

Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria

Alberto Zapatera Llinares (Universidad Cardenal Herrera-CEU. España)

Fecha de recepción: 15 de noviembre de 2017

Fecha de aceptación: 7 de febrero de 2018

Resumen

Tradicionalmente se ha pospuesto el estudio del álgebra a la Educación Secundaria, pero investigaciones en didáctica de las matemáticas han demostrado que el pensamiento algebraico puede ser desarrollado desde edades tempranas. En los últimos años han surgido corrientes como la Early-Algebra que proponen la introducción del álgebra desde los primeros años de escolarización y consideran que una de las vías más eficaces para ello es la generalización de patrones. En este artículo, tras estudiar el proceso de generalización de patrones, se presenta una secuencia de tareas a desarrollar en Educación Infantil y en Educación Primaria. El objetivo de este trabajo es animar a los maestros a introducir el pensamiento algebraico en sus alumnos y proporcionarles una herramienta que puede servirles de referencia en su práctica docente.

Palabras clave

Pensamiento algebraico, generalización de patrones, práctica docente, Early-Algebra, Educación Infantil y Primaria

Title

Introduction of algebraic thinking through the generalization of patterns. A sequence of tasks for Pre-school and Primary Education

Abstract

Traditionally the study of algebra has been postponed to Secondary, but research in didactic of mathematics has shown that algebraic thinking can be developed from early age. In recent years have been emerging currents such as Early-Algebra that propose the introduction of algebra from the first years of schooling and consider that one of the most effective ways to do this is the generalization of patterns. In this article, after studying the process of generalization of patterns, is presented a sequence of tasks to be developed in Pre-school and Primary Education. The aim of this work is to encourage teachers to introduce algebraic thinking in their students and provide them a tool that can serve as a reference in their teaching practice

Keywords

Algebraic thinking, generalization of patterns, teaching practice, Early-Algebra, Pre-school and Primary Education

1. Introducción

La enseñanza tradicional del álgebra ha recibido numerosas críticas debido al fracaso de muchos estudiantes a los que el aprendizaje del álgebra les resulta muy difícil y experimentan tal rechazo al álgebra que lo trasladan al conjunto de las matemáticas (Kaput, 2000, Kieran, 2004). Por eso, ya a finales de los sesenta, Kieran (1989, p. 163) advirtió que “*un área muy necesitada de la investigación matemática es el pensamiento algebraico*”.



Según la teoría piagetiana, este fracaso se debía a que los alumnos de Educación Primaria no están capacitados para pasar del pensamiento operacional concreto al pensamiento operacional formal, por lo que recomendaba posponer las tareas algebraicas a la Educación Secundaria. Sin embargo, Mason (1991) observó que los estudiantes llegaban a la escuela con capacidades naturales de generalización y que potenciando estas capacidades se podía desarrollar el pensamiento algebraico. Por su parte, Socas (2011) señala que el pensamiento algebraico está implícito en alumnos de Educación Primaria.

Otros investigadores también observaron que los estudiantes de los primeros cursos podían considerar las operaciones aritméticas como funciones, elaborar y simbolizar algebraicamente conjeturas sobre relaciones aritméticas básicas, usar representaciones algebraicas para resolver problemas, utilizar letras para representar cantidades... y propusieron introducir y fomentar el pensamiento algebraico desde los primeros años de escolarización con tareas que *“incluyan las relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción”* (Kieran, 2004, p.149). Esta forma de pensar, caracterizada como algebraica, es el corazón de las matemáticas (Mason, 1999) y puede ser desarrollada por niños de temprana edad (Kaput y Blanton, 2001; Carpenter, Franke y Levi, 2003).

A partir de estas ideas surgieron dos nuevas corrientes, la preálgebra y la Early-Algebra, que promueven iniciar el pensamiento algebraico en la Educación Primaria con actividades que desarrollen la habilidad para generalizar y recomiendan el trabajo con patrones y el estudio de sus regularidades.

Los Principios y Estándares del NCTM (2000) recogieron estas ideas al establecer que una de las formas de desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes es la formalización de patrones, funciones y generalizaciones. Para ello proponen que los programas de matemáticas en los primeros años de escolarización se orienten a capacitar a los estudiantes para comprender patrones, relaciones y funciones.

Siguiendo estas indicaciones, en la última década muchos países han revisado su currículo de matemáticas remarcando la importancia de los patrones en el aprendizaje del álgebra. De esta manera, el currículo de Ontario (Canadá) introduce el pensamiento algebraico en torno a dos “grandes ideas”: (1) patrones y relaciones y (2) expresiones e igualdades. El currículo australiano introduce los conceptos de variable y función mediante el reconocimiento de patrones y su generalización. El costarricense propone la generalización de la aritmética y de los patrones y considera las funciones como parte central de las matemáticas. Los de Corea y Singapur proponen el desarrollo del pensamiento algebraico por medio de la generalización de patrones, la resolución de problemas y el conocimiento de funciones. Y el chileno pretende que los estudiantes expliquen y describan relaciones entre números, formas, objetos y conceptos y que identifiquen, extiendan y expresen patrones para facilitar el desarrollo del pensamiento algebraico.

