NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 85, marzo de 2014, páginas 49-73

¿Pueden nuestros estudiantes construir conocimientos matemáticos?

Pedro Cobo Lozano (Instituto de Enseñanza Secundaria Pius Font i Quer. España)
Mª Antonia Molina Hernández (Universidad Politécnica de Cataluña. España)

Fecha de recepción: 29 de abril de 2013
Fecha de aceptación: 20 de diciembre de 2013

Resumen

Este es un artículo sobre resolución de problemas en las clases de matemáticas. En él mostramos cómo los estudiantes pueden construir conocimientos matemáticos y dar significado a los mismos. Para ello, establecemos una metodología con la que los estudiantes aprenden a gestionar sus propios procesos de resolución. Además, definimos el rol del profesor y de los estudiantes y resaltamos la importancia de las tareas que proponemos para el aprendizaje, por su capacidad de favorecer la actividad en el aula.

Palabras clave

Resolución de Problemas, Procesos de Gestión, Heurísticas, Tareas ricas, Interacciones sociales.

Abstract

This paper is about problem solving in mathematic lessons. It shows how students can build mathematical knowledge and give meaning to them. We focus on a methodology in which students learn to manage their own solving process. Furthermore, we define the role of the teacher and the students, and we emphasize the importance of the tasks we propose for learning, by its ability to promote the activity in the classroom.

Keywords

Problem solving, Managerial process, Heuristics, Rich tasks, Social interactions.

1. Introducción

¿Qué han aprendido nuestros estudiantes de cuarto curso de enseñanza secundaria después de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución problemas de matemáticas? Empezamos este artículo mostrando algunas respuestas de los estudiantes a esta pregunta.

Hemos aprendido: "a formularnos preguntas para llegar más allá de la solución, "a resolver problemas desde el final", "a hacer matemáticas, a crearlas", "que de cualquier cosa cotidiana puede salir un problema de matemáticas", "a resolver problemas que nunca nos hubiéramos pensado que pudiéramos resolver", "que si empiezas por las cosas más sencillas después te saldrán las más difíciles", "que no hay solo un camino para resolver los problemas", "a buscar relaciones entre números y buscar el porqué de estas relaciones", "a alargar un problema, no quedarnos con el resultado, buscar variantes, investigar", "a inventarnos nuestras propias fórmulas a partir de la observación y la comparación", "a generalizar problemas concretos", "a resolver problemas mediante el método de inducción", "que las matemáticas pueden ser divertidas", "a trabajar en grupo, a organizarnos la tarea, a ayudarnos, más que a seguir las instrucciones del profesor"; "a valorar las opiniones de los otros componentes del grupo", etc.

A continuación el lector tendrá la oportunidad de comprobar si esas respuestas se corresponden con la realidad o no, y si realmente estos estudiantes construyen conocimientos matemáticos y cómo lo hacen.

Antes de ello, y para concretar nuestros puntos de vista, expresamos lo que entendemos por resolución de problemas, establecemos los principios básicos en los que basamos nuestro modelo de enseñanza y concretamos los objetivos que nos proponemos.

De las muchas acepciones del término 'resolución de problemas', consideramos la que tiene que ver con el desarrollo de las habilidades estratégicas relacionadas con la gestión de los procesos y con los contenidos matemáticos implicados en las resoluciones, especialmente los procedimentales. En consecuencia, exponemos a nuestros estudiantes a nuevas formas de enseñanza en las que se modifican los roles tradicionales de profesor y estudiante, y en las que las tareas que se proponen sean adecuadas a la generación del conocimiento que se pretende.

Basamos nuestro modelo de enseñanza en dos ideas fundamentales, relacionadas con la forma de actuar del profesor y de los estudiantes, y con las características de las tareas que proponemos:

- Para nosotros, el buen profesor no actúa, hace actuar a los estudiantes. Es decir, la intervención del profesor se ha de optimizar. Entendemos que su labor no ha de ser la de explicar cosas y más cosas, hacer clases magistrales, convertirse en el centro de la enseñanza, sino que ha de ceder el protagonismo a sus estudiantes, intentando conseguir que sean ellos los que generen la actividad en el aula. Esta idea está en la línea de las teorías del constructivismo social, que preconizan que los estudiantes han de ser los protagonistas principales de su aprendizaje y, por tanto, los que construyan su propio conocimiento, que ha de ser socialmente compartido.
- Las tareas han de ser ricas, en el sentido de: presentar situaciones contextualizadas próximas al alumno; generar actitudes de curiosidad y de interés para su resolución; ser abiertas para permitir que se aborden de diferentes maneras y, con ello, facilitar una mejor atención a la diversidad; presentar la información inicial usando diferentes representaciones; permitir establecer conexiones entre diferentes contenidos matemáticos y con otras materias; etc.

Así pues, el objetivo que perseguimos es mostrar cómo nuestros estudiantes aprenden, por una parte, las heurísticas implicadas en la resolución de problemas y, por otra, la gestión de sus propios procesos de resolución, de tal manera que, tras un proceso inicial de aprendizaje, ellos por sí solos sean capaces de construir conocimientos matemáticos diversos y dar significado a los mismos.

Para conseguir ese objetivo, explicamos, en primer lugar, qué entendemos por gestión en la resolución de problemas, separándola de lo que es la gestión de la clase, aunque en muchos momentos ambos tipos de gestión estén muy próximos o incluso se solapen. Después, detallamos la metodología que seguimos, y mostramos y comentamos las producciones de los alumnos en las clases de matemáticas en los tres problemas que proponemos. Por último, en las reflexiones finales, trataremos de responder a la pregunta del título de este artículo.

2. Qué entendemos por gestión de los procesos de resolución de problemas

Cuando hablamos de gestión de los procesos de resolución nos referimos a las preguntas (o mensajes) que nos hacemos (o en los que pensamos) cuando estamos resolviendo un problema, que tienen por finalidad conseguir activar o reactivar el proceso de resolución o simplemente reflexionar sobre él. Y cuando decimos que queremos convertir la gestión en objeto de enseñanza y aprendizaje en nuestras clases estamos pensando en que los estudiantes han de aprender, en cada momento del desarrollo de la actividad, a hacerse las mismas preguntas que un profesor experto les haría, y han de aprender a responderlas.

En primer lugar, los estudiantes han de tener claro lo que se espera de ellos cuando se les propone un problema, es decir, qué les pedimos y qué pretendemos que aprendan. Les pedimos que:

- Resuelvan el problema de todas las formas que sean capaces. Por tanto, el reto está no sólo en resolver el problema utilizando una estrategia, sino que han de intentar buscar otras estrategias de resolución. Aquí incluimos la utilización de todo tipo de contenidos matemáticos (conceptos, procedimientos técnicos, heurísticas) y de gestión. Con esta demanda conseguimos que cada pequeño grupo de alumnos pueda ir a su ritmo, facilitando con ello la atención a la diversidad.
- Generen variantes del problema propuesto y que las resuelvan. Es decir, han de responder a la pregunta: ¿qué podemos variar del enunciado del problema original? Se les enseña, a base de práctica, que han de analizar el enunciado del problema e indicar los elementos que se puedan cambiar.
- Busquen regularidades entre las variantes que han generado y traten de generalizar resultados, no perdiendo nunca de vista ni el problema inicial ni las variantes generadas.

Además, se espera que aprendan a gestionar los procesos de resolución. Para ello, en Cobo (2004a) podemos encontrar una batería de preguntas y mensajes ordenados según la fase del proceso de resolución en la que nos encontremos.

Así por ejemplo, en la fase de comprensión del problema, los mensajes a enviar a los estudiantes, y que ellos tienen que ir asimilando, podrían ser del tipo:

- Trata de comprender bien las condiciones del problema.
- Identifica el objetivo del problema.
- Vuelve a leerlo lentamente.
- Intenta comprender todas las palabras del enunciado.
- Recuerda los conceptos matemáticos que hay en el enunciado.
- Organiza la información que tienes, etc.

En la fase de planificación/ejecución, los mensajes podrían ser del tipo:

- Piensa en un problema más sencillo.
- Experimenta.
- Piensa en alguna conjetura.
- Inventa alguna representación simbólica.
- Busca problemas análogos.
- Trata de construir figuras.
- Busca casos más sencillos.
- Si ya has establecido un plan, ejecútalo.
- Si has establecido una conjetura, trata de buscar relaciones entre los elementos del problema, etc.

