (95/98/NT/ME/2000/XP).

Algunos enlaces ***"para saber más"*** sobre la anamorfosis son:

Art of Anamorphosis, http://www.anamorphosis.com

Art of Anamorphosis (shown at the Arts Centre Washington, Tyne & Wear), http://myweb.tiscali.co.uk/artofanamorphosis/exhibition/index.html

Anamorphic Art, http://nths.newtrier.k12.il.us/academics/math/Connections/perception/anamorph.htm

Anamorphic Art, http://www.counton.org/explorer/anamorphic/cylmirror.html

The Anamorphic Art of Kelly M. Houle, http://www.kellymhoule.com/anamorphic_art_frameset.htm

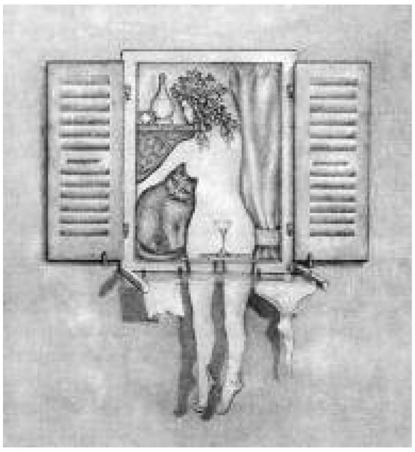
Anamorphic Photographs, http://www.physics.uoguelph.ca/morph/main.html

Página del artista Kurt Wenner, http://www.kurtwenner.com

Página del artista Julian Beever, http://users.skynet.be/J.Beever/pave.htm

1.4. Figuras ambiguas

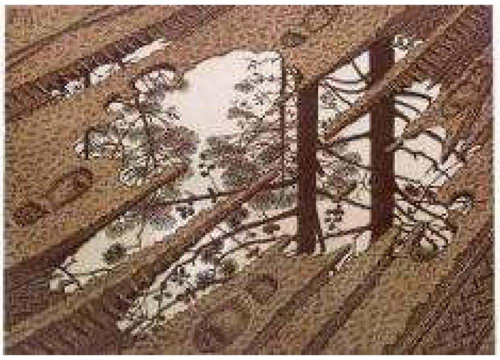
A continuación se dan varios ejemplos de imágenes ambiguas.



Roger N. Shepard (1929-), profesor de psicología, y su ilusión de figura y fondo *Sara Nader*

El artista suizo Sandro Del Prete afirma: *Todo lo que vemos puede verse de otra manera*

A continuación aparecen dos obras del artista gráfico Maurits Cornelius Escher (1898-1972), de clara ambigüedad:



El charco

Manos dibujando

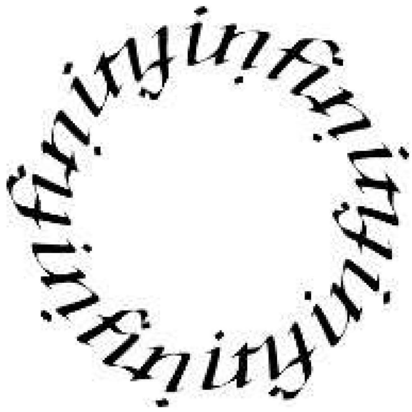
El artista Peter Brookes es el creador de esta figura con superposiciones: al mirar de cerca se ve el ratón y de lejos aparece el gato...

En esta caja de cerillas están representados 12 elefantes, con sólo 6 cabezas (aparte del elefante central).

Muchos carteles contienen figuras ambiguas, con intenciones críticas o reivindicativas. Gillam creó esta portada del magazine *Judge* 26 (1894): es un cartel reivindicativo contra los aranceles. En la base del cartel se lee *Death to our industries. That is what Cleveland-Wilson conspiracy means*.

1.5. Ambigramas

Scott Kim es un famoso creador de ambigramas, es decir, letras, palabras o números que son ambiguos. Algunos de ellos son imágenes reflejadas en un espejo, otras pueden leerse en sentido inverso, otras poseen dos significados contenidos en la misma palabra, etc.



1.6. Ilusión fotográfica

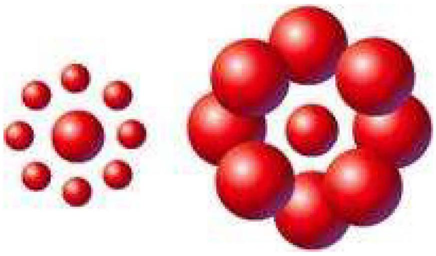
La imagen contigua es una ilusión fotográfica debida al artista Jerry Downs. ¿Hacia qué lado mira el caballo?