Aunque la LOMCE (2013) no incluye referencias específicas al álgebra, el currículo básico español de la Educación Primaria (2014) introduce el pensamiento algebraico al establecer de forma explícita el trabajo con patrones en el siguiente criterio de evaluación de etapa: *“Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones”* (p. 40). Este criterio se concreta en dos estándares de aprendizaje evaluables: *“identificar patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales”* y *“realizar predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen”* (p. 40)

Por tanto, la generalización de patrones está considerada como una forma eficaz para introducir el pensamiento algebraico en la escuela, por lo que las matemáticas en la Educación Primaria e Infantil deben incluir la exploración de patrones para que los estudiantes sean capaces de descubrir, extender y analizar las regularidades y expresarlas de forma verbal o simbólica (NCTM, 2000; Molina, 2006; Radford, 2014; Zapatera, 2015).

2. Álgebra en la Educación Infantil y Primaria

Ante la propuesta del NCTM (2000) de desarrollar el bloque de álgebra desde la Educación Infantil, los investigadores se plantearon si los niños podían trabajar con álgebra y qué tareas podían realizar.

Para contestar la primera pregunta, es decir, si los niños podían trabajar con álgebra, varias investigaciones (Becker y Rivera, 2008) describen los logros de los alumnos de Educación Primaria al trabajar con tareas del pensamiento algebraico elemental y afirman que unas “matemáticas algebrizadas” preparan mejor a los alumnos ya que promueven un mayor grado de generalidad en su pensamiento y, además, argumentan que muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria se deben a la introducción tardía del álgebra.

Históricamente la Educación Primaria se ha centrado prioritariamente en la aritmética, retrasando la introducción del álgebra por concepciones erróneas sobre la naturaleza de la aritmética y del álgebra y por la falta de capacidad de los niños. Sin embargo, Carraher, Schliemann y Brizuela (2000) sostienen que la aritmética es algebraica porque proporciona elementos para construir y expresar generalizaciones y afirman que los estudiantes de Educación Primaria son capaces de entender las relaciones funcionales y de razonar sobre las variables de los problemas.

Butto y Rojano (2004) consideran que alcanzar la formalización algebraica y alcanzar el pensamiento algebraico son actividades cognitivas distintas y que aunque la formalización algebraica requiere un proceso largo y complejo, el acceso al pensamiento algebraico es factible en edades tempranas.

Como respuesta a la segunda pregunta, es decir, qué tareas pueden realizar los alumnos para desarrollar su pensamiento algebraico, la preálgebra y la Early-Algebra consideran necesario iniciar el pensamiento algebraico con actividades que involucren procesos matemáticos como la identificación de las relaciones entre distintos elementos de las estructuras matemáticas y la habilidad para generalizar y representar de formas diferentes dichas relaciones.

Aunque las dos propuestas son enfoques relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas antes de la enseñanza formal del álgebra, se diferencian en su finalidad y el momento de introducción:

- La preálgebra intenta suavizar la transición entre la aritmética y el álgebra y reducir las dificultades que sufren los alumnos en el aprendizaje del álgebra y la Early-Algebra tiene unos objetivos más amplios e intenta introducir modos del pensamiento algebraico en el aprendizaje-enseñanza de las matemáticas.
- La preálgebra propone introducir el álgebra como una aritmética generalizada en los dos últimos cursos de la Educación Primaria y la Early-Algebra propone introducir el álgebra desde los primeros cursos de escolarización integrada en los otros bloques de contenidos.



Ambas corrientes coinciden en que no es preciso aumentar los contenidos sino tratarlos con más profundidad resaltando las ideas de generalización, estructura y relaciones y en que el razonamiento simbólico no se limita al razonamiento con notación algebraica sino que debe incluir el uso del lenguaje natural, las tablas y los gráficos.

Este trabajo se enmarca dentro del enfoque Early-Algebra que se fundamenta en un cambio curricular en el que el álgebra se introduce desde los primeros años de escolarización como una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones y estructuras matemáticas (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Kaput, 2000; Blanton y Kaput, 2005). La Early-Algebra plantea que las experiencias para construir y expresar generalizaciones matemáticas sean un proceso uniforme que empieza en los primeros cursos de la escolarización. Además, anima a los docentes a fomentar la observación y la descripción de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y a propiciar un ambiente escolar en el que se valore que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten y comprueben ideas (Blanton y Kaput, 2005).

Investigadores sobre los distintos enfoques de la Early-Algebra (NCTM, 2000; Molina, 2006), señalan la importancia de la generalización de patrones geométricos y numéricos, sus relaciones y modos de representación, por lo que desde edades tempranas se deben crear ambientes de instrucción para explicitar el pensamiento algebraico implícito en los estudiantes (Carpenter, Franke y Levi, 2003). El trabajo con patrones y el estudio de la generalización de sus regularidades y propiedades pueden contribuir de forma eficaz a la creación de estos ambientes.

3. Generalización de patrones

Numerosos investigadores de didáctica de las matemáticas han definido de diferentes formas la generalización: Pólya (1954) considera que generalizar es “*pasar de un objeto a una clase que contiene el objeto*” (p. 12), para Harel y Tall (1991) generalizar es “*aplicar un argumento dado en un contexto más amplio*” (p. 38) y para Dreyfus (1991) es “*derivar o inducir desde lo particular, identificando lo que es común y extendiendo dominios de validez para incluir un conjunto mayor de casos*” (p. 35). En otras palabras, generalizar consiste en pasar de lo particular a lo general y en ver lo general en lo particular

En el caso concreto de la generalización de patrones, el proceso implica tres acciones: darse cuenta de una propiedad común, generalizar la propiedad común a todos los términos de la secuencia y usar la propiedad común para determinar una regla que permita hallar cualquier término de la secuencia (Dreyfus, 1991). Los problemas de generalización de patrones presentan mediante figuras una situación que proporciona los primeros términos $f(1), f(2), f(3)...$ de una progresión aritmética y se pide calcular el valor $f(n)$ para n pequeño y para n grande, y obtener la regla general (Callejo y Zapatera, 2014). Es decir, se piden tres tipos de tareas: (1) tareas de generalización cercana (Stacey, 1989), en las que el estudiante debe buscar términos pequeños que se puede obtener mediante recuento, haciendo un dibujo o una tabla, (2) tareas de generalización lejana (Stacey, 1989), en las que debe calcular términos grandes que requieren la identificación de un patrón o pauta y (3) obtención y expresión de una regla general que permita calcular el número de elementos de cualquier término de la sucesión y que está determinada por una función lineal o afín. Algunos problemas incluyen también invertir el proceso para hallar la posición de un término de la secuencia a partir del número de elementos de dicho término.

