

Esperanza Teixidor Cadenas. (Las Palmas de Gran Canaria. España)

Resumen

La mayoría de los objetos que existen en la realidad son tridimensionales. La enseñanza-aprendizaje de la geometría debe comenzar investigando objetos de tres dimensiones, y a partir de su manipulación descubrir los bidimensionales, hasta llegar a los unidimensionales, que son los más abstractos. La manipulación será imprescindible para un aprendizaje significativo. Contamos con la ayuda de un potente material didáctico llamado BaFi. Invertir el orden tradicional 1D, 2D, 3D, supondrá un reto para el docente.

Palabras clave

Innovación didáctica, geometría, dificultades, enseñanza-aprendizaje, Primaria.

Title

3D, 2D, 1D

Abstract

Most of the objects that exist in reality are three-dimensional. The teaching and learning of geometry must begin by investigating three-dimensional objects, and then by manipulation progress to discover the two dimensional objects until one reaches the one-dimensional which are the most abstract. These manipulations are essential for meaningful learning. Reversing the traditional order 1D, 2D, 3D will be a challenge for teachers. To enable this, we have the help of a powerful didactic material called Bafi that helps us achieve this goal.

Keywords

Educational innovation, geometry, difficulties, teaching and learning, Primary Education.

1. Introducción

Durante más de 25 años de docencia como maestra en Primaria, he observado en el alumnado la dificultad de reconocer la geometría que hay en la realidad. La conexión de lo aprendido en clase con su uso cotidiano. El bloque de geometría, muchas veces, sigue quedando relegado al final del curso. Y al año siguiente se comprueba que hubo poco aprendizaje significativo.

Esto es la consecuencia de una enseñanza basada principalmente en el libro de texto, con el orden tradicional de exposición: primero los objetos de una dimensión (rectas, semirrectas, segmentos, líneas curvas, circunferencia...). A continuación, los de dos dimensiones (polígonos, círculos, ángulos...). Y acabando con los objetos de tres dimensiones (cubos, pirámides, prismas...). El libro tiene poca versatilidad, pues los polígonos aparecen generalmente en la misma posición, en vez de en todas las posiciones. Con los cuerpos la dificultad es todavía mayor, ya que es difícil lograr ver la tercera dimensión. Solamente la verá el alumnado con inteligencia espacial por encima de la media.



2. Premisas previas

Son dos las ideas de las que partimos:

1. Los errores comunes deben plantear al maestro el interrogante metodológico. ¿Qué habrá que cambiar para lograr que no sea un error común? Si sigo con la misma metodología conseguiré los mismos malos resultados.

2. Todo avance supone fallar y aprender de los fallos. Debemos evitar transmitir una cultura del éxito en la que un error es un fracaso. A veces hemos tenido la experiencia en las aulas de defraudar al dar el resultado de una prueba. Por ejemplo, un alumno o alumna brillante se desanima con un 7. Esto es indicador de que la nota está prevaleciendo sobre el aprendizaje en sí mismo.

La actitud del profesorado y cómo evalúa, dando mucha importancia al proceso del aprendizaje, logrará cambiar la cultura del éxito por la cultura de la investigación. Los niños desde que nacen son pequeños investigadores de su entorno cercano. La capacidad de asombro es también un buen aliado del aprendizaje, ya que lo que asombra se queda más. El aprendizaje debe provocar asombro y satisfacción ante algo que no conocíamos y que logramos asimilar. En definitiva, los fallos o errores son indicadores de que no vamos bien por ese camino y hay que buscar otro. Nunca quedarse en el error que desanima. Lo importante es hacer pensar, planteando buenas preguntas para que el alumnado razone y descubra lo que falló, e investigue nuevos caminos.

3. Errores más frecuentes

Son comunes los siguientes errores del alumnado:

1. No reconocen las figuras geométricas si están en otra posición distinta a la que suele aparecer en el libro de texto.
2. La confusión de objetos tridimensionales con bidimensionales, por ejemplo, el cubo con el cuadrado.
3. Asocian geometría a memorizar conceptos, clasificaciones y fórmulas que se olvidan.