En la fase de verificación, los mensajes podrían ser del tipo:

- Comprueba los resultados, mira si son coherentes.

- Reflexiona sobre la posibilidad de revisar la solución que has obtenido. Si es necesario sigue un orden inverso a los pasos de la solución.
- Reflexiona sobre cómo surgieron las ideas que te llevaron a la solución.
- Haz un repaso de los contenidos matemáticos que has utilizado.
- Reflexiona sobre estas preguntas:
    - ¿Has propuesto varias estrategias a lo largo de la resolución?
    - ¿Las has examinado todas?
    - ¿Te parece que has desarrollado la más adecuada?

Y cuando se pretende que los estudiantes generen problemas nuevos a partir del inicial, los mensajes podrían ser del tipo:

- ¿Qué elementos del enunciado piensas que se pueden variar?
- ¿Se obtienen enunciados coherentes si variamos algún elemento?
- ¿Y si variamos dos o más simultáneamente?
- ¿Puedes invertir el enunciado del problema?
- ¿El problema te sugiere otros similares?
- ¿Puedes generalizar el enunciado del problema?, etc.

Se ha de hacer notar que estos mensajes que al principio el profesor envía a los alumnos cuando se los demandan, ni uno ni los otros los han de aprender de memoria, simplemente, a base de ir adquiriendo experiencia, se han de ir incorporando de manera natural al bagaje de conocimientos de los estudiantes.

Además, se ha de tener presente que, en el inicio de la fase de aprendizaje, siempre hay una demanda excesiva de ayuda por parte de los estudiantes. Es fundamental que el profesor se limite a enviar mensajes que no conviertan el problema en un simple ejercicio.

3. Qué lugar ocupa la gestión en la resolución de problemas

Desde que en los años 80, algunos investigadores, como Schoenfeld (1987), adaptan la definición de Flavell sobre metacognición a la resolución de problemas, son pocos los profesores que han llevado a la práctica y han dado la importancia que se merecen a aspectos tales como las creencias, las intuiciones, las emociones o cómo controlan los propios estudiantes lo que hacen cuando resuelven problemas. Nosotros fijaremos nuestra atención en esta última cuestión, relacionada con la gestión en los procesos de resolución y su enseñanza y aprendizaje en las aulas de matemáticas.

En los años 90, algunas investigadoras como Fernández, M. L. y otras. (1994) ya sitúan a la gestión en el corazón de los procesos de resolución de problemas, siendo la que los organiza y los controla (Figura1).

Estas investigadoras contraponen su modelo de naturaleza cíclica y dinámica de los procesos de resolución (Figura 1), a los modelos que enfatizan en la linealidad de dichos procesos, propios de muchos libros de texto, y que son inconsistentes con la actividad real de resolver problemas.

Además, nosotros consideramos que ese modelo cíclico y dinámico no estaría completo si no contempla otros aspectos implicados en los procesos de resolución y en la enseñanza que se deriva de ellos. Así pues, lo hemos acompañado sobrepuesto a tres capas en las que hemos evidenciado la importancia que damos a los conocimientos matemáticos, a la conciencia del proceso que se sigue y a la comunicación.

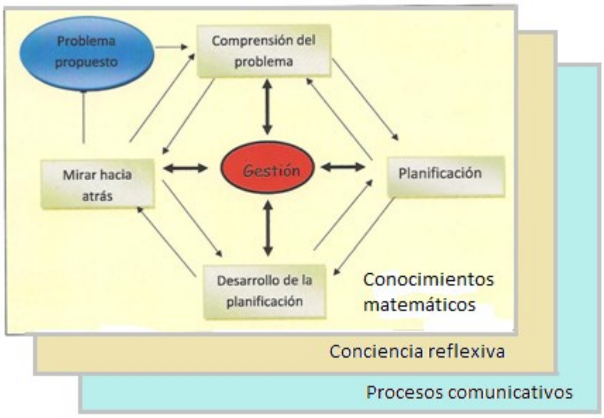


Figura 1. Situación de la Gestión en los procesos de resolución de problemas (adaptada de Fernández, M. L y otros, 1994)

- Cuando hablamos de conocimientos matemáticos, nos referimos a los relacionados con contenidos conceptuales; con procedimientos técnicos (o técnicas), que incluyen los algorítmicos y los que están asociados a los contenidos matemáticos de los problemas que se resuelven; y con los procedimientos heurísticos (o heurísticas), entendidos según L. Puig (1996) como: "modos de comportamiento al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos que son independientes del contenido y que no suponen garantía de que se obtenga la solución"(p. 38).
- La conciencia de los procesos que se siguen y que pretendemos que los alumnos alcancen se ha de encuadrar, como señalan Mayor y otros (1993), dentro de los niveles más altos o conciencia reflexiva, procurando obviar aquellos niveles de conciencia vaga o meramente funcional. Así pues, los estudiantes deberán tener conciencia, en general, de todos sus actos importantes durante los procesos de resolución (tomas de decisiones, descubrimientos, interpretaciones, preguntas clave, etc.) y reflexionar sobre ellos.
- Se ha de potenciar el uso de diferentes formas de representación para comunicar lo que se quiere expresar. Partiendo de la verbalización, el uso del lenguaje numérico y gráfico, hasta llegar, de manera progresiva, a la utilización del lenguaje simbólico (DOGC, 2007).

En este modelo cíclico y dinámico, la gestión está presente en todas las fases de la resolución de un problema. Por tanto, es esencial que los programas de enseñanza de resolución de problemas tengan presente formas de aproximarnos a ella. Así pues, la metodología que proponemos a continuación contempla esa enseñanza, en la que se visualiza la gestión, los conocimientos matemáticos, la toma de conciencia de los procesos y la comunicación en sus diversas formas.

4. Metodología para la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas

En los apartados anteriores hemos hablado de la relación entre el profesor y el estudiante por lo que respecta a la gestión de los procesos de resolución de problemas. Ahora extendemos esa relación a la manera en que el profesor ha de gestionar el funcionamiento general de la clase.

Para que los estudiantes consigan los objetivos que nos proponemos es necesario que las clases tengan una estructura de funcionamiento determinada, en la que queden claras las funciones que cada elemento (profesor, estudiante, tarea) ha de desempeñar.

Dividimos la descripción de dicho funcionamiento en tres fases: registro de los procesos de resolución, reflexión y puesta en común, y elaboración de un informe final (Cobo, 2004b). Además, resaltamos después otros elementos metodológicos.

4.1. Registro de los procesos de resolución

En el inicio, los estudiantes reflexionan individualmente sobre el problema propuesto durante un tiempo breve.

Después, formamos grupos de tres o cuatro estudiantes.

A pesar de que los estudiantes que participan tienen experiencia en la resolución de problemas, las primeras sesiones de una nueva secuencia didáctica siempre suelen ser de experimentación y aprendizaje en lo que se refiere a cómo gestionar los procesos de resolución, a la importancia de la función del moderador y/o secretario en esa gestión, y a la realización de informes escritos provisionales como elementos generadores de reflexión y comunicación. También, en estas sesiones puede haber falta de recursos en la utilización de estrategias heurísticas por parte de los estudiantes, que se va subsanando conforme van participando en una segunda fase que es la puesta en común con toda la clase.

4.2. Reflexión y puesta en común

Ahora, los estudiantes exponen al grupo-clase sus resultados y la forma de obtenerlos, y el profesor va fomentando la participación de todos, analizándose conjuntamente los aspectos más relevantes relacionados con los contenidos matemáticos que utilizan y con la gestión de los procesos desarrollados, por ejemplo:

- Por qué es importante hacer una tabla o un diagrama y las consecuencias que puede tener en la obtención de nuevos datos que ayuden a resolver el problema.
- Cómo puede evolucionar la realización de tablas o diagramas a medida que se avanza en la resolución del problema.
- Cómo se ataca un problema de forma inductiva y la importancia de ser sistemáticos y de ordenar la información que se vaya obteniendo.
- Cómo y cuándo podemos utilizar la estrategia de ensayo-error.
- Cómo podemos abordar la resolución de un problema empezando por el final y trabajando hacia atrás.
- Qué importancia tiene elegir una representación simbólica adecuada.
- En qué momentos se han bloqueado los estudiantes y las posibles explicaciones y salidas a esos bloqueos.
- Cómo se han hecho las revisiones de los procesos de resolución y de los resultados obtenidos; etc.