Zapatera y Callejo (2011) siguiendo las orientaciones de Stacey (1989) y García Cruz (1998) clasificaron las estrategias de resolución de problemas de generalización de patrones lineales en tres tipos: (1) estrategias aditivas, en las que el estudiante observa el patrón de crecimiento y realiza el

recuento dibujando la figura o sumando el patrón de crecimiento hasta el término requerido, partiendo de la primera figura o de una figura cualquiera, (2) estrategias funcionales, en las que el estudiante relaciona la posición de la figura y el número de elementos de ésta mediante una función afín $f(n) = a \cdot n + b$ ($b \neq 0$), donde a es el patrón de crecimiento y b es el término independiente que se mantiene constante; estas funciones pueden ser locales, si la relación se aplica a una determinada figura, y global, si la relación se aplica a una figura cualquiera, y (3) estrategias proporcionales, en las que el estudiante halla el número de elementos mediante razonamientos proporcionales en base a una función lineal $f(n) = a \cdot n$, donde no se considera el término independiente que se mantiene constante (Figura 1).

Estrategias	E. aditivas	Dibujo	
		Recuento iterativo	$\rightarrow f(n) = f(1) + (n-1) \cdot a$
		Recuento recursivo	$\rightarrow f(n) = f(p) + (n-p) \cdot a$
	E. funcionales	Función local	$\rightarrow f(n) = a \cdot n + b, n$ determinado
		Función global	$\rightarrow f(n) = a \cdot n + b, n$ indeterminado
	E. proporcionales		$\rightarrow f(n) = a \cdot n$

Figura 1. Estrategias resolución de problemas de generalización de patrones

Investigaciones centradas en cómo resuelven tareas de generalización de patrones lineales estudiantes de Educación Primaria (Radford, 2011; Rivera, 2010; Warren, 2005; Zapatera y Callejo, 2013) han señalado la importancia de tres elementos: las estructuras espacial y numérica, la relación funcional y el proceso inverso. Para continuar una sucesión, los estudiantes necesitan descubrir una regularidad que relacione las estructura espacial, que emerge de la distribución de los elementos, y la estructura numérica, que emerge del número de elementos de cada figura (Radford, 2011; Rivera, 2010); para identificar un término lejano, los estudiantes deben establecer una relación funcional que asocie el término de la figura y la cantidad de elementos que la forman (Radford, 2011; Rivera, 2010; Warren, 2005); y para identificar la posición de una figura, conocido el número de elementos que la forman, el estudiante debe invertir el proceso y establecer una relación funcional inversa a la anterior (Warren, 2005).

4. Clases de patrones

Castro, Cañadas y Molina (2010) definen patrón como “lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse” (p. 57). También se entiende como patrón a las sucesiones de elementos que se construyen siguiendo una determinada regla; los estudiantes, a partir de casos particulares, han de deducir esa regla para generalizar el patrón y continuar la sucesión.

Los estudiantes desarrollan la comprensión de patrones y sus relaciones a través de experiencias muy variadas con personas, acciones, sonidos, objetos, figuras geométricas, símbolos, letras, números... (Figura 2) (Billingngs, Tiedt y Slater, 2008; Warren y Cooper, 2006)



Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria

A. Zapatera Llinares



Figura 2. Experiencias con patrones (Fuente: Elaboración propia)

Las reglas de formación de patrones pueden ser de repetición o de recurrencia y sirven para clasificar los patrones: en los patrones de repetición los elementos se presentan de forma periódica y en los patrones de recurrencia cada término de la sucesión se expresa en función de los anteriores.

En los patrones de repetición se repiten los elementos en función de uno o más atributos (color, forma, tamaño, orientación...). Son los patrones más fáciles de identificar, por lo que están indicados en Educación Infantil y en los primeros cursos de Educación Primaria. La complejidad de los patrones de repetición aumenta al utilizar más de un atributo o al utilizar atributos menos evidentes (Figura 3).