Se puede pensar que los tres errores antes comentados son sólo de alumnos. ¡Y son también de adultos! Un ejemplo elocuente son los fallos espaciales que se encuentran en la publicidad comercial. Uno de los muchos ejemplos es el siguiente:

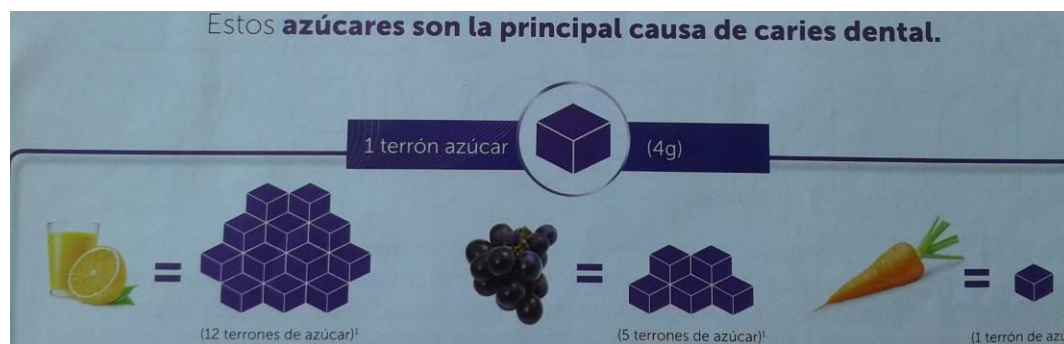


Figura 1. Publicidad de una pasta de dientes

Se representa mal la correspondencia entre la figura y el número de terrones que se contabilizan. En el dibujo de los supuestos cinco terrones, en realidad hay siete. El dibujo de los supuestos doce terrones es una figura espacial imposible, ya que existen terrones en el aire. El que diseñó esta propaganda no tuvo una formación tridimensional que hubiera evitado la equivocación.

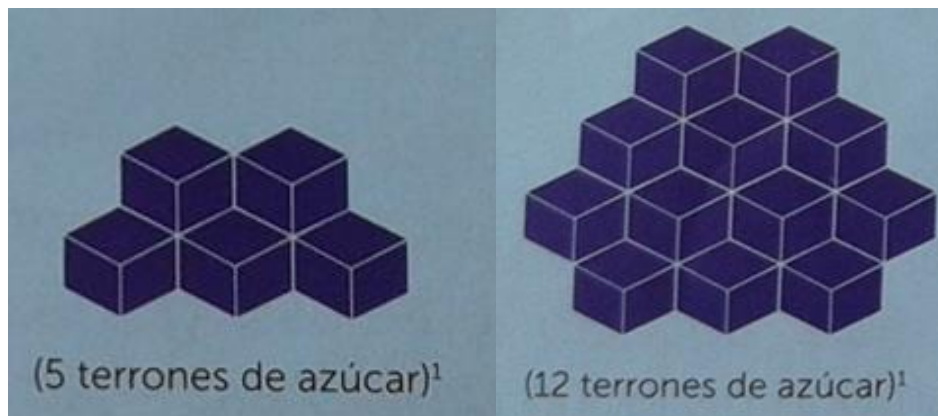


Figura 2. Errores de contabilidad en el número total de terrones

4. Un material innovador: el cubo flexible BaFi

Mi pasión por la enseñanza me lleva a buscar metodologías activas, que logren vivenciar la geometría y alcanzar aprendizajes significativos. Así nació y se desarrolló un cubo que se transforma, al manipularlo, en distintas figuras geométricas. Está formado por doce tubos iguales ensartados en un hilo elástico, que los mantiene unidos. Su nombre actualmente es BaFi. La experiencia de aula se publicó en el número 74 de la revista Números. Ver Bibliografía.

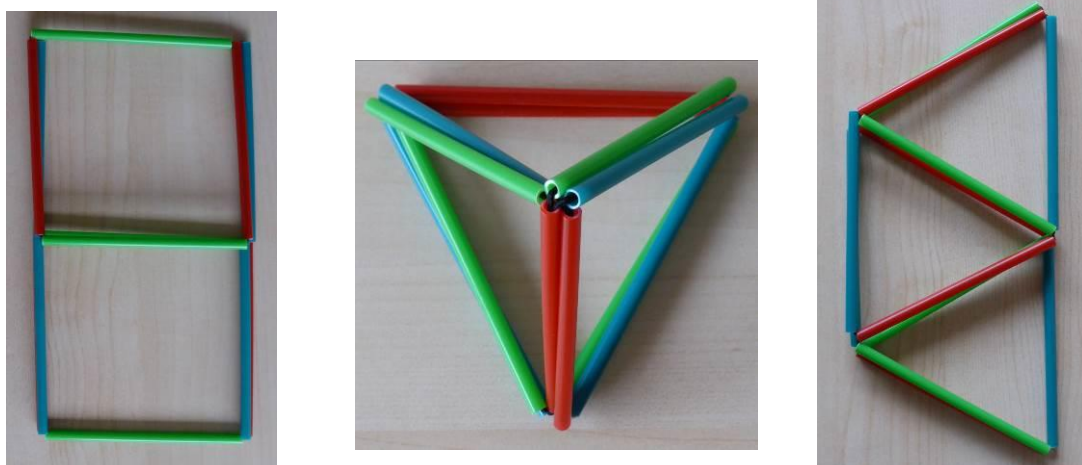


Figura 3. Rectángulo, tetraedro y trapecio, con BaFi

Su logo es la representación de un cubo, rodeado de segmentos circulares y pequeños círculos. Quiere transmitir dos ideas:

1. Los colores simbolizan la diversidad de personas a las que va dirigido: de todos los países, culturas, capacidades y edades.