Hemos de tener presente que las puestas en común en el grupo-clase y las discusiones que en ellas se generan han de servir para que los estudiantes reflexionen y tomen conciencia de sus procesos de resolución, así como para unificar criterios, intentar solucionar bloqueos y conflictos, dar significado a los contenidos matemáticos involucrados en las resoluciones, y establecer, compartir y aceptar por todos los conocimientos matemáticos generados. La propuesta interactiva de Schoenfeld (2011) sobre la discusión de un tópico nos sirve como modelo para dirigir el debate en nuestras clases.

Para facilitar y fomentar la participación de los estudiantes hemos de transmitirles la idea de que no importa que se equivoquen, lo importante es rectificar y seguir buscando. Esa insistencia en la búsqueda de soluciones y en la generación de problemas es la que hace que se consigan los objetivos que nos proponemos.

4.3. Elaboración de un informe final escrito

Como recopilación final, proponemos a los estudiantes que, en casa e individualmente, elaboren un informe final escrito del proceso de resolución, que es el que entregarán al profesor. Además, el profesor selecciona a uno de los grupos para que exponga a toda la clase la resolución del problema, ayudándose de los medios técnicos y materiales didácticos que considere oportunos.

Esta estructura metodológica que acabamos de exponer no es rígida. El profesor puede proponer puestas en común en cualquier momento del proceso de resolución, por ejemplo cuando los estudiantes estén bloqueados, o cuando se crea conveniente unificar las líneas de trabajo que hayan de seguir. También, si durante las puestas en común se generan contenidos matemáticos interesantes, el profesor puede proponer volver a trabajarlos en grupos pequeños.

4.4. Otros elementos metodológicos

Resaltamos aquí tres aspectos metodológicos más, relacionados con la actuación del profesor antes y durante las clases de matemáticas, por la importancia que tienen en el desarrollo de los procesos de resolución generados por los estudiantes. Concretamente, nos referimos a las características de los problemas que proponemos, a la manera de formar los grupos de trabajo en clase y a la actuación del profesor cuando hay estudiantes con dificultad de comprensión, cuando pretendemos unificar las líneas de trabajo en el aula o cuando hay bloqueos y conflictos.

a) Los problemas que proponemos forman una secuencia didáctica contextualizada en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra. En el desarrollo de esta secuencia se utilizan aproximadamente entre 12 y 14 horas de clase.
   Los estudiantes ya tienen nociones algebraicas de cursos anteriores. Lo que pretendemos es que consoliden aspectos concretos como la búsqueda de relaciones y regularidades para obtener patrones, el análisis y la representación de estructuras matemáticas, y la búsqueda de modelos para representar y comprender relaciones cuantitativas (DOGC, 2007), al mismo tiempo que avancen en la utilización de heurísticas para la resolución de problemas. Para conseguir esto e implicar a los estudiantes desde el principio proponemos problemas en los que primen los contenidos procedimentales, que sean abiertos y permitan introducir variantes que puedan resolver los estudiantes, que sean relativamente fáciles de resolver en su presentación inicial y que esa resolución se pueda hacer de diferentes formas. (Cobo, 2004a).
b) La composición de los grupos de estudiantes que trabajan en la resolución de los problemas ha de ser variada respecto a las capacidades de los estudiantes y a su rendimiento académico. Con ello conseguiremos: integrar a todos los estudiantes, que no haya diferencias importantes en el desarrollo de la resolución de los problemas de unos grupos a otros y que haya aportaciones por parte de casi todos los grupos. Además, es importante ir cambiando la composición de estos grupos de trabajo cuando cambiamos de problema, siempre procurando mantener los criterios de formación de cada grupo.
c) Cuando estamos en el aula, para que los estudiantes puedan conseguir los objetivos que perseguimos, el profesor ha de aplicar unas líneas básicas de actuación, que resumimos a continuación y que también iremos resaltando en las descripciones de los procesos de resolución generados por los estudiantes (apartado 5).
   - Si queremos que los estudiantes generen buenos procesos de resolución han de tener tiempo suficiente para desarrollarlos.

- Las reflexiones conjuntas que tienen lugar en las puestas en común son los momentos en los que se intentan solucionar las dificultades de comprensión, en los que se unifican las líneas de trabajo de los diferentes grupos y donde se abordan los bloqueos y conflictos que se produzcan. El profesor tiene que dar siempre prioridad a que sean los propios estudiantes los que resuelvan las cuestiones y dificultades que se planteen.
- El profesor ha de respetar el desarrollo de los procesos de resolución que vayan generando los diferentes grupos de trabajo y solo cuando considere que la dispersión del trabajo en la clase sea amplia, delimitará, en una puesta en común, las diferentes líneas de trabajo propuestas por los estudiantes y les instará a trabajar sucesivamente en cada una de ellas.
- El profesor ha de procurar anticipar las dificultades que puedan tener los estudiantes, para intentar solucionarlas conjuntamente en el grupo-clase. Normalmente, estas dificultades suelen producirse cuando se aborda por primera vez algún contenido matemático. Por ejemplo, cuando se producen las primeras generalizaciones o la realización de tablas específicas u otras estrategias heurísticas, cuando, para avanzar, necesitan de la introducción de un nuevo contenido conceptual, cuando hay bloqueos en la búsqueda de nuevas variantes, etc.

5. Los estudiantes que participan y las resoluciones que generan

La experiencia que describimos en los siguientes parágrafos corresponde al desarrollo de las clases ordinarias de matemáticas de un grupo-clase de cuarto curso de la ESO, de 29 estudiantes, con capacidades matemáticas avanzadas, aunque no todos con un rendimiento académico alto en esa materia. Este grupo-clase corresponde a la distribución que se hace habitualmente en el centro de enseñanza donde se desarrolla la actividad en la que se tienen en cuenta los rendimientos académicos en las materias instrumentales.

Además, a lo largo del curso, los estudiantes han adquirido, con su profesor de matemáticas, experiencia en desarrollar las unidades didácticas enfocadas desde el punto de vista de la resolución de problemas, como mostramos en este artículo, pero también utilizando otros tipos de enfoques, como, por ejemplo, a partir de proyectos didácticos (Grup Vilatzara, 2001), o partiendo de un problema inicial, como elemento motivador, que se va resolviendo conforme se van introduciendo conceptos matemáticos nuevos, en la línea de algunas “mini unidades didácticas” del proyecto Intermates (http://www.edu365.com/aulanet/intermates/).

En cualquier caso, sea cual sea el enfoque que utilicemos, siempre intentamos fomentar que los estudiantes se involucren y sean los protagonistas principales de la actividad.

Todos los resultados que mostramos a continuación han sido obtenidos por los estudiantes en las clases de matemáticas. Sólo los informes escritos los realizaron como deberes fuera del aula.

5.1. Problema de la suma de números consecutivos

Este problema es el primero de los propuestos en muchos libros de texto dentro del tema de Álgebra, en cursos anteriores al 4º de la ESO. Puede resolverse en 5 minutos y ser abandonado, o convertirse en una actividad rica a base de resolver las variantes que los estudiantes van generando. Su enunciado es el siguiente:

Calcula tres números naturales consecutivos cuya suma sea 60.

5.1.1. Búsqueda de soluciones

Después de un trabajo en grupos relativamente corto, hacemos una puesta en común para que los estudiantes propongan las diferentes soluciones. Resumimos a continuación las que se proponen.

1. Utilizan el leguaje algebraico, siguiendo una de las dos formas:

   $$x + x+1 + x+2 = 60, \text{ o } (x-1)+x+(x+1) = 60.$$

2. Utilizan el método de ensayo-error: "Hemos probado primero con 15, 16 y 17, y como no llegan a 60, aumentamos los números hasta encontrar el resultado".
3. Dividen por 3: "Hemos dividido 60 entre 3 y nos ha dado 20, por tanto 20, 20 y 20, y quitamos 1 del primero y se lo sumamos al tercero".
4. Analizan posibilidades: "Hemos hecho todas las posibilidades y hemos llegado a que 9, 0 y 1 son las únicas tres cifras consecutivas que suman 0, que es la cifra de las unidades del 60, y a partir de aquí hemos encontrado los tres números: 19, 20 y 21".
5. Suman los tres primeros números naturales: "1+2+3=6, la suma total menos 6 dividida entre 3 y al resultado se le suman 1, 2 y 3".
6. Utilizan la proporcionalidad: "elegimos tres números consecutivos cualesquiera, por ejemplo, 7+8+9=24, cogemos el del centro y establecemos la proporción: $\frac{8}{24}=\frac{x}{60}$, de aquí resulta que x = 20 y los números son 19, 20 y 21".