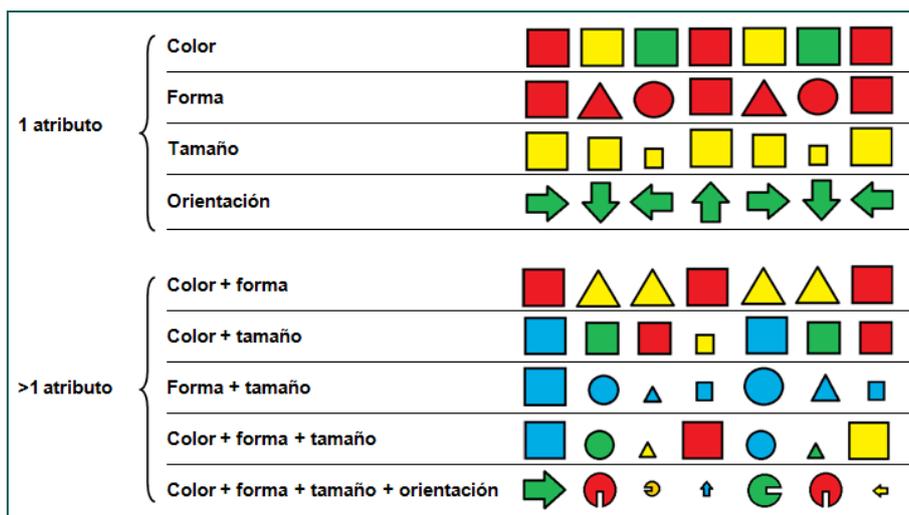


Figura 3. Patrones de repetición con uno o más atributos (Fuente: Elaboración propia)

En los patrones recurrentes el número de elementos varía de un término a otro; el número de elementos aumenta, o disminuye, de forma progresiva a lo largo de los términos siguiendo una

determinada regla de formación. Los patrones recurrentes pueden ser geométricos o numéricos y tienen un nivel de dificultad mayor que los patrones repetitivos, por lo que están indicados para los cursos medios y altos de Educación Primaria. La dificultad de los patrones recurrentes se incrementa aumentando el número de elementos de cada término y la complejidad de la regla de formación (Figura 4).

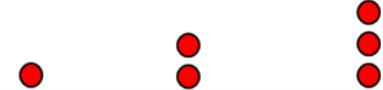
Patrón geométrico	Patrón numérico	Regla general
	1, 2, 3,...	$f(n) = n$
	2, 4, 6,...	$f(n) = 2n$
	4, 7, 10,...	$f(n) = 1 + 3n$
	5, 9, 13,...	$f(n) = 1 + 4n$
	8, 10, 12, ... (verde) 9, 12, 15, ... (total)	$f(n) = 5 + 3n$ $f(n) = 6 + 3n$
	6, 10, 14, ... (verde) 7, 12, 17, ... (total)	$f(n) = 2 + 4n$ $f(n) = 3 + 4n$

Figura 4. Patrones recurrentes (Fuente: Elaboración propia)

5. Secuencia de tareas con patrones en Educación Infantil y Primaria

A continuación, se propone una secuencia graduada de tareas con patrones a realizar en Educación Infantil y Educación Primaria:

- Para los primeros niveles, Educación Infantil y 1º y 2º de Educación Primaria, se proponen tareas con patrones de repetición y el objetivo de aprendizaje es la formalización de patrones.
- Para los niveles superiores, 3º, 4º, 5º y 6º de Educación Primaria, se proponen tareas con patrones recurrentes y el objetivo de aprendizaje es la generalización de patrones.

El estudio de los patrones se realiza en estas etapas de forma espiral (Bruner, 1960): se introduce un concepto adaptado a las capacidades del estudiante y se trabaja con él de forma continua durante el mismo curso y en cursos posteriores, aumentando gradualmente su complejidad y abstracción. Con el currículo en espiral se refuerzan los conocimientos anteriores y los nuevos conocimientos se sustentan en ellos, manteniendo la jerarquía y las relaciones de los contenidos (Tabla 1).

Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria

A. Zapatera Llinares

Patrón	Objetivo	Contenido	Ed. Infantil	Ed. Primaria					
				1º	2º	3º	4º	5º	6º
Repetitivo	Formalización de patrones	Un atributo	X	X	X				
		Más de un atributo		X	X				
		Completar secuencias			X				
Recurrente	Generalización de patrones	G. cercana y lejana				X	X	X	X
		Regla general					X	X	X
		Proceso inverso						X	X
		Expresión algebraica							X

Tabla 1. Carácter espiral del trabajo con patrones

Los patrones repetitivos se trabajan en Educación Infantil y en 1º y 2º de Educación Primaria. El objetivo en estos cursos es la formalización de patrones. Para ello, en Educación Infantil se trabajan de forma continua y permanente los patrones repetitivos con un solo atributo; en 1º de Primaria se continúa con un solo atributo y se añaden patrones con dos o más atributos; en 2º de Primaria además de los contenidos anteriores, se incorporan tareas en las que se ha de completar secuencias de patrones.

Los patrones recurrentes se estudian a partir del 3º curso de Educación de Primaria y tienen como objetivo la comprensión de la generalización de patrones. En 3º de Primaria se focaliza en la generalización cercana y lejana, en concreto en el número de elementos que aumenta en cada figura y en los elementos que permanecen constantes, es decir, en el patrón de crecimiento y en el término independiente; en 4º de Primaria se añade la expresión verbal y escrita de la regla general a partir de término independiente y del patrón de crecimiento estudiados en el curso anterior; en 5º de Primaria se incorpora, a los contenidos anteriores, la reversibilidad del proceso, es decir, hallar el término de la figura dado su número de elementos; y en el 6º curso se inicia la expresión simbólica o algebraica de la regla general, de esta manera, en el último curso se acumulan todos los contenidos de la generalización de patrones: generalización cercana y lejana, regla general, proceso inverso y expresión algebraica.

5.1. Educación Infantil

El objetivo del estudio de los patrones en Educación Infantil es reconocer, identificar, describir y extender patrones de repetición con diferentes materiales (bloques lógicos, palillos, botones,...), personas, acciones, sonidos, símbolos, letras, números,...