Debajo se indican las dos posibilidades, con el auxilio de una línea que ayuda a visualizar la dirección.

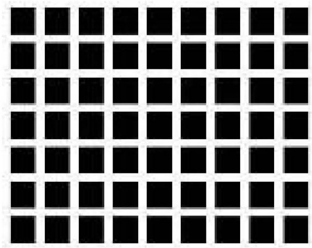
1.7. Ilusiones ópticas

A continuación se dan algunas de las ilusiones ópticas (debidas a problemas de percepción del ojo y cerebro humanos) más conocidas.

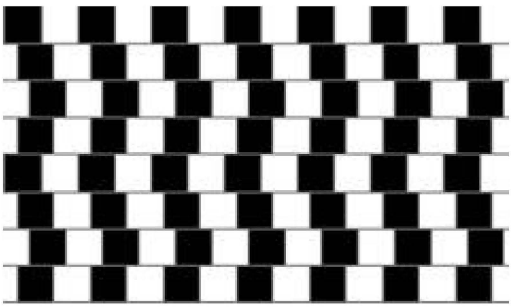
Ilusión de *Titchener y Delboeuf.* ¿Cuál de los dos círculos centrales es de mayor tamaño?

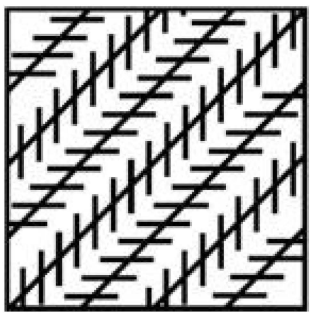


Ilusión del enrejado *por contraste de colores.*



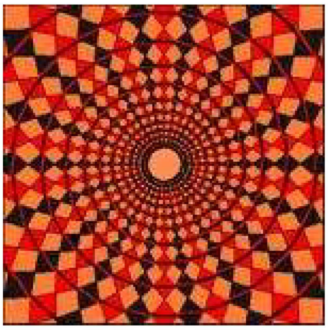
¿Son paralelas las líneas que aparecen en las imágenes de debajo?

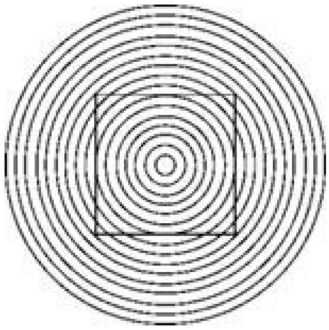




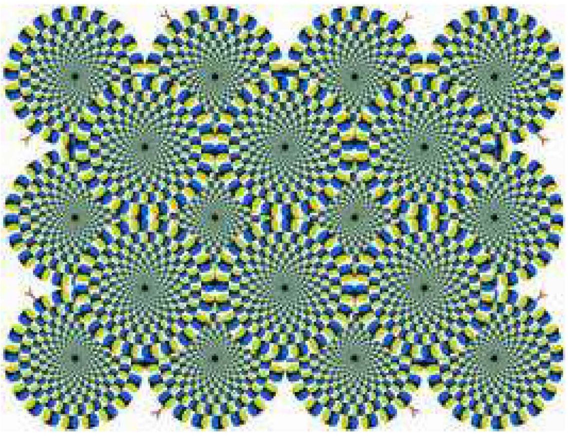
Ilusión de las cuerdas del psicólogo James Frazier: **¿son círculos o espirales?** El efecto desaparece cuando se oculta la mitad del dibujo.

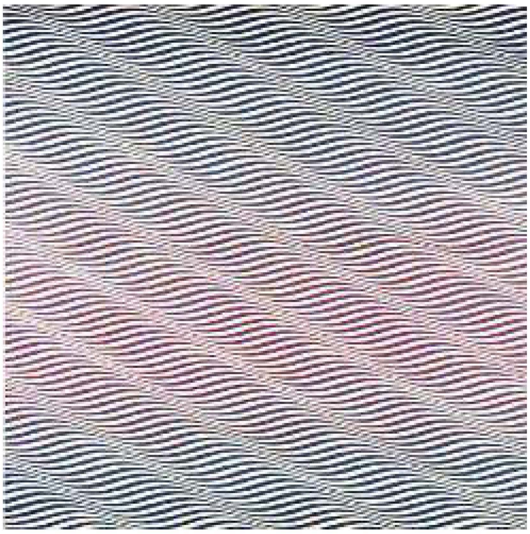
La figura central ¿es un cuadrado?





