Rev. Acad. Canar. Cienc., XII (Núms. 1-2), 89-96 (2000) - (Publicado en julio de 2001)

UNA GENERALIZACIÓN DE LA INTEGRAL SECANTE $I_a(\psi, b, \alpha)$

J. Matera
Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.)
Facultad de Ingeniería-Universidad del Zulia.
Apartado de Correos 10482
Maracaibo-Venezuela

ABSTRACT

In this paper we introduce a new generalization of the generalized secant integral presented by Michieli (Radiat. Phys. Chem. Vol. 51, No. 2, pp. 121-128, 1998)

$$I_a(\psi, b, \alpha) = b^a \int_0^{\psi} e^{b \sec \varphi} (\sec \varphi)^a (\tan \varphi)^{2\alpha - 1} d\varphi$$

where $a \geq 0$, $b > 0, 0 < \psi \leq \pi/2$ and $\alpha > 0$.

It is also given an adequate series representation for $I_a(\psi, b, \alpha)$ in terms of the incomplete gamma function and the complementary incomplete gamma function.

Key words: Secant integral, incomplete gamma function, complementary incomplete gamma functions.

RESUMEN

En este trabajo se introduce una nueva generalización de la integral secante generalizada presentada por Michieli (Radiat. Phys. Chem. Vol. 51, No. 2, pp. 121-128, 1998)

$$I_a(\psi, b, \alpha) = b^a \int_0^{\psi} e^{b \sec \varphi} (\sec \varphi)^a (\tan \varphi)^{2\alpha - 1} d\varphi$$

donde $a \geq 0$, $b > 0$, $0 < \psi \leq \pi/2$ y $\alpha > 0$, así como también es dada una adecuada representación en serie para $I_a(\psi, b, \alpha)$ en términos de la función gamma incompleta y la función gamma incompleta complementaria.

Palabras claves: Integral secante, función gamma incompleta, función gamma incompleta complementaria.

1. INTRODUCCIÓN

La integral [1, pág. 1000]

$$\int_0^\theta e^{-z \sec\phi} d\phi$$

es conocida como la integral de Sievert, y en donde su representación en términos de la integral exponencial, está dada por

$$\int_0^\theta e^{-z \sec\phi} d\phi = \int_0^{\pi/2} e^{-z \sec\phi} d\phi -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\cos\theta)^{2k+1} \cdot E_{2k+2}\left(\frac{x}{\cos\theta}\right) \quad , \quad (x \geq 0\ ,\ 0 < \theta < \pi/2) \qquad (1)$$

la cual ha sido estudiada extensamente por Sievert [5,6], Abramowitz y Stegun [1] y Wood [7].

En la búsqueda de una adecuada representación funcional de una información del factor de refuerzo de un nuevo punto del rayo gamma isotrópico, una función basada en un conjunto de polinomios expandidos fue estudiado por Michieli [3], la función de aproximación tiene la forma

$$B(x, E_0) = 1 + \exp[\beta x] x^\alpha \sum_{i=0}^{3} A_i x^i,$$

donde x representa el espesor de la placa (en $mfps$), α y β son constantes para el material protector seleccionado y los A_i son parámetros independientes de la función.

Recientemente, Michieli [4] demostró que el resultado anterior es expresable en una integral secante generalizada que puede definirse como

$$I_a(\psi, b) = b^a \int_0^{\psi} e^{-b\sec\varphi}(\sec\varphi)^a d\varphi \tag{2}$$

con $a \geq 0$, $b > 0$ y $0 < \psi \leq \pi/2$.

En este trabajo introducimos una nueva generalización de la integral secante generalizada dada por Michieli, denotada por $I_a(\psi, b, \alpha)$, y definida en la forma siguiente:

$$I_a(\psi, b, \alpha) = b^a \int_0^{\psi} e^{-b\sec\varphi}(\sec\varphi)^a(\tan\varphi)^{2\alpha-1} d\varphi \tag{3}$$

donde $a \geq 0$; $b > 0$; $0 < \psi \leq \pi/2$; $\alpha > 0$.