2. El situarlos alrededor del cubo quiere simbolizar la metodología activa y colaborativa en la que, a través de la manipulación, las personas descubren y disfrutan la geometría.



Figura 4. Logo

BaFi es la marca nacional del cubo didáctico que ha obtenido la concesión de modelo de utilidad (según el Boletín Oficial de la Propiedad Industrial de fecha 21/10/2014). Esta innovación supera los materiales didácticos actualmente utilizados para la enseñanza de la geometría. Se caracteriza por sus vértices flexibles, pudiéndose transformar en al menos 18 figuras.

Un comentario en la web “cubodidacticobafi” fue el catalizador de este artículo. Textualmente dice: “Tengo dos niños pequeños de 2 y 4 años que juegan con el BaFi. Se divierten y sin darse cuenta están aprendiendo formas geométricas. Ellos ven una casa, una cometa, un cuento, una ventana...Conocimos el BaFi por casualidad y encantados”. Lo escribió M^a Carmen, la madre de dos pequeños que conocí en el barco de naviera Armas en una travesía entre Tenerife y Gran Canaria, en julio de 2014.

Otro hecho destacado ocurrió con Javier, que en octubre de 2014 tenía 6 años. Le había dicho que con BaFi podía hacer muchas figuras y que seguro algunas estaban por descubrir. Javi se puso a jugar con un BaFi y encontró una figura nueva: ¡tres triángulos equiláteros siameses!



Figura 5. Javier Macià Acosta

El diálogo fue:

- Pero Javi, ¿esta figura no la conocía! ¿Tú que ves?
- UN ELEFANTE -dijo Javi enseguida y con firmeza- un elefante.
- ¿Un elefante? Yo no lo veo. ¿Me lo enseñas?
- ¡Claro! Mira: una oreja, otra oreja y la trompa (señalando cada uno de los triángulos, siendo la trompa el triángulo de en medio).

Los niños y las niñas tienen una desbordante capacidad de imaginación. Luego llegan a Primaria y parece que pierden lo que antes veían. ¿No será para ellos “otra cosa” lo que se da en el colegio? Por ejemplo, cuando se empieza por las rectas, que no existen en la realidad.

Con BaFi solucionamos los tres errores frecuentes, logrando los siguientes resultados:

1. Reconocerán las figuras en todas las posiciones, ya que estarán acostumbrados a girar las figuras para verlas en otras posiciones.
2. Distinguirán objetos de 3D, 2D y 1D. Observarán cómo en algunos de ellos caben cosas dentro y por tanto son objetos de tres dimensiones o cuerpos (cubo, hexaedro irregular, tetraedro, pirámide cuadrangular y tetrápodo). En otros no caben cosas dentro, pero los podemos colorear, por lo que son objetos de dos dimensiones o superficies (hexágono, trapecio, rombo, triángulo, rectángulo, romboide, rombo, cuadrado y ángulo). Y por último aquellos que no son ni cuerpos ni superficies, sólo tienen una dimensión y los podemos trazar (segmento, secantes y perpendiculares).
3. Asociarán geometría con investigación, ya que irán descubriendo poco a poco las distintas figuras. Las contemplarán fijándose en sus distintos elementos, que irán aprendiendo progresivamente: aristas, vértices, lados y ángulos. De esta manera conseguirán un aprendizaje significativo que durará en el tiempo.

De esta forma el alumnado aprenderá a ver. Es importante, porque está unido al asombro del descubrimiento. Lo siguiente me ocurrió en una clase de 3EP. Era el cumpleaños de un alumno que trajo chupachups para celebrarlo. Observé que la alumna que acabó primero miró el palo, se le abrieron los ojos con ilusión, y dijo: ¡es un tubo! ¡Podemos usarlo para construir Bafis!

Otra anécdota fue en una visita a una central eléctrica. Otra alumna descubrió que muchos de los tornillos tenían cabeza hexagonal. Por eso es tan necesario hacer un paseo matemático, para mirar a nuestro alrededor y descubrir la geometría que hay en la realidad.

Desde el curso 2014-2015, BaFi lo están utilizando en más de 80 colegios de todas las islas. Ha ido evolucionando, desde construirlo con material reciclado hasta el actual con 12 tubos de colores. BaFi tiene tres colores (rojo, verde y azul) porque el cubo es tridimensional y para visualizar las rectas que son paralelas. Si observamos un hexágono formado con BaFi, todos los bastoncillos del mismo color son paralelos. Lo podemos girar para ver paralelas en todas las direcciones.