Esta ilusión óptica del psicólogo Akiyoshi Kitaoka se titula *Serpientes rotando,...* pero es una imagen estática.





La obra *Catarata* (1967) de Bridget Riley (1931-), representante del Op Art, parece moverse.

Otros enlaces con este tipo de ilusiones son *Un mondo di illusioni ottiche* y *Unmögliche Konstructionen und andere optische Illusionen.*

1.8. Figuras imposibles

Guido Moretti (1947-) es físico y escultor. En los dibujos que siguen se ven tres planos diferentes **¡de la misma figura!**

Estas dos son figuras imposibles del artista Jos de Mey (1929-).

1.9. Figuras reversibles

¿Es un granjero inglés...

...o su asno?

Esta imagen de Sergio Buratto,
¿es un sapo o...

...un caballo?

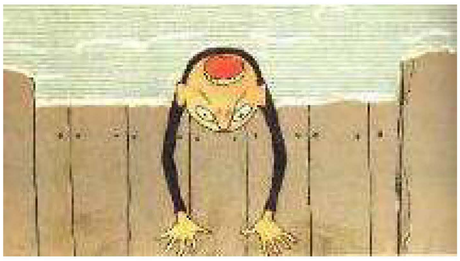
¿O ambos?

El artista japonés Shigeo Fukuda (1932-) es un maestro de la ilusión y la ambigüedad: crea esculturas que parecen un completo caos, y miradas desde otros ángulos, el aparente desorden se transforma en perfección.

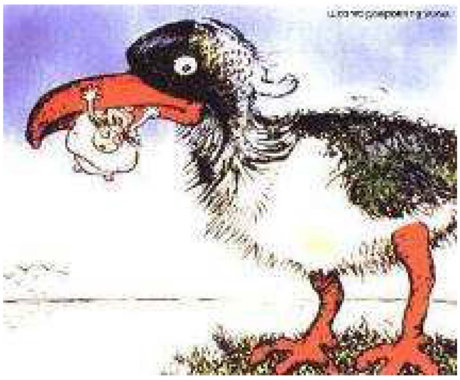
En su obra en madera *Encore,* de frente aparece un pianista. Si se va girando la figura, en cierto punto aparece una combinación extraña, y finalmente se aprecia al violinista.

Peter Newell (1862-1924) dibujó en 1883 este *Caballero y Elfo*: **un hombre sobre un caballo ataca al pobre elfo... que finalmente consigue defenderse.**