Para desarrollar la comprensión de patrones el maestro, además de proporcionar a los estudiantes experiencias continuas con patrones repetitivos, debe animarles a explorarlos y a extenderlos y a descubrir la regla de formación.

En la siguiente tarea, “Gusanos de colores”, los estudiantes crean patrones formando los anillos de un gusano con bloques de colores (Figura 5).

Actividad: Gusanos de colores

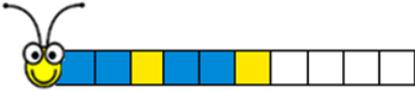
Los gusanos crecen y crecen formando nuevos anillos de colores

1. Forma con bloques de colores los anillos de un gusano



- ¿Qué color viene ahora? ¿Cómo lo sabes?
- Colorea los anillos que faltan
- ¿Qué anillos se repiten? Márcalos con un círculo

2. Repite la actividad con el segundo gusano



- Colorea los anillos que faltan
- Marca con un círculo el núcleo del patrón
- Describe el núcleo del patrón

3. Crea tus propios gusanos



Figura 5. Tarea “Gusanos de colores”.
Educación Infantil (Fuente: Elaboración propia)

Para aumentar el nivel de complejidad del patrón y como tareas de ampliación se pueden trabajar con otros atributos como la forma o el tamaño de los anillos.

Tareas relacionadas:

- Patrones con niños: los niños de Educación Infantil son muy receptivos a participar en la formación de patrones en los que participen ellos mismos.
- Patrones con objetos manipulables: bloques lógicos, cuentas de collares, tarjetas, dibujos, botones, fichas, dados, pinturas...
- Patrones con sonidos: se pueden formar patrones muy variados con sonidos mediante canciones, rimas, juegos, adivinanzas...

5.2. Educación Primaria

1º Curso

Los estudiantes de 1º curso de Educación Primaria son capaces de identificar el núcleo de un patrón con dos o más atributos sencillos a la vez y extenderlo adecuadamente.

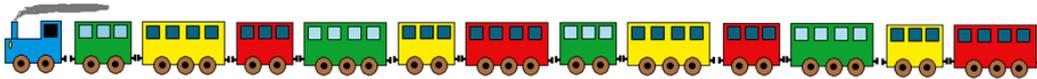
En este curso se inicia la representación simbólica del núcleo del patrón, mediante letras y números, mediante la inicial de cada atributo o un número que lo defina, y completan la secuencia total repitiendo varias veces el núcleo.

En la tarea seleccionada para este curso, “Los vagones del tren”, los estudiantes deben explorar una misma secuencia y obtener el núcleo del patrón en función de diferentes atributos (Figura 6).



Actividad: Los vagones del tren

Fíjate cómo los vagones del tren cambian de color y de tamaño.



1. Si consideras el color (amarillo, rojo y verde),
 - Rodea con un círculo el núcleo del patrón
 - Describe el núcleo
 - ¿Cuántos elementos tiene?
2. Haz lo mismo pero con el tamaño (pequeño y grande),
 - Rodea con un círculo el patrón
 - Describe el núcleo
 - ¿Cuántos elementos tiene?
3. Ahora más difícil: si consideras los dos atributos a la vez (color y tamaño)
 - ¿Cuál es el núcleo del patrón?
 - ¿Cuántos elementos tiene?
 - Alarga el tren dibujando más vagones

Figura 6. Tarea “Los vagones del tren”.
1º curso de Educación Primaria (Fuente: Elaboración propia)

Para los estudiantes más avanzados se puede aumentar la complejidad del patrón incluyendo más atributos; por ejemplo, en la tarea de “Los vagones del tren” se puede incluir como tercer atributo el color de los cristales de los vagones (claros y oscuros).

Tareas relacionadas

- Patrones con bloques lógicos: los bloques lógicos de Dienes proporcionan innumerables oportunidades para realizar este tipo de tareas, ya que cada una de las 48 piezas están definidas por cuatro atributos: color, forma, tamaño y grosor.
- Patrones con letras: a partir del núcleo se completa la secuencia y a partir de la secuencia se obtiene el núcleo.
- Patrones con números: los estudiantes pueden repetir secuencias numéricas que siguen una determinada regla de formación y descubrir el núcleo.

2º Curso

Los estudiantes de 2º de Educación Primaria, además de reconocer el núcleo del patrón y extenderlo, deben ser capaces de descubrir elementos ocultos y completar secuencias.

Se deben iniciar en este curso los patrones numéricos mediante secuencias numéricas que sigan una determinada pauta (de dos en dos, de tres en tres...) y se debe afianzar la representación simbólica de los elementos del patrón mediante letras o números.

En la siguiente tarea, “Las nubes de humo”, los estudiantes deben completar los colores de los elementos que faltan y representarlos simbólicamente (Figura 7).

Actividad: Las nubes de humo

Una nube de humo tapa parte del cuerpo de unos gusanos y no podemos reconocerlos, ¿o sí?