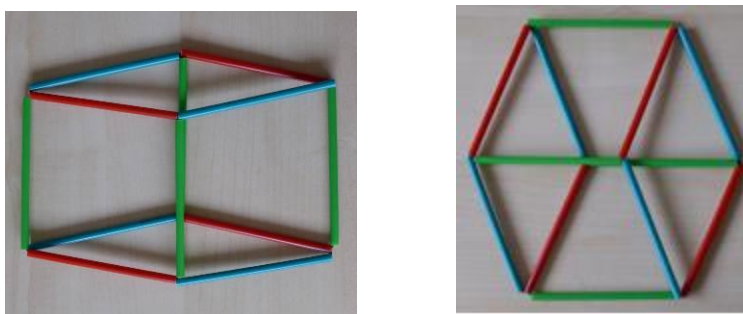


Figura 6. Hexágonos irregulares con BaFi

Los tubos o bastoncillos miden 10 cm, para que al formar un cubo se pueda visualizar un litro, que es la capacidad del cubo = 1 dm^3 . Para que vivencien el BaFi como un litro, puede ayudar un tetrabrik de 1litro. Primero lo medimos: $5 \times 10 \times 20 \text{ cm}$, y cortamos con tijeras la mitad. De esta manera comprobamos que es lo mismo $10 \times 10 \times 10 \text{ cm}$. Incluso aritméticamente en ambos casos son $1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$



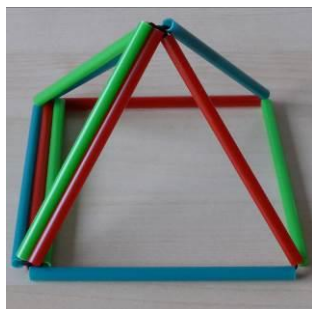
Además de las medidas de capacidad se pueden trabajar medidas de longitud, doblando a BaFi hasta conseguir distancias de: 1dm, 2dm o 3dm. Es importante que los alumnos tengan el decímetro asimilado, para poder hacer cálculos aproximados de medidas.



Figura 7. La distancia que se mide con este BaFi es de 3 dm o 30 cm

Conviene que al formar una figura la giren para verla en otras posiciones. Irán descubriendo poco a poco las distintas figuras. La contemplarán fijándose en sus distintos elementos, que irán aprendiendo progresivamente: aristas, vértices, lados y ángulos.

Para formar las figuras existen varias posibilidades. Será muy importante que verbalicen cómo han llegado a construir las figuras. Un ejemplo es la pirámide de base cuadrada. Fue la alumna Paula Toledano, cuando estaba en 4EP, la que descubrió tres formas distintas de construirla.



1. A partir del hexágono, uniendo dos vértices alternos para superponer dos triángulos. A continuación, unir otros dos vértices alternos para superponer tres triángulos. El centro del hexágono será la cúspide de la pirámide.
2. Partiendo del rombo y separando dos vértices que están superpuestos.
3. Con el trapecio, al unir un vértice del lado mayor con otro del lado menor. Posteriormente separar los vértices que están superpuestos.

Figura 8. Pirámide cuadrangular

Desde el año 2010, en que se publicó mi primer artículo, hay nuevas figuras: Hexaedro irregular. Tetrápodo. Ángulo, ángulos complementarios y suplementarios. Segmentos perpendiculares, y secantes. Letras: b, d, p, q, y, i, x, z, l.

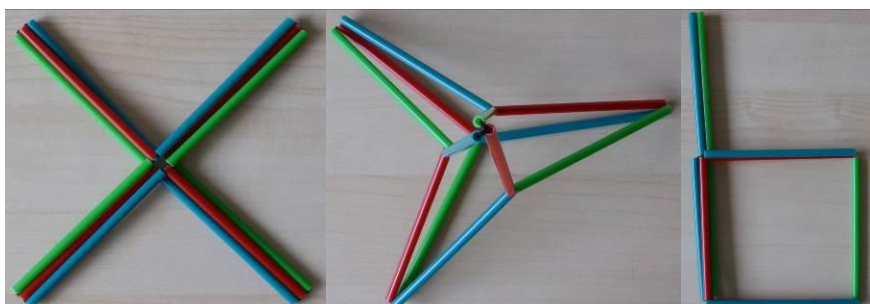


Figura 9. Segmentos perpendiculares, tetrápodo y letra b

También he profundizado en “aprender a ver” un hexágono. A simple vista vemos los 3 rombos en los que se descompone el hexágono. Pero se pueden contabilizar 6 rombos si se solapan parcialmente. Lo mismo ocurre con el número de trapecios que hay en un hexágono. Primero vemos dos trapecios en los que se descompone. Pero se pueden identificar seis, si se solapan. Para visualizarlo conviene recortar un rombo o trapecio de papel y desplazarlo. Ver el siguiente dibujo:

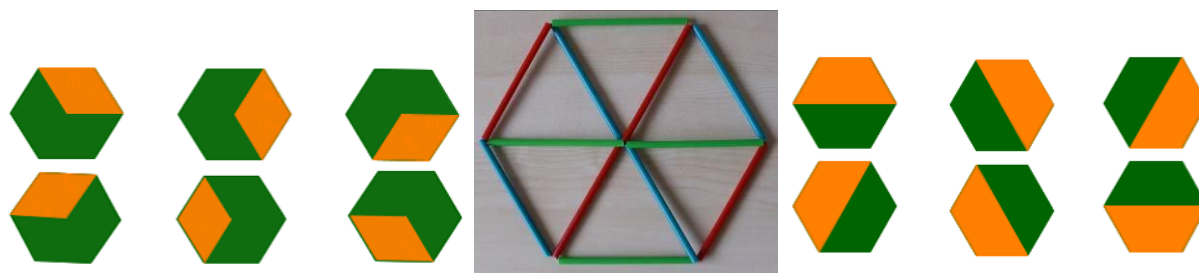


Figura 10. Representación de los rombos y trapecios que hay en un hexágono regular

BaFi ayuda a entender la diferencia entre hexaedro regular, o cubo, y hexaedros irregulares. Me he dado cuenta que muchas veces la dificultad está en ver los ángulos. Los lados es fácil comprobar que son iguales. En el caso del hexaedro irregular de la imagen, se ve como es obtuso el ángulo formado por las dos aristas que llegan a cada cúspide. Y son agudos los ángulos formados por dos aristas que llegan a la misma cúspide.

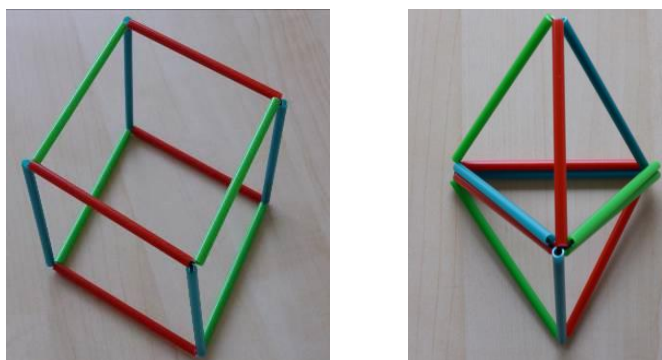


Figura 11. Hexaedro regular o cubo. Y hexaedro irregular

Hay que insistir mucho en que el término “ángulo” corresponde a la abertura y no a longitud del lado. De hecho, cuando se muestra el mismo ángulo con BaFis de distintos tamaños, la mayoría dice que el primero es mayor, sin darse cuenta que ambos tienen la misma abertura.

En el proceso de investigación el alumnado observará como en algunas de las figuras caben cosas dentro y por tanto son objetos de tres dimensiones o cuerpos (cubo, hexaedro irregular, tetraedro, pirámide cuadrangular y tetrápodo). En otras no caben cosas dentro, pero las podemos colorear, por lo que son objetos de dos dimensiones o superficies (hexágono, trapecio, rombo, triángulo, rectángulo, romboide, rombo, cuadrado y ángulo). Y por último aquellas que no son ni cuerpos ni superficies, pues tienen una dimensión y las podemos trazar (segmento, secantes y perpendiculares).

Otro avance importante fue la fabricación de cubos BaFi, con aristas de un metro. Nos servirán para trabajar medidas de longitud (m), superficie (m^2) y volumen (m^3). Una experiencia significativa es preguntar: ¿cuántos litros caben en un cubo de medio metro de arista? La contestación de la mayoría del alumnado es afirmar que contiene 500 litros, sin darse cuenta de su error.

El origen de esta equivocación se encuentra en que el alumnado deduce que será la mitad de la capacidad de un cubo de un metro de arista. Si bien es cierto que el alumnado domina, que en un cubo de un metro de arista caben 1000 litros, en cambio fallan al creer que la mitad de la longitud implica la mitad del volumen total. Este error se puede evitar si disponemos de un cubo BaFi de un metro de



arista, e introducimos dentro otro cubo BaFi de medio metro. El alumnado se dará cuenta al instante que su volumen es mucho menor. Entonces es fácil llegar a la solución: el volumen es la octava parte, donde caben 120 litros.