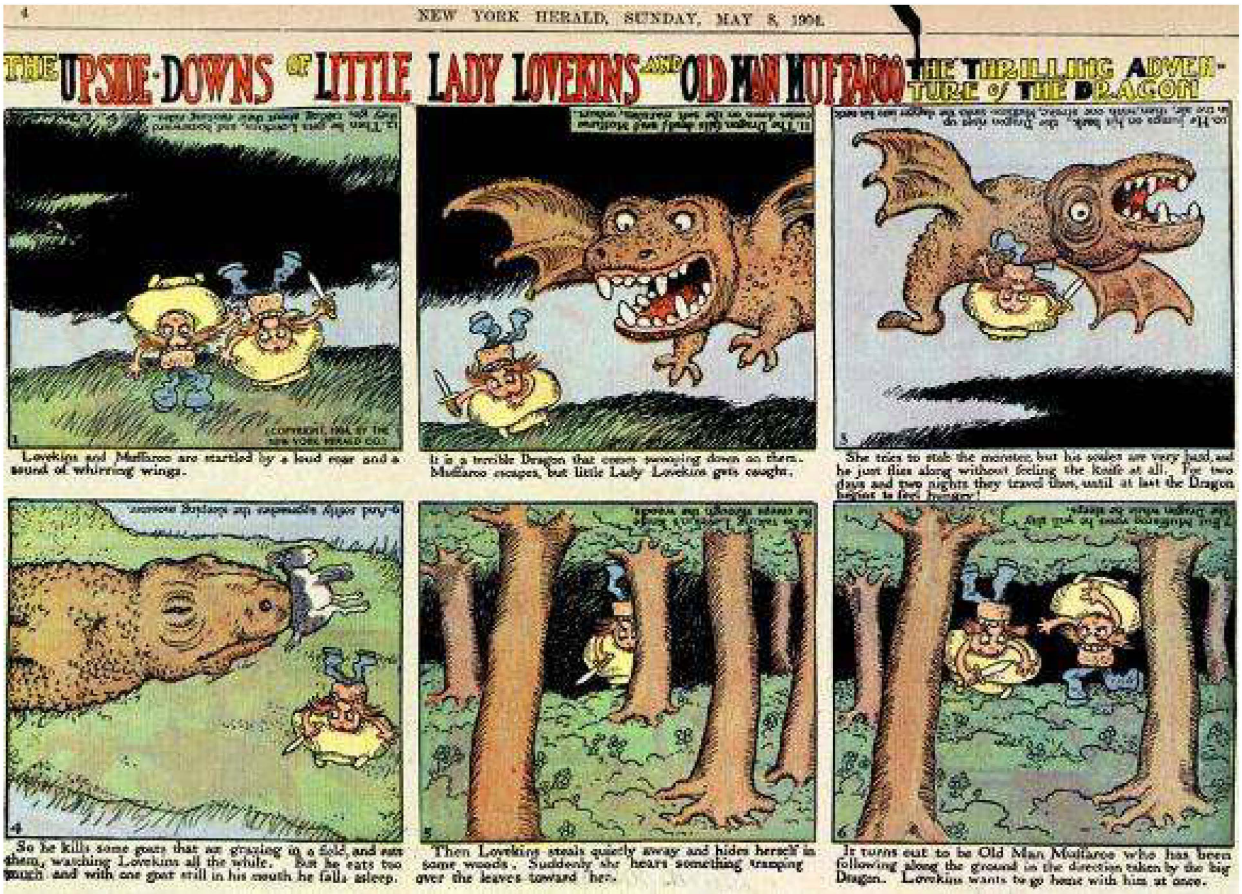
En el libro ***Topsys and turvys***, Peter Newell dibujó entre otros *Hombre saliendo del agua o... ahogándose.*



Gustave Verbeck (1867-1937) es el creador de *A fish story.* A continuación aparece parte de esta historia: **El mayor de los pájaros la coge por su vestido... justo cuando llega cerca de la isla, otro pez le ataca, golpeándole furiosamente con su cola...**

Gustave Verbeck publicó una serie de comics *reversibles* en el Sunday New York Herald, a principios de 1900. La primera parte del comic se lee de manera normal, y cuando se le gira 180 grados, la historia continúa... Debajo aparece parte de ***Little lady Lovekins and Old man Muffaroo*: *the Thrilling Adventure of the Dragon*...** faltaría girarla para ver aparecer la otra historia escondida.



El artista Rex Whistler (1905-1944) realizó los siguientes dibujos para una campaña publicitaria de Shell:

¿**Sherlock Holmes** o...

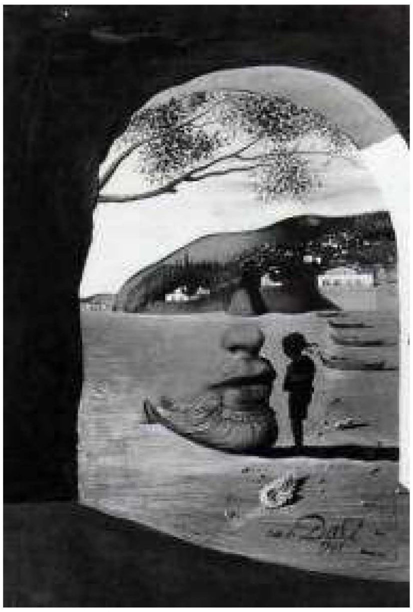
...**Robin Hood**?

¿**Sherezade** o...

...el **príncipe**?

1.10. Salvador Dalí

Salvador Dalí (1904-1989) es uno de los mayores representantes del surrealismo. Debajo aparecen algunas de sus obras con imágenes paradójicas:



Boca misteriosa apareciendo en la espalda de mi nodriza

Rostro de Mae West que puede usarse como apartamento surrealista

Rostro paranoico: la tarjeta postal transformada en Picasso. Dalí encontró la postal de la derecha, y al mirarla verticalmente vio un rostro, que en un primer impulso creyó realizado por Picasso. Cuando comprobó que era sólo producto de su imaginación, reprodujo el efecto en su propia obra.