- Una nube de humo tapa a gusano
 - Colorea los cuadrados que faltan
 - Marca con un círculo el núcleo del patrón
 - Explora el significado de la secuencia: A-R-A-V
- Ahora dos nubes tapan a otro gusano
 - Colorea las figuras que faltan
 - Marca con un círculo el núcleo del patrón
 - Describe el núcleo del patrón
- Juega con tus compañeros: coloca tus nubes y descubriendo los anillos ocultos del gusano:

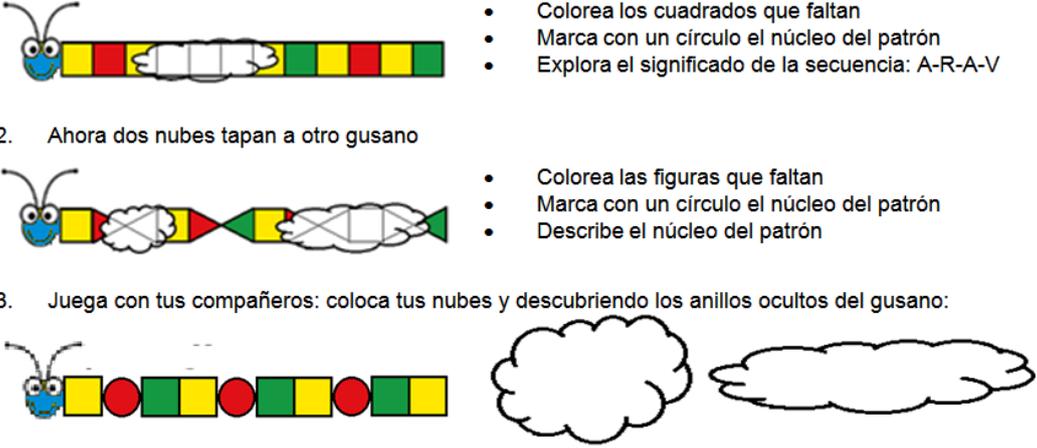


Figura 7. Tarea “Las nubes de humo”.
2º curso de Educación Primaria (Fuente: Elaboración propia)

Se puede aumentar el nivel de complejidad del patrón utilizando varios atributos (color, forma, tamaño, grosor, orientación...), ampliando el núcleo, colocando más nubes...

Tareas relacionadas:

- Patrones con objetos manipulables: bloques lógicos, cuentas de collar, tarjetas, botones, fichas, dados, pinturas,...
- Patrones con letras: los estudiantes descubren y escriben las letras que faltan en secuencias de letras con patrones repetitivos.
- Patrones numéricos: los estudiantes completan las secuencias numéricas en las que faltan determinados números.

3º Curso

En 3º curso de Educación Primaria se debe iniciar a los estudiantes en la identificación, descripción y creación de patrones recurrentes.

Es conveniente que el estudiante, cuando explore e investigue los patrones de crecimiento, explique los elementos que permanecen constantes y el número de elementos que aumenta en cada figura, es decir, el término independiente y el patrón de crecimiento o coeficiente.

En la tarea propuesta, “Las letras crecen y crecen”, se investiga sobre un patrón de crecimiento: el estudiante debe extender el patrón para términos cercanos y no muy lejanos (Figura 8).

Actividad: Las letras crecen y crecen

Observa cómo crecen las letras al colocar más y más circulitos

1. La letra T crece y crece

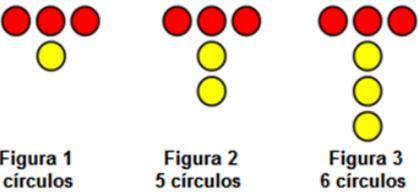


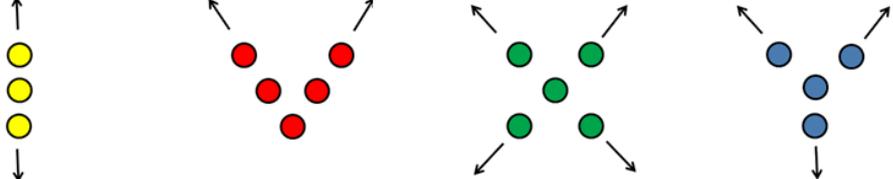
Figura 1
4 círculos

Figura 2
5 círculos

Figura 3
6 círculos

- Dibuja las figuras 4 y 5
- ¿Qué parte de la T permanece constante?
- ¿Cuántos círculos contiene?
- ¿Cuántos círculos aumentan en cada figura?
- ¿Cuántos círculos rojos tendrá la figura 10? ¿Y cuántos círculos amarillos? ¿Y en total? Explica cómo lo has averiguado

2. Explora e investiga el crecimiento de otras letras



**Figura 8. Tarea “Las letras crecen y crecen”.
3º curso de Educación Primaria (Fuente: Elaboración propia)**

Los patrones recurrentes semejantes a los de la tarea “Las letras crecen y crecen” pueden adaptar su dificultad a las capacidades de los estudiantes aumentando o disminuyendo el número de sentidos en los que crece la figura, el número de colores empleados...

Tareas relacionadas

- Patrones con fichas, botones o figuras geométricas: pueden utilizarse en este tipo de materiales para formar figuras y aumentar, o disminuir su tamaño, utilizando varios atributos.
- Patrones numéricos: los números de elementos de cada figura forman secuencias y los estudiantes pueden buscar la regla de formación y extenderlos hasta un determinado límite.
- Patrones con tablas: los estudiantes pueden realizar tablas de valores con el número de las figuras y la cantidad de elementos de cada una de ellas; la elaboración de tablas puede facilitar la obtención de la regla de formación.

4º Curso

Los estudiantes de 4º curso, además de afianzar sus conocimientos sobre la identificación, descripción y extensión de los patrones recurrentes, deben descubrir una regla de formación del patrón.

El objetivo de este curso en la exploración de patrones es expresar verbalmente y por escrito una regla general que permita hallar el número de elementos de cualquier figura; el maestro debe recomendarles que expresen la regla en función del patrón de crecimiento y del término independiente.

En la tarea seleccionada, “Jugando con palillos”, los estudiantes forman con palillos diferentes figuras que van creciendo y deben establecer una relación entre el número de la figura y los palillos utilizados (Figura 9).