5.1.2. Propuesta y resolución de variantes

1. Los estudiantes empiezan cambiando el valor de la suma de los tres números consecutivos, y responden a preguntas como: ¿el enunciado estaría bien construido si la suma toma cualquier valor?, ¿qué propiedad ha de tener la suma para que el enunciado esté bien construido?, e intentan buscar respuestas y justificaciones a esas preguntas.
   Utilizan como suma (*n*) de los tres números valores concretos, y utilizan expresiones algebraicas para concluir que la suma ha de ser múltiplo de 3:

   $$(x-1)+x+(x+1)=n;\ 3\cdot x=n$$

2. A continuación suman 2, 3, 4… números consecutivos, y tratan de buscar las características que ha de tener la suma (*n*) para que el enunciado esté bien construido.

   En los distintos grupos de trabajo, se producen formas diferentes de abordar esta variante, que el profesor ha de respetar. Así, unos grupos van elaborando la Tabla 1.

Suma de k números consecutivos	Justificación algebraica	Resultados
2	x+(x+1)=n; 2x=n-1	n=2x+1
3	(x-1)+x+(x+1)=n	n=3x
4	(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=n	n=4x+2
5	(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=n	n=5x
6	(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=n	n=6x+3

Tabla 1. Características de la suma de 2, 3, 4,... números naturales consecutivos

De esta manera obtienen el resultado general, que lo expresan de la forma siguiente:

- "Si sumamos una cantidad impar de números consecutivos, n siempre será múltiplo de esta cantidad. Es decir, si sumamos k números, n será múltiplo de los k números que hemos sumado.
  $n=k\cdot x$"
- "Si sumamos una cantidad par de números consecutivos, n siempre será múltiplo de esta cantidad, más la mitad de la misma cantidad. Es decir, si sumamos k números.

  $n=k\cdot x+(1/2)\cdot k$"

Otros grupos de estudiantes, siguen la quinta solución propuesta en el apartado 5.1.1 y consiguen la generalización a partir de la propuesta:

$$x+1+x+2+x+3+\ldots+x+k = x+\ldots(\text{k-veces})\ldots+x +1+2+3+\ldots+k$$

Y, para calcular la suma, hacen un esquema como el de la Figura 2.

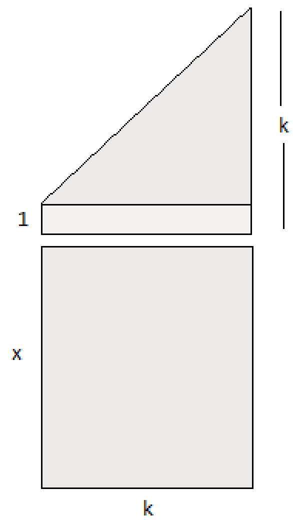


Figura 2. Visualización de la suma x+…(k-veces)…+x +1+2+3+…+k

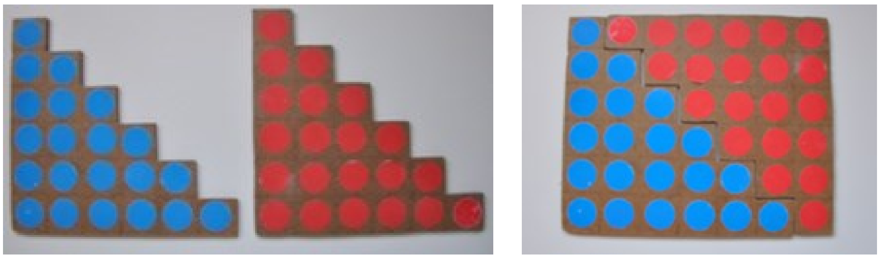
Obteniendo el resultado como suma de las dos áreas

$$n = x+\ldots(\text{k-veces})\ldots+x +1+2+3+\ldots+k = k\cdot x + k\cdot(k-1)/2 + k\cdot 1 = k\cdot x + k\cdot(k+1)/2$$

Y no llegan a establecer el valor de n como múltiplo (o no) de k porque no diferencian que k pueda ser par o impar.

En este momento, los estudiantes exponen sus soluciones en una puesta en común para toda la clase, y como hay desavenencias en los resultados que muestran, les pedimos que traten de unificar los resultados que han obtenido, diferenciando los casos en los que k sea par o impar. Esa unificación se produce, llegándose a la misma generalización en los dos desarrollos que hemos expuesto.

Por otra parte, el profesor explica qué es una progresión aritmética y reparte el material didáctico de la Figura 3a, con la finalidad de que los estudiantes generen el procedimiento de la suma de los términos de una progresión aritmética (Figura 3b).



(a) **(b)**

Figura 3. Material didáctico para generar el procedimiento de la suma de los primeros términos de una progresión aritmética

Los estudiantes pronto visualizan cómo conseguir la suma de los primeros números naturales y el procedimiento general para obtener la suma de los k primeros términos de cualquier progresión aritmética. El profesor, simplemente, resalta el valor que tiene dicho procedimiento en matemáticas.

3. Después, los pequeños grupos continúan considerando otra variación del enunciado inicial, como es averiguar qué pasa si los números naturales que se suman no son consecutivos, por ejemplo, si están separados por dos, tres, cuatro… unidades.

   Y van elaborando tablas, buscando regularidades y llegan a las siguientes conclusiones:

   "En el caso de que sumemos una cantidad impar de números (k), la distancia entre los números no afecta a la conclusión final, es decir, en todos los casos, n es múltiplo de la cantidad de números sumados: n=k·x"

   "En el caso de que sumemos una cantidad par de números (k), n será múltiplo de la cantidad de números sumados más la mitad del producto de los números sumados por la distancia entre ellos (m), es decir, n= k·x+1/2·k·m

4. Llegados a este extremo, algunos grupos han observado que hay números que no tienen descomposición posible como suma de números consecutivos, en cambio hay otros que tienen una o más descomposiciones, y la pregunta que surge es: ¿qué números se pueden expresar como suma de números naturales consecutivos?

   Encuentran regularidades en los números que no se pueden descomponer, en ningún caso, como suma de números naturales consecutivos, que son las potencias de 2, pero no encuentran regularidades entre los números que sólo tienen una descomposición, o dos, o tres, etc.

5. Otra variante que los estudiantes consideran y que no tiene mucho recorrido es la de pensar qué pasa si sustituyen la suma de números naturales consecutivos por el producto. Por ejemplo, empiezan suponiendo que el producto de tres números naturales consecutivos es 24. Y buscan, mediante la descomposición factorial, números cuyos factores se puedan agrupar en tres que sean consecutivos.

   Otros estudiantes razonan al revés, van multiplicando números naturales consecutivos y observan los resultados. Por ejemplo, si un número natural (*n*) se puede expresar como n=a·(a+1)·(a+2), el siguiente (*m*) es de la forma m = n·(a+3)/a.

6. Otros grupos también buscan patrones en la suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos. Obtienen regularidades en las que aparecen la suma de los cuadrados de números naturales consecutivos.

   El profesor podría continuar esta actividad utilizando modelos con discos y conos hechos de plastilina para calcular y justificar la suma de los cuadrados de números naturales consecutivos (Somchaipeng y otros, 2012).

5.1.3. Puesta en común de los resultados obtenidos en la resolución del problema de la suma de números consecutivos

En la puesta en común general, a medida que los estudiantes van haciendo sus exposiciones, el profesor va fomentando la participación de todos y va resaltando los contenidos matemáticos o de gestión que están implícitos en las resoluciones que presentan. Así por ejemplo, en esta puesta en común se habla de:

- Múltiplos y divisores. Criterios de divisibilidad.
- Utilización del lenguaje algebraico.
- Estrategia de ensayo-error.
- Análisis de posibilidades.
- Procesos inductivos (realización de tablas).
- Generalizaciones de propiedades.
- Procesos de conjeturar y probar.
- Comunicación de los procesos de resolución.
- Identificación de las dificultades que han tenido y la forma en que las han superado.
- Exposición de las ideas a las críticas de otros.
- Generación de nuevos problemas.
- Progresiones aritméticas. Suma. Etc.

5.2. Problema de Jaimito

Jaimito sale de casa con un mazo de cromos y vuelve sin ningún cromo. Su madre le pregunta qué ha hecho de los cromos.

- A cada amigo que he encontrado le he dado la mitad de los cromos que llevaba más uno.
- ¿Cuántos amigos te has encontrado?
- Seis.