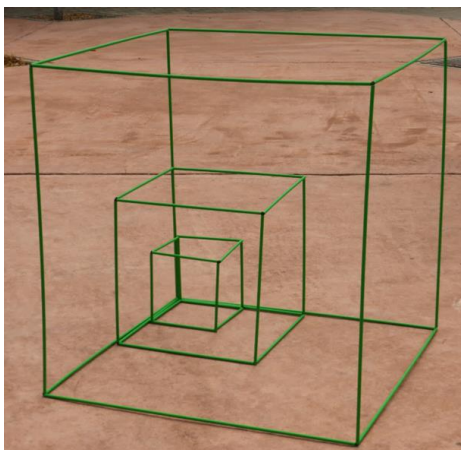


Figura 12. Cubos de 1 metro de arista, de medio metro y de cuarto metro

5. Otras figuras flexibles como BaFi

5.1. Bpirámide pentagonal

Además de cubos BaFi, hemos construido bpirámides pentagonales flexibles, dejando dos hilos salientes en las cúspides para que puedan rotar. Y para que comprueben, haciendo la pirámide pentagonal, que hay tres distancias distintas de menor a mayor: la altura de la pirámide, la altura de la cara de la pirámide y la longitud de la arista. No son datos para memorizar, sino para ver.

Otras ventajas de la bpirámide, es que girándolo vemos el cuerpo en revolución, e incluso segmentos que en realidad no existen. Esto les apasiona.

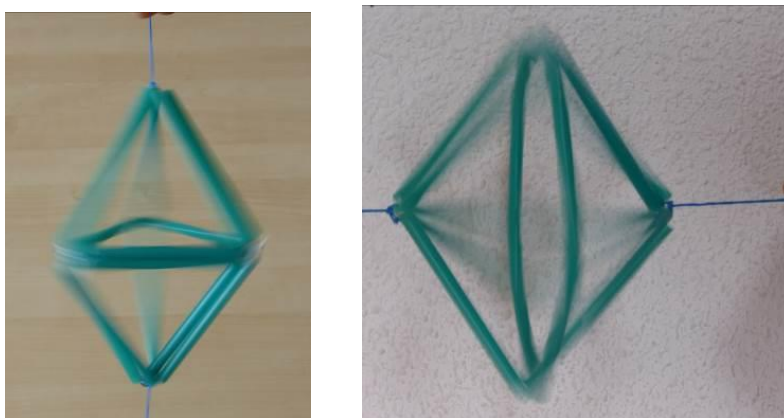


Figura 13. Hexaedro irregular y bpirámide pentagonal en revolución viéndose dos conos y una circunferencia

5.2. Cuerpos platónicos

De los cuerpos platónicos el más destacado es el cubo. Merecen mención aparte, por sus posibilidades, el octaedro y el icosaedro.

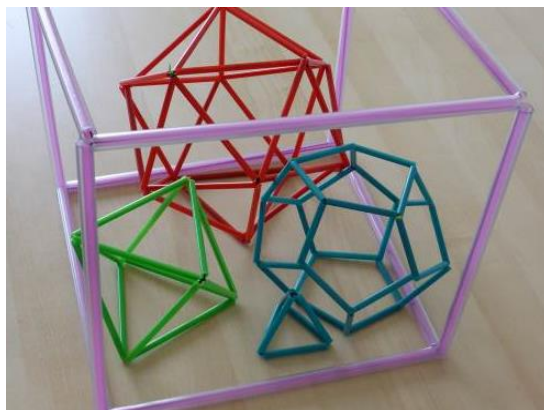


Figura 14. Cuerpos platónicos flexibles

5.2.1. Octaedro

Al manipularlo se transforma en pirámide cuadrada, rombo y triángulo equilátero.