Si $\alpha = 1/2$ en (3) se tiene como caso particular (2), que es la integral de la secante generalizada presentada por Michieli [4].

Haciendo la sustitución $\sec\varphi = x$ en (3), resulta la integral

$$I_a(\psi, b, \alpha) = b^a \int_1^{\sec\psi} e^{-bx} x^{a-1}(x^2-1)^{\alpha-1} dx \ , \quad \alpha > 0 \tag{4}$$

también se da una adecuada representación en serie para $I_a(\psi, b, \alpha)$ en términos de la función gamma incompleta y la función gamma incompleta complementaria.

2.-REPRESENTACION DE $I_0(\psi, b, \alpha)$

Haciendo $a = 0$

$$I_0(\psi, b, \alpha) = \int_1^{\sec\psi} e^{-bx} x^{-1}(x^2-1)^{\alpha-1} dx$$

Dado que $0 < \psi \leq \pi/2$, entonces la integral anterior se puede escribir como

$$I_0(\psi, b, \alpha) = \int_1^{\infty} e^{-bx} x^{-1}(x^2-1)^{\alpha-1} dx -$$

$$- \int_{\sec\psi}^{\infty} e^{-bx} x^{-1}(x^2-1)^{\alpha-1} dx. \tag{5}$$

Expandiendo $(x^2-1)^{\alpha-1}$ en potencias de $(1/x)$[2], la cual es válida para $\mid (1/x) \mid < 1$, resulta

$$(x^2-1)^{\alpha-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha-1)_i}{i!} \left(\frac{1}{x}\right)^{2i-2(\alpha-1)},$$

luego, al sustituir este resultado en el segundo término del lado derecho de (5) e intercambiando el orden de integración y suma, podemos escribir la integral como

$$\int_{\sec\psi}^{\infty} e^{-bx} x^{-1} (x^2-1)^{\alpha-1} dx = \sum_{i=0}^{\infty} k_i \int_{\sec\psi}^{\infty} e^{-bx} x^{2\alpha-2i-3} dx$$

por lo tanto,

$$I_0(\psi, b, \alpha) = I_0(\pi/2, b, \alpha) - \sum_{i=0}^{\infty} k_i \int_{\sec\psi}^{\infty} e^{-bx} x^{2\alpha-2i-3} dx$$

con

$$\frac{(\alpha-1)_i}{i!} = k_i.$$

Efectuando el cambio de variable $bx = t$ en la integral anterior, se tiene

$$I_0(\psi, b, \alpha) = I_0(\pi/2, b, \alpha) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k_i}{b^{2\alpha-2i-2}} \int_{b\sec\psi}^{\infty} e^{-t} t^{2\alpha-2i-3} dt$$

después de integrar, usando la definición de la función gamma incompleta [1],

$$\Gamma(m, y) = \int_y^{\infty} e^{-t} t^{m-1} dt \quad , \quad (y > 0),$$

obtenemos,

$$\begin{aligned} I_0(\psi, b, \alpha) &= I_0(\pi/2, b, \alpha) - \sum_{i=0}^{\infty} k_i \, b^{2i-2\alpha+2} \; . \\ &\cdot \; \Gamma(2\alpha - 2i - 2, b\sec\psi). \end{aligned}$$

Usando la relación [1, pág. 230]

$$E_n(y) = y^{n-1} \Gamma(1-n, y)$$

al despejar la función gamma y comparar ,se tiene que

$$\Gamma(2\alpha - 2i - 2, b\sec\psi) = b^{2\alpha-2i+2}(\cos\psi)^{2i-2\alpha+2}E_{2i-2\alpha+3}(b\sec\psi)$$