¿Cuántos cromos llevaba Jaimito cuando salió de casa?

5.2.1. Búsqueda de soluciones

Los diferentes grupos de la clase abordan la resolución de este problema, esencialmente, de dos formas:

1. Siguiendo un procedimiento a la inversa, es decir, empezando por el final. Si a cada amigo le da la mitad de los cromos más 1, quiere decir que a Jaimito le quedan, cada vez, la mitad de los cromos menos 1, es decir, tendrán que sumar 1 cromo a los que tiene y multiplicar el resultado por 2. De esta manera, construyen tablas como la siguiente (Tabla 2) para obtener el resultado final.

Amigo 6 (último)	(0+1)·2=2
Amigo 5 (penúltimo)	(2+1)·2=6
Amigo 4	(6+1)·2=14
Amigo 3	(14+1)·2=30
Amigo 2	(30+1)·2=62
Amigo 1	(62+1)·2=126

Tabla 2. Procedimiento “empezar por el final”

2. Siguiendo un procedimiento directo, es decir, empezando por el amigo 1, el 2, el 3, etc., planteando un esquema como el de la Tabla 3, e igualando el resultado final a cero. Obtienen el resultado final x=126.

Inici	x
Amic 1	$\frac{x}{2} - 1$
Amic 2	$\frac{\frac{x}{2} - 1}{2} - 1 = \frac{x-2-4}{4}$
Amic 3	$\frac{\frac{x-2-4}{4}}{2} - 1 = \frac{x-2-4-8}{8}$
Amic 4	$\frac{\frac{x-2-4-8}{8}}{2} - 1 = \frac{x-2-4-8-16}{16}$
Amic 5	$\frac{\frac{x-2-4-8-16}{16}}{2} - 1 = \frac{x-2-4-8-16-32}{32}$
Amic 6	$\frac{\frac{x-2-4-8-16-32}{32}}{2} - 1 = \frac{x-2-4-8-16-32-64}{64} = \frac{x-126}{64}$

Tabla 3. Utilización del lenguaje algebraico para resolver el problema

Otros grupos, siguiendo este procedimiento, utilizan las mismas expresiones pero con los números en forma de potencia y obtienen directamente una expresión general para el caso de n amigos, de la forma:

Después de encontrarse al primer amigo tiene: $\frac{x}{2}-1$; después del segundo, tiene: $\frac{x}{2^2}-\frac{1}{2}-1$. Y así sucesivamente hasta obtener la cantidad de cromos que le queda a Jaimito después del sexto amigo: $\frac{x}{2^6}-\frac{x}{2^5}-\frac{x}{2^4}-\frac{x}{2^3}-\frac{x}{2^2}-\frac{1}{2}-1$.

Así pues, llegan a obtener la expresión de x de la forma $x = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 126$. Y, de aquí, la expresión general para n amigos que sería: $x = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$. E indican textualmente que “como esta operación es muy larga intentamos resolverla encontrando una fórmula a partir de la Tabla 4”

Amigos	Cromos
1	2
2	6
3	14
4	30
5	62
6	126
7	254

Buscamos una fórmula para encontrar cuántos cromos debería de tener sabiendo el número de amigos. Es:

$$2\cdot(2^n-1)$$

n: número de amigos

Tabla 4. Búsqueda de la expresión general para n amigos

Esta expresión, a la que no han llegado todos los grupos de trabajo, es motivo de comentarios y reflexiones en una puesta en común que provoca el profesor. Se incide en esta generalización puesto que es la primera con cierta dificultad que ha aparecido y el profesor ha de cerciorarse de que los estudiantes que la han generado expliquen el proceso que han seguido y éste sea comprendido por los demás. Después el profesor explica qué es una progresión geométrica y cómo se puede obtener la suma de un número finito de sus términos.

5.2.2. Propuesta y resolución de variantes

1. La primera propuesta, integrada en la resolución del problema original, es, como vemos en la Tabla 4, la consideración de n amigos.
2. La segunda propuesta de variación del enunciado que proponen los estudiantes es la de considerar que, en lugar de dar a cada amigo la mitad de los cromos más 1, le demos la mitad más 2, más 3, más 4…, más m.

Después de construir tablas como la Tabla 5, llegan a obtener una generalización para el caso

$$\frac{1}{2}+m$$

Amigos	$\frac{1}{2}+1$	$\frac{1}{2}+2$	$\frac{1}{2}+3$
1	2	4	6
2	6	12	18
3	14	28	42
4	30	60	90
5	62	124	186
6	126	252	372

Ahora lo hacemos también para 1/2+4.

Se ve que con 1/2+2 es el doble del primero y con 1/2+3, es el triple. Por eso la fórmula para saber el número de cromos será: $2\cdot(2^n-1)\cdot m$

m: número que le sumamos a la fracción

Tabla 5. Inicio del proceso inductivo y generalización del caso $\frac{1}{2}+m$

Según explican los estudiantes, para obtener la generalización, simplemente observan que cada columna se obtiene multiplicando la primera por m.

3. La tercera variante, por otra parte lógica, que los estudiantes pretenden resolver es la de variar la fracción, considerando que cada vez, Jaimito da a sus amigos $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{n}$.

   En este momento, los estudiantes empiezan a tener dificultades porque observan que no siempre es posible dar a los amigos $\frac{1}{n}$ de los cromos que tenía, más una cantidad. Después de una puesta en común en la que expresan las dudas sobre la posibilidad de poder continuar haciendo propuestas y desarrollando el enunciado inicial, el profesor da más tiempo a los grupos de trabajo para que traten de resolver este primer bloqueo serio que se ha presentado. Así, poco después, un grupo de alumnas propone a la clase que la variación lógica es considerar que se da $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; ...; \frac{n-1}{n}$.

   Entonces empieza una búsqueda frenética para encontrar generalizaciones que resuelvan el caso planteado, llegando los estudiantes a producir, ordenar y generalizar datos como los que se muestran en la Tabla 6.

Amigos	$\frac{1}{2}+1$	$\frac{1}{2}+2$	$\frac{2}{3}+1$	$\frac{2}{3}+2$	$\frac{3}{4}+1$	$\frac{3}{4}+2$	$\frac{4}{5}+1$	$\frac{4}{5}+2$	$\frac{5}{6}+1$
1	2	4	3	6	4	8	5	10	6
2	6	12	12	24	20	40	30	60	42
3	14	28	39	78	84	168	155	310	258
4	30	60	120	240	340	680	780	1560	1554
5	62	124	363	726	1364	2728	3905	7810	9330
6	126	252	1092	2184	5460	10920	19530	39060	55986
n	$\frac{2(2^n-1)}{1}\cdot$		$\frac{3(3^n-1)}{2}\cdot$		$\frac{4(4^n-1)}{3}\cdot$		$\frac{5(5^n-1)}{4}\cdot$		…

Tabla 6. Inicio del proceso inductivo sobre fracciones del tipo $\frac{q-1}{q}$

Y a encontrar generalizaciones para el caso de $\frac{q-1}{q}+m$ (Tabla 7).

Viendo que con $\frac{1}{3}$ no funciona, vamos probando con diferentes fracciones. Llegamos a la conclusión que sólo funciona con fracciones del tipo $\frac{q-1}{q}$ como por ejemplo $\frac{2}{3}$ o $\frac{4}{5}$, donde el numerador es una unidad más pequeño que el denominador.

Después vemos que para $\frac{1}{2}$ la fórmula en realidad era: $\frac{2(2^n-1)}{1}\cdot$; Para $\frac{2}{3}$ será: $\frac{3(3^n-1)}{2}\cdot$

Por tanto deducimos que la fórmula general será: $\frac{q(q^n-1)}{q-1}\cdot$

q: denominador de la fracción **n**: número de amigos **m**: número que le sumamos a la fracción

Tabla 7. Generalización al caso $\frac{q-1}{q}+m$

En la idea del profesor de no abandonar ninguna línea de trabajo propuesta por los estudiantes y una vez acabado el proceso de generalización para el caso de $\frac{q-1}{q}+m$, les propone insistir sobre el caso que había quedado pendiente, es decir, investigar qué pasa si Jaimito da a cada amigo una tercera parte más uno de los cromos que llevaba, una tercera parte más dos, una tercera más tres, etc.