Actividad: Jugando con palillos

En clase están jugando a formar con palillos figuras cada vez más grandes

1. El equipo de Aina ha formado estos cuadrados



Figura 1
4 palillos



Figura 2
7 palillos



Figura 3
10 palillos

1. Dibuja las figuras 4 y 5. ¿Cuántos palillos tienen?
2. ¿Cuántos palillos tiene la figura 20? ¿Y la 100? Explica cómo lo has hecho
3. Explica una regla para calcular el número de palillos de cualquier figura

2. Otros equipos han formado triángulos y hexágonos. Contesta las mismas cuestiones y compara los resultados



Figura 1
3 palillos



Figura 2
5 palillos



Figura 3
7 palillos



Figura 1
6 palillos



Figura 2
11 palillos



Figura 3
16 palillos

Figura 9. Tarea “Jugando con palillos”.
4º curso de Educación Primaria (Fuente: Elaboración propia)

Para adaptar la tarea a la capacidad de los estudiantes el maestro puede aumentar o disminuir la complejidad de la regla general variando el término independiente y el patrón de crecimiento y la complejidad de las figuras.

Tareas relacionadas

- Patrones numéricos: los elementos de cada figura forman series numéricas cuyo patrón de crecimiento deben explorar los estudiantes para extender las series.
- Patrones en tablas: los estudiantes deben buscar los criterios de formación en las tablas formadas por los términos de las figuras y sus elementos.
- Patrones en frisos, rosetones y mosaicos: los estudiantes se sienten muy motivados a descubrir los patrones geométricos que se repiten en frisos, rosetones y mosaicos.

5º Curso

Los estudiantes de 5º curso de Educación Primaria continúan avanzando en el estudio de los patrones recurrentes y reforzando la expresión de la regla general y empiezan a invertir el proceso.

El objetivo en este curso es invertir el proceso, es decir, hallar el término de una figura a partir del número de elementos que la forman. Este objetivo representa cierta dificultad para los estudiantes,



pero el maestro debe trabajarlo de forma progresiva de forma que los estudiantes descubran la relación suma-resta y multiplicación-división.

En la tarea recomendada para 5º curso, “Preparando el cumpleaños”, se relaciona el número de mesas con el número de sillas y, a la inversa, el número de sillas con el número de mesas (Figura 10).

Actividad: Preparando el cumpleaños

Juan ha invitado a su cumpleaños a los compañeros de su clase y sus padres le ayudan a colocar las mesas y las sillas

1. En un principio han pensado en usar mesas cuadradas y colocarlas como en las figuras



1 mesa
4 sillas



2 mesas
6 sillas



3 mesas
8 sillas

1. Dibuja 4 mesas juntas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse en 4 mesas? ¿Y en 5 mesas?

2. ¿Cuántos invitados podrían sentarse en 20 mesas? Explica cómo lo has hallado

3. Escribe una regla que permita hallar el número de invitados sabiendo el número de mesas

4. ¿Cuántas mesas necesitarán si en la clase son 26 compañeros?

2. Ahora utilizan mesas rectangulares y no saben si colocarlas horizontal o verticalmente. Realiza los mismos cálculos que antes y compara los resultados



1 mesa
6 sillas



2 mesas
8 sillas



3 mesas
10 sillas



1 mesa
6 sillas



2 mesas
10 sillas



3 mesas
14 sillas

**Figura 10. Tarea “Preparando el cumpleaños”.
5º curso de Educación Primaria (Fuente: Elaboración propia)**

Se puede aumentar o disminuir la dificultad de la tarea cambiando la forma de las mesas: triangular, trapezoidal, hexagonal...

Tareas relacionadas

- Patrones con tablas numéricas: la elaboración y la exploración de tablas numéricas facilitan a los estudiantes descubrir la regla de formación y extender las series numéricas.
- Patrones con series: los estudiantes se sienten especialmente motivados en la búsqueda del criterio de formación en series numéricas como la de Fibonacci o en triángulos numéricos como el de Pascal.
- Patrones con proceso inverso: las tareas con el proceso inverso pueden utilizarse para trabajar con los estudiantes la reversibilidad de las relaciones numéricas.

6º Curso

Los estudiantes de 6º curso de Educación Primaria, en la generalización de patrones de patrones recurrentes, trabajan patrones con más de un atributo y se inician en la expresión simbólica, o algebraica, de la regla general.

Para expresar algebraicamente la regla el maestro requerirá a los estudiantes que hallen el número de elementos de la figura n e intenten expresarlo mediante operaciones entre el término independiente y el patrón de crecimiento. La expresión algebraica de la regla debe surgir de forma espontánea y entendiendo el significado de la indeterminada n .

En la tarea “Juntando policubos” se van añadiendo cubos y los estudiantes expresan las reglas, directa e inversa, que relacionan el número de cubos de cada figura y el número de vértices y aristas (Figura 11).

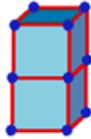
Actividad: Juntando policubos

En clase hoy han trabajado con policubos, colocándolos de diferente forma

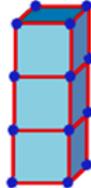
1. Arnau y sus amigos los han colocado en vertical



1 cubo
8 vértices
12 aristas



2 cubos
12 vértices
20 aristas



3 cubos
16 vértices
28 aristas

1. Dibuja 4 cubos y cuenta el número de vértices y aristas
2. ¿Cuántos vértices tendrían 20 cubos? ¿Y cuántas aristas? Explica cómo lo has hecho
3. Escribe una regla para calcular el número de vértices sabiendo el número de cubos y otra para hallar el número de aristas
4. Intenta escribir la regla algebraicamente (¿Cómo hallarías el número de vértices de n cubos? ¿y de n aristas?)
5. ¿Cuántos cubos necesitaríais para formar una estructura con 44 vértices? ¿Y con 44 aristas?