Por lo tanto, $I_0(\psi, b, \alpha)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} I_0(\psi, b, \alpha) &= I_0(\pi/2, b, \alpha) - \sum_{i=0}^{\infty} k_i\ (\cos\psi)^{2i-2\alpha+2} \\ &\quad \cdot\ E_{2i-2\alpha+3}(b\sec\psi). \end{aligned} \tag{6}$$

La cual queda expresada en términos de la integral exponencial, en donde si $\alpha = 1/2$ se tiene como resultado la integral de Sievert [1, pág. 1000]

3.- REPRESENTACIÓN GENERAL de $I_a(\psi, b, \alpha)$ EN TÉRMINOS DE LAS FUNCIONES GAMMA INCOMPLETAS

Para simplificar la notación introducimos la definición auxiliar

$$\begin{aligned} \hat{I}_a\ (\psi_1, \psi_2, b, \alpha) &= I_a(\psi_2, b, \alpha) - I_a(\psi_1, b, \alpha) \\ \psi_2 &> \psi_1 > 0, \alpha > 0 \end{aligned}$$

En téminos de esta notación, la integral secante generalizada (3) puede escribirse como

$$I_a(\psi, b, \alpha) = I_a(\psi_\varepsilon, b, \alpha) + \hat{I}_a\ (\psi_\varepsilon, \psi, b, \alpha) \tag{7}$$

en donde $\psi > \psi_\varepsilon > 0$.

Usando la expansión en serie de $(x^2-1)^{-1/2}$ en potencias de $(1/x)$ en $\hat{I}_a\ (\psi_\varepsilon, \psi, b, \alpha)$ y siguiendo un procedimiento similar al efectuado en la sección anterior

$$\hat{I}_a\ (\psi_\varepsilon, \psi, b, \alpha) = b^a \int_{\sec\psi_\varepsilon}^{\sec\psi} e^{-bx}\ x^{a-1}(x^2-1)^{\alpha-1}dx$$

es decir,

$$\hat{I}_a\ (\psi_\varepsilon, \psi, b, \alpha) = b^a \sum_{i=0}^{\infty} k_i\ \int_{\sec\psi_\varepsilon}^{\sec\psi} e^{-bx}\ x^{2\alpha-2i+a-3}dx \tag{8}$$

la cual es válida para $\pi/2 \geq \psi > \psi_\varepsilon > 0$ y

$$k_i = \frac{(\alpha-1)_i}{i!},$$

con lo cual (8) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}\hat{I}_a(\psi_\varepsilon,\psi,b,\alpha) &= b^a \sum_{i=0}^{\infty} k_i \left[\int_{\sec\psi_\varepsilon}^{\infty} e^{-bx}\, x^{2\alpha-2i+a-3}dx - \right.\\ &\left. - \int_{\sec\psi}^{\infty} e^{-bx}\, x^{2\alpha-2i+a-3}dx\right].\end{aligned}$$

Integrando y usando la definición de la función gamma incompleta

$$\begin{aligned}\hat{I}_a(\psi_\varepsilon,\psi,b,\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i\, b^{2i-2\alpha+2}\,[\Gamma(2\alpha-2i+a-2, b\sec\psi_\varepsilon) - \\ - \Gamma(2\alpha-2i+a-2, b\sec\psi)]\,. \qquad (9)\end{aligned}$$

Es fácil reconocer que para $\alpha = 1/2, a = 0; \psi = \pi/2$, $\psi_\varepsilon = \psi$ y usando la relación $E_n(y) = y^{n-1}\,\Gamma(1-n,y)$, la suma (9) es la integral de Sievert dada en (6).