Después de trabajar sobre este caso, un grupo de estudiantes escribe:

"Con $\frac{1}{3}+1$, $\frac{1}{3}+3$, $\frac{1}{3}+5$, … , $\frac{1}{3}+\textit{un número impar}$, no hay ningún número natural de cromos que funcione".

"Con $\frac{1}{3}+\textit{un número par}$ funciona, pero sólo con un amigo".

"Con $\frac{1}{3}+2$ y potencias de 2, funciona de la forma siguiente: para $\frac{1}{3}+2$ funciona si sólo se encuentra con un amigo; para $\frac{1}{3}+4$, funciona si se encuentra con 2 amigos; para $\frac{1}{3}+8$, funciona si se encuentra con 3 amigos; para $\frac{1}{3}+2^n$ funciona si se encuentra a **n** amigos". Y realizan la tabla siguiente (Tabla 8).

Amigos	$\frac{1}{3}+2$	$\frac{1}{3}+4$	$\frac{1}{3}+8$	$\frac{1}{3}+16$	$\frac{1}{3}+32$	$\frac{1}{3}+64$
1 (x_1)	3	6	12	24	48	96
2 (x_2)		15	30	60	120	240
3 (x_3)			57	114	228	456
4 (x_4)				195	390	780
5 (x_5)					633	1266
6 (x_6)						1995

Tabla 8. Inicio del proceso inductivo para el caso $\frac{1}{3}+m$

Y continúan la generalización realizando un proceso iterativo para el caso $\frac{1}{q}+m$, aplicando la expresión $x-\left(\frac{x}{q}+m\right)=0$, siendo x el número de cromos que tiene Jaimito antes de darle al siguiente amigo. De esta manera, para el primer amigo será:

$$x_1-\left(\frac{x_1}{q}+m\right)=0$$

$$x_1-\frac{x_1}{q}-m=0$$

$$x_1\left(1-\frac{1}{q}\right)=m$$

$$x_1=\frac{m\bullet}{q-1}$$

Y utilizan la misma ecuación para saber el número de cromos que da al segundo amigo (x_2), y anteriores (Tabla 9)

Sustituyendo x_1 por su valor:

$$x_2-\left(\frac{x_2}{q}+m\right)=x_1$$

$$x_2-\left(\frac{x_2}{q}+m\right)=\frac{m\cdot q}{q-1}$$

$$x_2-\frac{x_2}{q}-m=\frac{m\cdot q}{q-1}$$

$$x_2-\frac{x_2}{q}=\frac{m\,q}{q-1}+m$$

$$x_2\left(1-\frac{1}{q}\right)=\frac{m\cdot q}{q-1}+m$$

$$x_2=\frac{\frac{m\cdot q}{q-1}}{1-\frac{1}{q}}+\frac{m}{1-\frac{1}{q}}=\frac{\frac{m\cdot q}{q-1}}{\frac{q-1}{q}}+\frac{m}{\frac{q-1}{q}}$$

$$\boxed{x_2=\frac{q^2\cdot m}{(q-1)^2}+\frac{q\cdot m}{q-1}}$$

$$x_3-\left(\frac{x_3}{q}+m\right)=x_2$$

$$x_3-\left(\frac{x_3}{q}+m\right)=\frac{q^2\cdot m}{(q-1)^2}+\frac{q\cdot m}{q-1}$$

$$x_3-\frac{x_3}{q}=\frac{q^2\cdot m}{(q-1)^2}+\frac{q\cdot m}{q-1}+m$$

$$x_3\left(1-\frac{1}{q}\right)=\frac{q^2\cdot m}{(q-1)^2}+\frac{q\cdot m}{q-1}+m$$

$$x_3=\frac{q^3\cdot m}{(q-1)^3}+\frac{q^2\cdot m}{(q-1)^2}+\frac{q\cdot m}{q-1}$$

$$x_4=\frac{q^4\cdot m}{(q-1)^4}+\frac{q^3\cdot m}{(q-1)^3}+\frac{q^2\cdot m}{(q-1)^2}+\frac{q\cdot m}{q-1}$$

$$x_5=\frac{q^5\cdot m}{(q-1)^5}+\frac{q^4\cdot m}{(q-1)^4}+\frac{q^3\cdot m}{(q-1)^3}+\frac{q^2\cdot m}{(q-1)^2}+\frac{q\cdot m}{q-1}$$

Tabla 9. Proceso iterativo para el caso $\frac{1}{q}+m$

Comprobando, con las fórmulas que obtienen, los valores de la Tabla 8

5.2.3. Puesta en común de los resultados obtenidos en la resolución del problema de Jaimito

Durante las exposiciones de los estudiantes, el profesor resalta los resultados que han obtenido, y les va pidiendo que los relacionen, como por ejemplo cuando presentan los resultados de las Tablas 4 y 9:

$$x = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2\cdot(2^n-1)$$

$$x_5=\frac{q^5\bullet}{(q-1)^5}\cdot\frac{\bullet}{(q-1)^4}\cdot\frac{\bullet}{(q-1)^3}\cdot\frac{\bullet}{(q-1)^2}\cdot\frac{\bullet}{(q-1)}$$

Donde les pide que, por similitud, calculen la suma general en el segundo caso. Hablan después de las progresiones geométricas y de la importancia del cálculo de la suma de un número finito de sus términos, y de que las generalizaciones en forma de expresiones algebraicas que van obteniendo necesitan, para su validación, de una justificación más rigurosa que la simple observación. Los estudiantes de estas edades no entienden todavía esa necesidad de demostración.

Además, el profesor va favoreciendo la participación de los estudiantes e invitándoles a la reflexión sobre las aportaciones que van haciendo y, al mismo tiempo, va dando nombre a las heurísticas y otros contenidos matemáticos y elementos de gestión que van apareciendo, como por ejemplo:

- Comprensión e interpretación del enunciado.
- Estrategia de ensayo error.
- Procedimiento directo y de empezar por el final.
- Realización de tablas.
- Búsqueda y determinación de regularidades.
- Visualización de modelos.
- Procesos de inducción y generalización.
- Utilización de razonamientos.
- Generación y análisis de variantes de un problema.
- Interpretación de resultados múltiples.
- Utilización de expresiones algebraicas.
- Procesos iterativos. Iteración.
- Utilización de potencias y sus propiedades.
- Conceptos matemáticos de progresiones geométricas, múltiplos y divisores, etc.

5.3. El juego de las 21 cartas

El juego consta de tres iteraciones que acaban produciendo la posición fija de una carta previamente elegida.

5.3.1. Cómo se juega

El profesor hace una presentación práctica del juego de la siguiente manera:

Baraja un paquete de 21 cartas diferentes. Con las 21 cartas boca abajo, y empezando por arriba, reparte las cartas de una en una sobre una mesa en tres montones, de forma consecutiva, y dejando todas las cartas boca arriba. Así, la primera carta quedará en el primer montón, la segunda, en el segundo, la tercera, en el tercero, la cuarta, en el primero, la quinta, en el segundo, etc.

Mientras ejecuta la acción anterior pide a un estudiante que se fije en una carta y que, después del reparto, solo señale el montón en la que se encuentra.

A continuación, agrupa los tres montones de forma que el que contiene la carta elegida quede en el centro y, con las 21 cartas boca abajo, repite este proceso otras dos veces más.

Después de esas tres iteraciones, con las 21 cartas agrupadas y boca abajo, el profesor cuenta mentalmente, desde la carta superior, hasta 11 cartas y señala la que ocupa ese lugar, adivinando, de esta forma, la carta que el estudiante había elegido.

El profesor vuelve a repetir la presentación anterior y después explica a los estudiantes los objetivos de este juego: explicar de manera razonada cómo se encuentra la carta elegida y buscar variantes del juego y resolverlos.

5.3.2. Cómo funciona

En la primera fase, los estudiantes han de ver cómo funciona el juego.

Para ello, y después de varios intentos, suponen, como ha hecho el profesor, que el montón de la carta elegida en las tres iteraciones se coloca en la posición central y, en ese caso, describen el funcionamiento del juego haciendo un seguimiento de la carta elegida. En la primera iteración, una vez que saben el montón que contiene la carta elegida lo colocan entre los otros dos. O sea que la carta elegida quedará entre las posiciones 8 y 14.

1 2 3 4 5 6 7 **8 9 10 11 12 13 14** 15 16 17 18 19 20 21

Suponen, por ejemplo, que la carta elegida es la que ocupa la posición 9. Hacen la segunda iteración y observan que la carta de esa posición queda en el tercer montón (Tabla 10).