1.11. René Magritte

René Magritte (1898-1967), fundador del surrealismo belga, dijo que ***El arte de pintar tiene como objetivo hacer que el funcionamiento de la mirada sea perfecto***. Debajo aparecen dos de sus obras que encierran paradojas.

Carte blanche

Los paseos de Euclides: ejemplo de fusión de figura y fondo, donde además se asocia la cúpula cónica con la calle del fondo.

1.12. Giuseppe Arcimboldo

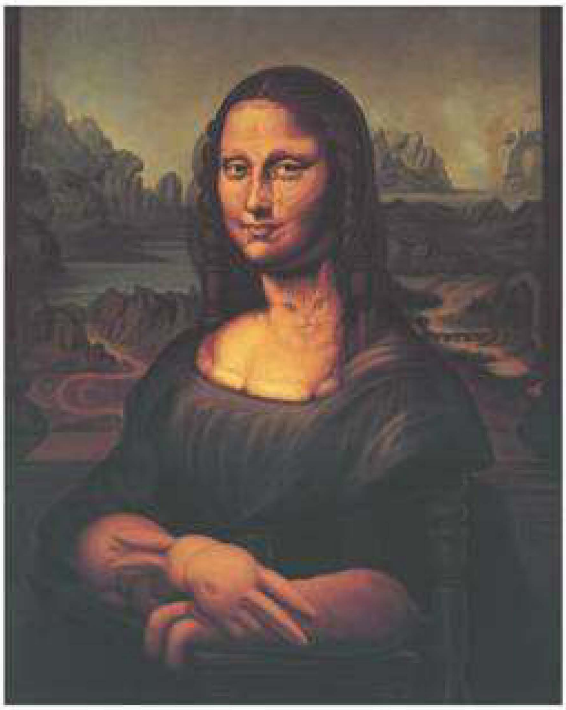
Giuseppe Arcimboldo (1527-1593) pertenece al movimiento artístico del manierismo. En el siglo XX tiene una gran acogida, puesto que sus retratos parecen precursores del surrealismo.

The librarian, 1566

1.13. Octavio Ocampo

Octavio Ocampo (1943-) es uno de los pintores mexicanos más conocidos. A continuación aparecen dos de sus magníficas obras.

Mona Lisa: se trata de una silla ocupada por tres conejos (uno negro abajo a la izquierda y dos blancos abajo en el centro). Un gato está sentado sobre un cojín en el centro y mira al observador. La silla tiene un respaldo que a primera vista parece la cara de la Mona Lisa, pero si se inspecciona con más cuidado aparecen dos mujeres, un hombre, un ángel,...



Las visiones del Quijote

Dos enlaces interesantes donde aparecen muchas de estas paradojas visuales son:

Amazing Art: Illusions, hidden and impossible images.

Masters of Deception, página web mantenida por A. Seckel, donde aparecen entrevistas, fotos y videos relacionadas con su libro [*Masters of Deception: Escher, Dalí & the Artists of Optical Illusion*, Sterling Publishing Co., 2004]. En particular, aparecen imágenes de Sandro Del Prete, M.C. Escher, Shigeo Fukuda, Matheau Haemakers, Scott Kim, Guido Moretti, Vik Muniz, István Orosz, John Pugh, Oscar Reutersvärd y Dick Termes.

2. Paradojas de la teoría de la probabilidad: la paradoja de San Petersburgo

Esta paradoja trata sobre el cálculo de probabilidades y el concepto abstracto de esperanza matemática. Se debe a Nicolás Bernoulli (1695-1726).

La pieza del dramaturgo inglés Tom Stoppard *Rosencrantz y Guildenstern han muerto* (1966) se abre con una escena en donde los dos personajes secundarios de *Hamlet* juegan a **cara y cruz**: el desafortunado Guildenstern ha lanzado 90 monedas, todas han salido cara y han regresado, como lo manda el juego, a Rosencrantz. A pesar de la gran improbabilidad de una tal serie, los dos saben que es posible. Cuando los protagonistas están cansados de lanzar simplemente las monedas, Rosencrantz propone una variante: lanzará una moneda hasta que salga cara: si esto sucede en la primera tirada, dará **1** moneda a Guildenstern, en la segunda tirada, **2** monedas, en la tercera, **4** monedas, y así sucesivamente, **doblando** la cantidad cada vez que la pieza cae en cruz.