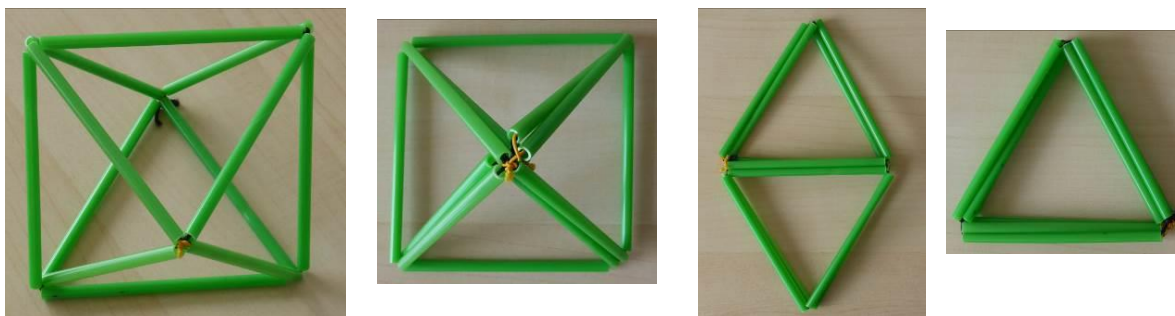


Figura 15. Transformaciones a partir de un octaedro flexible

5.2.2. Icosaedro

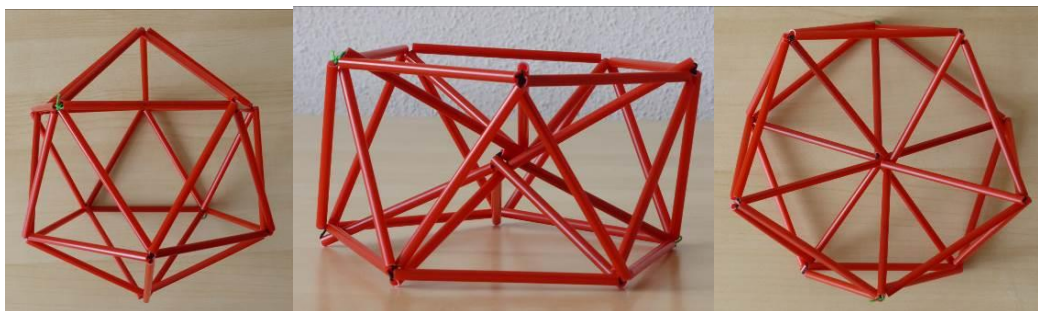


Figura 16. Icosaedro flexible y dos vistas del antiprisma pentagonal

5.3. Pirámides cuadradas

Las pirámides cuadradas flexibles, al manipularlas, se transforman primero en cuadriláteros y luego en los tres tipos de triángulos clasificados por sus lados. Para que se visualice mejor, los tubos con las mismas distancias tienen el mismo color.

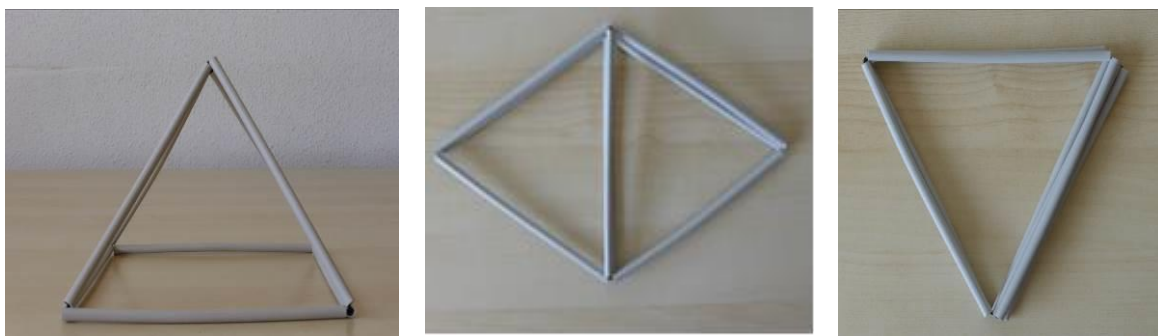


Figura 17. Aristas de igual longitud. Se transforma la pirámide en un triángulo equilátero

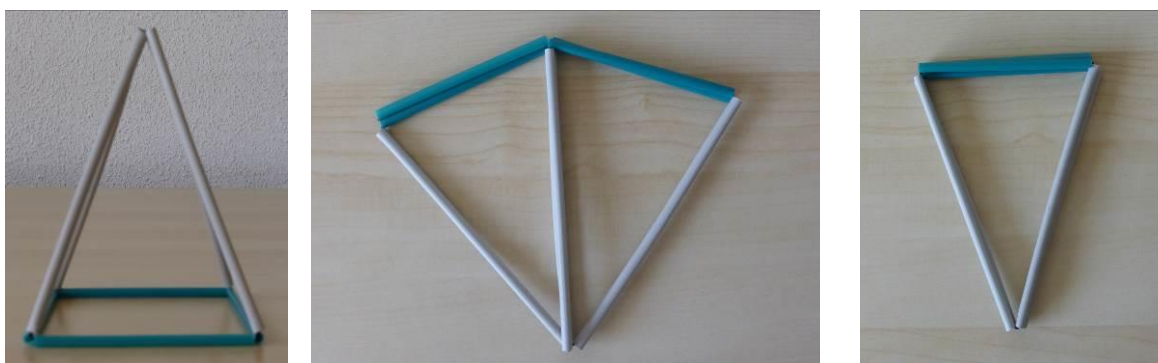


Figura 18. Aristas de dos longitudes distintas. Se transforma la pirámide en un triángulo isósceles