Posición en el montón	Montón nº 1	Montón nº 2	Montón nº 3
1ª	1	2	3
2ª	4	5	6
3ª	7	8	**9**
4ª	10	11	12
5ª	13	14	15
6ª	16	17	18
7ª	19	20	21

Tabla 10. Distribución de las cartas después de la segunda iteración

A continuación, sitúan el montón 3 (que contiene la carta 9) en el centro de los tres montones.

2 5 8 11 14 17 20 3 6 **9** 12 15 18 21 1 4 7 10 13 16 19

Finalmente hacen la tercera iteración (Tabla 11) y sitúan el primer montón (el que contiene la carta 9) en el centro de los tres montones.

Posición en el montón	Montón nº 1	Montón nº 2	Montón nº 3
1ª	2	5	8
2ª	11	14	17
3ª	20	3	6
4ª	**9**	12	15
5ª	18	21	1
6ª	4	7	10
7ª	13	16	19

Tabla11. Distribución de las cartas después de la tercera iteración

Quedando, al final distribuidas las cartas de la forma:

5 14 3 12 21 7 16 2 11 20 **9** 18 4 13 8 17 6 15 1 10 19

Con la carta número 9 en la posición 11.

Repiten el juego varias veces, eligiendo otras cartas en diversas posiciones y comprueban que, al final, la carta elegida siempre ocupa la posición número 11 de entre las 21 cartas.

5.3.3. Generación de variantes. Generalizaciones

Como en los otros problemas, lo que pretendemos es que los estudiantes generen, resuelvan y generalicen variantes de este juego.

Durante el desarrollo de la actividad, los grupos de estudiantes van trabajando sobre diferentes variantes. Aproximadamente a la mitad del proceso de resolución, decidimos con los estudiantes unificar las notaciones que utilizaban los diferentes grupos de trabajo para facilitar las puestas en común. Mostramos aquí desde el principio esa notación unificada.

Así pues, llamamos p a la posición final de la carta elegida y m_i a la posición del montón que contiene la carta elegida tras la iteración *i*. Así, m_i=1 significaría que el montón que contiene la carta elegida tras la iteración i se coloca en la parte superior con las cartas boca abajo. En el ejemplo anterior p sería 11, y m_1, m_2 y m_3 serían siempre 2, ya que el montón que contiene a la carta elegida siempre lo vamos colocando en segunda posición.

a) Algunos grupos consideran el juego en el que sean necesarias sólo dos iteraciones para determinar la posición de la carta elegida.
Después de muchos intentos, encuentran dicha posición en función de la posición (m_1 y m_2) del montón en el que está la carta elegida.
Observan que la carta elegida se puede adivinar considerando n^2 cartas y realizando con ellas dos iteraciones en n montones. Hacen tablas como las que mostramos en la Tabla 12. Por ejemplo, para 9 cartas, 3 montones y 2 iteraciones, la Tabla 12b muestra las diferentes posiciones finales de la carta elegida según que m_1 tome los valores 1, 2 o 3 y m_2 tome los valores 1, 2 o 3.

m_2 \ m_1	**1**	**2**
1	1	2
2	3	4

(a)

m_2 \ m_1	**1**	**2**	**3**
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

(b)

m_2 \ m_1	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	5	6	7	8
3	9	10	11	12
4	13	14	15	16

(c)

Tabla 12. En cada tabla, posición p de la carta elegida para n^2 cartas y n montones.

La observación de estas tablas lleva a los estudiantes a obtener una expresión generalizada para la posición de la carta elegida como la siguiente:

$$p= m_1 + n\cdot(m_2-1)$$

El profesor pide a los estudiantes que expliquen el significado de esa expresión, y lo hacen de la siguiente manera: "en la primera iteración cada montón representa una columna; en la segunda, cada columna se distribuye en filas; por tanto, sabidas la columna y la fila se sabe la posición de la carta elegida". Están hablando, aunque no lo expliciten, de filas y columnas de matrices cuadradas y de transpuesta de una matriz.

b) Una variante que surge es la de determinar la posición de la carta elegida en función del orden en el que se vayan colocando los montones que la contienen.

Los estudiantes resuelven este reto aportando ideas muy interesantes tanto en la utilización de diferentes representaciones como en la realización de tablas y en la búsqueda de regularidades. Lo cual contribuye a incorporar al juego modificaciones atractivas.

En primer lugar, observan que, para 3 montones, sólo se estabiliza la posición de la carta elegida, en todas las posiciones posibles de los montones, cuando el número total de cartas es una potencia de 3. Así, para 21 cartas distribuidas en 3 montones, la carta elegida se estabiliza, tras 3 iteraciones, solo en algunas posiciones de los montones que la contienen. Por ejemplo, en el caso que presentamos en el juego inicial (cuando las posiciones son $m_1=2$, $m_2=2$ y $m_3=2$), pero no se estabiliza en el caso $m_1=1$, $m_2=2$ y $m_3=1$.

- De esta forma, si sólo tienen 3 cartas, la posición de la carta elegida se estabiliza después de una iteración. Y sería $p=m_1$.
- Si tienen 9 cartas, la posición de la carta elegida se estabiliza después dos iteraciones. Los estudiantes determinan dicha posición construyendo la Tabla 13, que es la misma que la Tabla 12b.

m_2 \ m_1	**1**	**2**	**3**
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

Tabla 13. Posiciones (p) de la carta elegida en función de las posiciones de los montones, para 9 cartas.

Y encuentran la expresión general de la posición de la carta elegida de la forma:

$$p=m_1+3(m_2-1)$$

- Si hay 27 cartas, la posición de la carta elegida se estabiliza después tres iteraciones. Los estudiantes determinan dicha posición construyendo la Tabla 14. En ella, según explican, m_1 y m_2 pueden tomar los valores 1, 2 o 3, que indica la tabla, y el montón que contiene la carta elegida tras la 3ª iteración siempre lo colocan en la primera posición, es decir $m_3=1$.

m_2 \ m_1	**1**	**2**	**3**
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9

Tabla 14. Posiciones de la carta elegida, si, tras la 3ª iteración, m_3=1

Observan que en todas las posiciones en que se puedan colocar los montones tras las sucesivas iteraciones, la posición de la carta elegida se estabiliza en el lugar que dice la tabla.

Después realizan la Tabla 15, que les da las posiciones de la carta elegida en función de las posiciones de los montones que la contienen tras las tres iteraciones. En realidad han reducido una tabla que debería ser de tres dimensiones a una de doble entrada.

También explican que la colocación de los montones después de la 3ª iteración (m_3) tiene una influencia muy evidente en la colocación final de la carta elegida. Simplemente si m_3 es 2, se suma 9 a la posición que se obtiene si m_3 fuera 1; y si m_3 es 3, se suma 18 a la posición que se obtiene si m_3 fuera 1 (Tabla 15).

m_3 \ m_1m_2	**11**	**21**	**31**	**12**	**22**	**32**	**13**	**23**	**33**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Tabla 15. Posiciones de la carta elegida según las posiciones del montón que la contiene

Tras la realización de estas tablas, los estudiantes buscan una expresión algebraica que permita calcular directamente la posición de la carta elegida sabiendo las posiciones (m_1, m_2 y m_3) de los montones tras cada iteración. Obtienen la siguiente expresión, que Serrano (2006) llama Teorema de Tamariz :

$$p = m_1+3(m_2-1)+9(m_3-1)$$

Así, el que realice el juego puede abrirlo y permitir que la persona del público elija libremente las posiciones en las que quiera colocar los montones tras las tres iteraciones.

La pregunta siguiente que se hacen los estudiantes es obvia: ¿Cómo sería la expresión para 81 cartas?, ¿y para 3^i cartas? Las respuestas son rápidas, y, sin hacer ninguna comprobación, proponen que para 81 (3^4) cartas se necesitarían 4 iteraciones y la expresión podría ser:

$$p = m_1+3(m_2-1)+9(m_3-1)+27(m_4-1)$$

Para 3^i cartas, se necesitarían *i* iteraciones y la expresión podría ser una generalización del Teorema de Tamariz:

$$p = m_1+3(m_2-1)+3^2(m_3-1)+\ldots.-\ldots \ldots+3^{i-1}(m_i-1)$$

En este momento, y debido al tiempo considerable que les ha llevado el desarrollo del juego, el profesor decide acabarlo, dejando para las discusiones de la puesta en común las posibles variantes por las que se hubiera podido continuar.