¿Cuánto dinero debería pagar Guildenstern a Rosencrantz para que el juego sea equitativo?

El problema se resuelve fácilmente en términos de la esperanza matemática de ganar: la probabilidad del evento ***cara aparece en la tirada n*** es de

$$1/2^{n-1}\,(1/2) = 1/2^{n}.$$

La ***esperanza*** de ganar de Guildenstern es, pues, la suma

$$\begin{gathered}1/2 + 2(1/2)^2 + 4(1/2)^3 + 8(1/2)^4 + \ldots + 2^{n-1}(1/2)^n + \ldots = \\ 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots + 1/2 + \ldots = \infty\end{gathered}$$

Así, en honor a la ***equidad***, el juego no debería tener lugar.

La progresión de ganadas es muy rápida: es la serie geométrica de razón **2**. Se podría reemplazar el **2** por un número inferior q y retomar los cálculos: en este caso, la esperanza de ganada de Guildenstern sería

$$1/2 + q(1/2)^2 + q^2(1/2)^3 + q^3(1/2)^4 + ... + q^{n-1}(1/2)^n + ...=$$
$$1/2(1 + q/2 + (q/2)^2 +...+ (q/2)^n +...)= 1/(2 – q)$$

La ***ganada infinita*** de Guildenstern aparece como caso límite cuando q tiende a **2**. Haciendo variar q, se puede establecer la lista de ganadas de Guildenstern y el dinero que deberá ceder a Rosencrantz al principio del juego. En todos los casos, y en ausencia de cualquier otra condición, parece preferible renunciar a este juego tan azaroso, tanto en el papel de Guildenstern como de Rosencrantz.

3. Paradojas de la confirmación: las paradojas de Hempel y Goodman

Carl Gustav Hempel (1905-1997), filósofo de la ciencia e inventor de la paradoja del cuervo, afirma que la existencia de una ***vaca de color violeta*** incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros.

¿Por qué?

Para responder, establezcamos la ley

Todos los cuervos son negros,

de una manera diferente, pero lógicamente equivalente:

Todos los objetos no-negros no son cuervos.

Hempel dice: *He encontrado un objeto no-negro:* ***una vaca violeta****. Por lo tanto, esto confirma (débilmente) la ley* **Todos los objetos no-negros no son cuervos**. Y así, también confirma la ley equivalente ***Todos los cuervos son negros.***

Es fácil encontrar millones de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema con la paradoja de Hempel es que observando objetos no-negros se confirma la ley ***Todos los cuervos son negros,*** pero sólo a un nivel ***infinitesimal***: la clase de objetos en la Tierra que no son cuervos es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos, que el grado con en el cual un no-cuervo que es no negro confirma la hipótesis es despreciable...

Los detractores de Hempel opinan que la existencia de una ***vaca de color violeta*** confirma del mismo modo el enunciado ***Todos los cuervos son blancos...***

El filósofo americano Nelson Goodman (1906-1998) inventó la siguiente paradoja de la confirmación: se define un objeto como ***verul***, si observado antes del tiempo ***t*** es **verde**, y después de ***t*** es **azul**. Si ***t = 1*** de junio de 2025, Goodman (1906-1998) afirma que decir que las esmeraldas son **verdes** o **verules** es igual de consistente... en ambas afirmaciones hay tiempo por medio, y ambas se confirman empíricamente.

Sobre la autora

Marta Macho Stadler es Doctora en Matemáticas por l'Université Claude Bernard de Lyon (Francia). Desde el año 1985 es profesora en el Departamento de Matemáticas de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU). Su tema de investigación se centra en la teoría de foliaciones. Ha impartido varias conferencias de divulgación en ciclos celebrados en varias universidades del estado y es coorganizadora de *Un paseo por la geometría* en la UPV/EHU. Miembro de las Comisiones de Cooperación Internacional y de Mujeres y Matemáticas de la RSME, es secretaria de la Comisión de Desarrollo y Cooperación del Comité Español de Matemáticas, y pertenece a los Comités Editoriales de las revistas digitales *Matematicalia* e IMAGEN-A.

matematicalia
revista digital de divulgación matemática

(*) Este artículo está motivado por la conferencia del mismo título impartida por su autora en el Curso Interuniversitario *Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas 2005* de las Universidades de La Laguna y Las Palmas de Gran Canaria (Canarias, España).