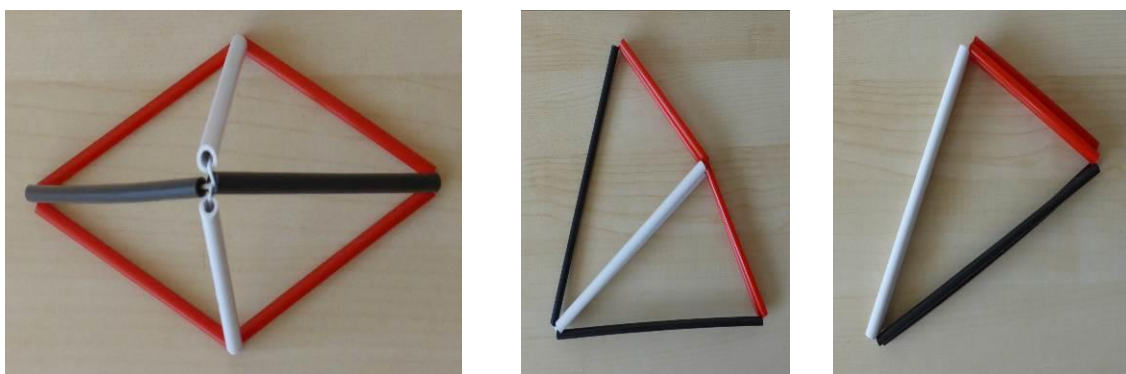


Figura 19. Aristas de tres longitudes distintas. Se transforma la pirámide en un triángulo escaleno

Son muchas las anécdotas que se podrían contar. En el CEIP Los Tarajales, cuando enseñé el elefante de Javier, la alumna Daniela dijo: “pues yo veo un pez, con su cuerpo y sus dos aletas”. En la misma clase de 4º de Primaria se inventaron nuevas figuras, como la cifra 4, o una torre Eiffel.

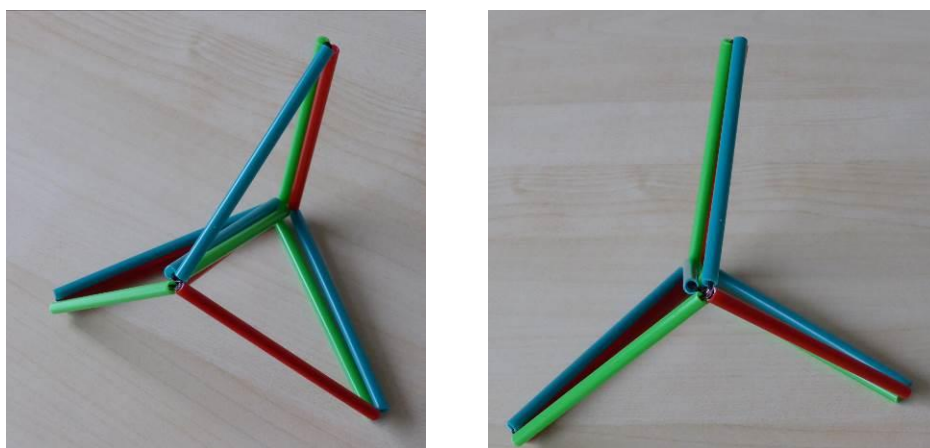


Figura 20. Imágenes de la figura de tres triángulos equiláteros

6. Consideraciones finales

Hay un comentario escrito en la web de BaFi (www.cubodidacticobafi.com) el 10 de mayo de 2015, por Genaro Morales, maestro del CEIP Monseñor Socorro Lantigua, de Teror, que dice: “A nivel personal es una maravilla lo que aprendo con él. Pero son mis alumnos los que tienen "BAFIMANÍA" les encanta jugar con él, no lo consideran trabajar. Exploran, descubren, discuten... es una sorpresa constante. Hablan de cuerpos geométricos, caras, aristas, vértices, ángulos, tipos de rectas, letras... de todo lo que van descubriendo”.

En definitiva, BaFi ayuda enormemente a aprender a ver. Es un material muy enriquecedor para todas las edades y todas las capacidades. BaFi favorece la estimulación mental, la creatividad y la motricidad fina.

Hay que modificar el orden tradicional de la enseñanza-aprendizaje (1D, 2D, 3D). Adoptando la secuencia 3D, 2D, 1D, nuestro alumnado será competente en geometría, además de visualizar con precisión longitudes, superficies y capacidades.

Bibliografía

Teixidor Cadenas, E. (2010). Pajifiguri: un material manipulativo y cuento interactivo. *Números* [en línea], 74. Julio 2010, pág. 75-92. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/74/Experaula_01.pdf

Esperanza Teixidor Cadenas. Creadora y divulgadora del cubo flexible BaFi. Las Palmas de Gran Canaria. Licenciada en Pedagogía. Diplomada en Magisterio en la Especialidad de Ciencias. Máster en asesoramiento educativo familiar.
cubodidacticobafi@gmail.com