5.3.4. Puesta en común de los resultados obtenidos en la resolución del juego de las 21 cartas

En la puesta en común, como en el caso del problema de Jaimito, el profesor insiste a los estudiantes que las generalizaciones obtenidas por inducción necesitan ser justificadas para poderse aceptar como válidas en matemáticas.

A partir de aquí, y aceptando su incomprensión por lo que dicen con insistencia: “se ve que la expresión general es correcta y no necesita ninguna justificación más”, se propone que generen nuevas variantes. En las discusiones aparecen retos como los siguientes:

- ¿Y si hiciéramos dos montones con un número de cartas que sea potencia de 2? , ¿y si fueran cuatro montones con un número de cartas que sea potencia de 4?, ¿y si fueran k montones con un número de cartas que sea potencia de k ?
  Rápidamente y sin comprobar los estudiantes proponen expresiones similares a la del Teorema de Tamariz que tratan de localizar la carta elegida, para 2^n cartas, para 4^n cartas y para k^n cartas.
- Hay estudiantes que insisten en analizar el caso del enunciado, es decir, suponen que siempre colocan el montón que contiene la carta elegida en segunda posición, manteniendo el número de montones (3), pero variando el número de cartas, que siempre ha de ser múltiplo de 3.
- El profesor propone, siguiendo a Alegría (2004), el reto de considerar 27 cartas distribuidas en 3 montones, y ver si es posible llevar la carta elegida a cualquier posición de la baraja. Este autor dice que sí es posible, escribiendo esa posición en base 3. Las preguntas que nos formularíamos serían: ¿De qué manera se puede conseguir esto?, ¿es aplicable a otros números de cartas?

Estas preguntas y otras pueden generar para los estudiantes nuevos retos y prolongar la actividad tanto como queramos.

Además, en las exposiciones de los estudiantes van apareciendo contenidos matemáticos que se van comentando en el grupo-clase, como por ejemplo:

- Comprensión e interpretación del enunciado.
- Estrategia de ensayo error.
- Consideración y análisis de juegos más simples. Resolución de casos particulares.
- Realización, caracterización y propiedades de las tablas generadas.
- Búsqueda y determinación de regularidades.
- Visualización de modelos.
- Procesos de inducción y generalización.
- Utilización de diferentes sistemas de representación.
- Utilización de razonamientos.
- Generación y análisis de variantes de un juego (o de un problema).
- Interpretación de resultados múltiples.
- Generación y utilización de expresiones algebraicas.
- Conceptos matemáticos de matriz, matriz transpuesta, múltiplo, iteración, punto fijo, etc.

6. Reflexiones finales

Pensamos que mostrar a los estudiantes las matemáticas acabadas, hechas, cerradas y sin, o con poca, posibilidad de construirlas no es la mejor manera de avanzar ni en la motivación, ni en la actitud, ni en el progreso de los conocimientos matemáticos de los estudiantes. Por el contrario, creemos que hemos de intentar buscar nuevas formas de aproximarnos a la enseñanza de las matemáticas, que contemplen una mayor participación de los estudiantes, unas tareas más ricas, y una participación más discreta y optimizada del profesor, que favorezca la reflexión, la búsqueda, el descubrimiento, etc.

En esas nuevas formas de enseñanza, consideramos que han de ser muy importantes las reflexiones conjuntas que tienen lugar en las puestas en común de todos los estudiantes del grupo-clase. Son los momentos en los que se han de intentar solucionar las dificultades de comprensión, en los que se unifiquen las líneas de trabajo de los diferentes grupos y donde se aborden los bloqueos y los conflictos que se produzcan. Además, en ellas, el profesor ha de dar prioridad a que sean los propios estudiantes los que resuelvan las cuestiones y dificultades que se vayan planteando.

En la metodología que proponemos, no es fácil el papel del profesor, que en todo momento ha de estar abierto a los nuevos retos que plantean los estudiantes y a las soluciones que aportan. Tampoco es fácil para los estudiantes el cambio de hábitos que supone pasar de esperar las respuestas del profesor a que sean ellos los que tengan que generar retos y buscar soluciones.

Llegados a este momento, tratamos de responder a la pregunta del título de este artículo: ¿Pueden nuestros estudiantes construir el conocimiento matemático?

Según Giménez (2000), "se construye cuando se produce con significado. No hay construcción sin producción, aunque pueda haber momentos de 'reproducción'" (p.5). Es claro que nuestros estudiantes no solo han producido conocimiento matemático nuevo, sino que han sido capaces de vincular ese conocimiento a un lenguaje matemático que le da significado. En este sentido, las presentaciones al grupo-clase de las aportaciones que han hecho los estudiantes han contribuido al desarrollo de dicho lenguaje y a que el conocimiento sea socialmente compartido.

Es importante saber si los estudiantes construyen o no, pero también lo es saber: cómo construyen, qué papel otorgamos a cada uno de los protagonistas, y cómo reflexionamos sobre las construcciones (Giménez, 2000). Cuestiones que hemos tratado de responder a lo largo de este artículo, mostrando la metodología que seguimos y los desarrollos detallados de los procesos de resolución de los problemas que los estudiantes han producido.

Bibliografía

Alegria, P. (2004).Códigos Secretos y Teoría de la Información en la Magia. Sigma nº 25. Noviembre 2004. [en línea]. Recuperado el 1/9/11 de http://www.ehu.es/~mtpalezp/mates/codigos.pdf

Cobo, P. (2004a). Experiencias sobre enseñanza de resolución de problemas de matemáticas. En *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes* Joaquim Giménez, Leonor Santos, Joao Pedro da Ponte (coords.), 127-136. Ed. Graó. Barcelona.

Cobo, P. (2004b). *Disseny d'agents pedagògics intel·ligents per millorar les competències estratègiques de l'alumnat en la resolució de problemes de matemàtiques. Memoria inédita de la llicencia de estudios concedida por el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (DOGC,núm.3926 de 16-7-2003.* [en línea]. Recuperado el 15/3/2005 de http://www.xtec.es/sgfp/llicencies/200304/memories/868m.pdf

DOGC (2007). Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya. Decret 143/2007. Ordenació dels ensenyaments de l'Educació Secundària Obligatòria.

Fernández, M. L., Hadaway, N.; Wilson J. W. (1994). Problem solving: Managing It All. *Mathematics Teacher*, 87, 3, 195-199.

Giménez, J. (2000). ¿Construir o no construir? Esa no es la cuestión. *UNO. Revista de Didáctica de las matemáticas*. n. 25. Pp. 5-7.

Grup Vilatzara (2001). Proyectos en la ESO. Una actividad rica. *UNO. Revista de Didáctica de las matemáticas*. n. 27. Pp. 21-36.

Intermates. Dentro del portal *edu365* del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. [en línea]. Recuperado el 1/11/09 de http://www.edu365.com/aulanet/intermates/.

Mayor, J., Suengas, A.; González Márquez, J. (1993). *Estrategias metacognitivas*. Ed. Síntesis. Madrid.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Ed. Comares. Granada.

Schoenfeld, A. H. (1987). "What's all the fuss about metacognition?". En A. H. Scoenfeld (Ed.). *Cognitive science and mathematics education* , Hillsdal, NJ: Lawrence Erlbaum, 189-215.

Schoenfeld, A. (2011). How We Think. A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications Ed. Routledge.

Serrano, A. J. (2006). Análisis matemático de algunos juegos de magia [en línea]. Recuperado el 10 de febrero de 2011, de http://olmo.pntic.mec.es/~aserra10/articulos/magia.html

Somchaipeng, T.; Kruatong, T.; Panijpan, B. (2012). Using Disks as Models for Proofs of Series. *Mathematics Teacher*, 106, 1, pp.46-50.

Pedro Cobo Lozano. Catedrático de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria Pius Font i Quer de Manresa. Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Es investigador invitado de la UAB y profesor formador del ICE de la UAB. Participa en proyectos de investigación relacionados con la Didáctica de las Matemáticas y con el uso de las nuevas tecnologías, subvencionados por el MEC. Como miembro del Grupo Vilatzara se dedica a la elaboración de material didáctico para la enseñanza secundaria.

María Antonia Molina Hernández. Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Granada. Fue profesora de enseñanza secundaria y es, en la actualidad, profesora titular de la Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa de la Universidad Politécnica de Cataluña. Ha pertenecido a movimientos de renovación pedagógica en la enseñanza secundaria. Ha publicado diversos trabajos sobre Educación Matemática relacionados con la enseñanza universitaria.