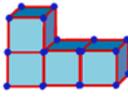
2. Otros grupos de amigos han colocado los cubos de otras formas. Contesta las mismas preguntas



1 cubo
8 vértices
12 aristas



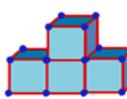
3 cubos
16 vértices
28 aristas



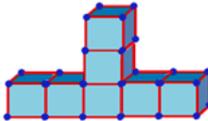
4 cubos
20 vértices
36 aristas



1 cubo
8 vértices
12 aristas



4 cubos
20 vértices
36 aristas



7 cubos
32 vértices
60 aristas

**Figura 11. Tarea “Juntando policubos”.
6º curso de Educación Primaria (Fuente: Elaboración propia)**

La complejidad de las estructuras formadas con los policubos puede adaptarse fácilmente a las capacidades de los estudiantes

Tareas relacionadas:

- Patrones con poliminós: el estudio de estructuras formadas con poliminós es un recurso muy interesante en la exploración de patrones.
- Patrones con proceso inverso: el estudio del proceso inverso en los patrones recurrentes y la reversibilidad de las operaciones numéricas facilitan el desarrollo del pensamiento algebraico en cursos superiores.
- Patrones definidos algebraicamente: la expresión algebraica de la regla de formación de los patrones recurrentes favorece el desarrollo y la comprensión del lenguaje algebraico.



6. Consideraciones finales

Como hemos descrito en los apartados anteriores, numerosas investigaciones (Kaput, 2000, NCTM, 2000; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Kieran, 2004; Blanton y Kaput, 2005; Molina, 2006; Zapatera, 2015) fundamentan la introducción del pensamiento algebraico en Educación Infantil y Educación Primaria y consideran necesaria su introducción para que los alumnos puedan desarrollar con más garantías el álgebra en la Educación Secundaria. La comunidad docente debe tomar conciencia de ello y planificar tareas con patrones para desarrollar el pensamiento algebraico en sus clases de Infantil y Primaria.

La secuencia de tareas que se proponen en este trabajo, unas fundamentadas en investigaciones y otras adaptaciones de tareas que se han puesto en práctica, puede servir a los maestros para introducir el pensamiento algebraico en sus clases. Además, las tareas propuestas están diseñadas de forma gradual y permiten adaptarlas según las necesidades de los alumnos, añadiendo o eliminando variables y aumentando o disminuyendo la complejidad.

Bibliografía

- Becker J. R., Rivera F. D. (2008). Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 1-1.
- Billings, E., Tiedt, T. & Slater, L. (2008). Research, Reflection, Practice: Algebraic Thinking and Pictorial Growth Patterns. *Teaching Children Mathematics*, 14(8), 302-308.
- Blanton M. L. & Kaput J.J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Bruner, J.S. (1960). *The Process of Education*. Harvard University Press. Cambridge: MA.
- Butto, C. & Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno logo. *Educación Matemática*, 22(31), 55-86.
- Callejo, M.L. & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *BOLEMA*, 28(48), 64-88.
- Carpenter, T.P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Carraher, D., Schliemann, A. & Brizuela, B. (2000), Early Algebra, early Arithmetic: Treating Operations as Functions. *Conferencia magistral presentada en el PME-NA*. Tucson: AZ.
- Castro, E, Cañadas, M. C. & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55-67.
- Decreto 124/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado. Madrid, España.
- Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking process. *Mathematics Education Library*, 11, 25-41.
- García Cruz, J.A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis Doctoral (no publicada). Universidad de la Laguna.
- Harel G. & Tall D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 38-42.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Student achievement in algebraic thinking: A comparison of third-graders' performance on a state fourth-grade assessment. En R. Speiser, C. Maher, y C. Walter

- (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*, 1, 99-108.
- Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. En G. Vernand, J. Rogalski y M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 163-171. Paris: Laboratoire PSYDEE.
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). Boletín Oficial del Estado. Madrid, España.
- Mason, J. (1991). *Supporting primary mathematics: Algebra*. Milton Keynes, UK: Open University Press.
- Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, 4(3), 232-246.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Pólya, G. (1954). *Patterns of Plausible Inference*. Princeton: Princeton University Press.
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 17-24. Ankara, Turkey: PME.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Rivera, F.D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En Pinto, M.F. y Kawasaki, T.F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 81-88. Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de las investigaciones. *Números*, 77, 5-34.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En Chick, H.L. y Vincent, J.L. (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 305-312. Melbourne: PME.
- Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *APMC*, 11(1), 9-14
- Zapatera, A. & Callejo, M.L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, 351-360. Ciudad Real: SEIEM.
- Zapatera, A. & Callejo, M. L. (2013). Preservice primary teacher's noticing of students' generalization process. En Lindmeier, A. M. y Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 425-432. Kiel, Germany: PME.
- Zapatera, A. (2015). La competencia mirar con sentido de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria. Tesis doctoral. Universidad de Alicante

Alberto Zapatera Llinares. Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Cardenal Herrera-CEU (Elche). Sus líneas de investigación se centran en el pensamiento algebraico y el desarrollo profesional del profesor de matemáticas.
Email: alberto.zapatera@uchceu.es