Para finalizar es necesario una adecuada representación en serie para $I_a(\psi_\varepsilon, b, \alpha)$, para esto escribimos la ecuación (4) de la siguiente manera

$$I_a(\psi_\varepsilon,b,\alpha) = b^a \int_1^{\sec\psi_\varepsilon} e^{-bx}\, x^{a-1}(x^2-1)^{\alpha-1}dx.$$

Sabemos que $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, entonces

$$I_a(\psi_\varepsilon,b,\alpha) = b^a \int_1^{\sec\psi_\varepsilon} e^{-bx}\, x^{a-1}(x+1)^{\alpha-1}(x-1)^{\alpha-1}dx. \qquad (10)$$

Usando una expansión de Taylor de $x^{a-1}(x+1)^{-1/2}$ en potencias de $x-1$, obtenemos

$$I_a(\psi_\varepsilon,b,\alpha) = b^a \int_1^{\sec\psi_\varepsilon} e^{-bx}(x-1)^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{\infty} P_{a,i,\alpha}(x-1)^i dx$$

$$= b^a \sum_{i=0}^{\infty} P_{a,i,\alpha} \int_1^{\sec\psi_\varepsilon} e^{-bx}(x-1)^{\alpha-1+i}dx$$

donde es fácil probar con el uso de la regla de Leibniz para la $n+h$ derivada de un producto [2] que los coeficientes de la expansión $P_{a,i,\alpha}$ son

$$P_{a,i,\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{a-1}{i-j} \binom{a-1}{j} \frac{2^{\alpha-1}}{2^j}, \tag{11}$$

efectuando el cambio $x-1=t$, resulta

$$I_a(\psi_\varepsilon, b, \alpha) = \frac{b^a}{e^b} \sum_{i=0}^{\infty} P_{a,i,\alpha} \int_0^{-1+\sec\psi_\varepsilon} e^{-bt}\, t^{\alpha-1+i} dt.$$

Si ahora hacemos $x = bt$ y usamos el resultado

$$\gamma(m,y) = \Gamma(m) - \Gamma(m,y) = \int_0^y e^{-t}\, t^{m-1} dt, \quad \text{para } m > 0$$

después de integrar, tenemos

$$I_a(\psi_\varepsilon, b, \alpha) = \frac{b^a}{e^b} \sum_{i=0}^{\infty} P_{a,i,\alpha}\, b^{-\alpha-i}\, \gamma\left[\alpha+i, b(\sec\psi_\varepsilon - 1)\right] \tag{12}$$

con lo cual se puede escribir (7) de la siguiente manera

$$I_a(\psi, b, \alpha) = \frac{b^a}{e^b} \sum_{i=0}^{\infty} P_{a,i,\alpha}\, b^{-\alpha-i}\, \gamma\left[\alpha+i, b(\sec\psi_\varepsilon - 1)\right] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} k_i b^{2i-2\alpha+2} \left[\Gamma(2\alpha - 2i + a - 2, b\sec\psi_\varepsilon) - \Gamma(2\alpha - 2i + a - 2, b\sec\psi)\right] \tag{13}$$

AGRADECIMIENTO

El autor desea agradecer al CONDES por el soporte económico brindado.

REFERENCIAS

1. **Abramowitz, M. and Stegun, I.A.** Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York, (1972).
2. **Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M.** Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, New York, (1980).
3. **Michieli, I.** The use of an expanded polynomial orthogonal set in approximations to gamma-ray buildup factor data. Nuclear Science Engineering, (1994), 117, 110.
4. **Michieli, I.** Point kernel calculation of dose fields from line sources using expanded polynomial from of buildup factor data: generalized secant integral-series representation. Radiat. Phys. Chem. Vol. 51, No. 2, (1998), pp. 121-128.
5. **Sievert, R.M.** Die Intensitätsverteilung der oberfläche und in der nächsten Umgebung von Radiumnadeln. Acta Radiologica 11, (1921), 239.
6. **Sievert, R.M.** Die γ-strahlungsintensität an der oberfläche und in der nächsten Umgebung von Radiumnadeln. Acta Radiologic, (1930), 11, 239.
7. **Wood, J.** Computational Methods in Reator Shielding. Pergamon Press, New York, (1982).