NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 91, marzo de 2016, páginas 23-32

Un problema con números irracionales y una pizca de estilo griego

María Martha Ferrero (Universidad Nacional del Comahue. Argentina)

Fecha de recepción: 2 de julio de 2015
Fecha de aceptación: 20 de septiembre de 2015

Resumen

Partiendo de un problema que involucra números irracionales en un entorno bidimensional (geoplano), se discuten distintas posibilidades para su presentación a los estudiantes, se describen distintos procedimientos que surgieron al implementarlo, teniendo en cuenta algunas variables que se pueden controlar, y se reflexiona sobre la importancia del juego de marcos.
Además de relatar la actividad desde los orígenes de su diseño, motivado en condiciones históricas interesantes para la enseñanza en el contexto de los problemas griegos clásicos, se tienen en cuenta procedimientos y contenidos matemáticos que surgieron en la puesta en aula a partir de la exploración del entorno geoplano y de los intentos por dar solución a la situación planteada.

Palabras clave número irracional – geoplano – triángulo equilátero – resolución de problemas

Title **One problem with irrational numbers and a trace of Greek style**

Abstract

Starting with a problem that involves irrational numbers in a two-dimensional environment (geoboard), we discuss different possibilities for the presentation to students. We describe various procedures that emerged during its development, considering some variables that can be controlled, and we think over the importance of different groundings.
In addition to report the activity from the beginning of its design, motivated in interesting historical conditions for teaching within the context of classical Greek problems, we are taking into account procedures and mathematical content that emerged in the classroom from exploring the geoboard environment and deal with solving the problem posed.

Keywords irrational numbers – geoboard – equilateral triangle – problem solving

1. Introducción

Según palabras de Arsac (1987) *"el problema de la génesis, de la aparición de una noción, puede aclarar el de su enseñanza, si se piensa utilizar las condiciones históricas de esta génesis como guía para crear en la clase las condiciones de una génesis artificial de esta misma noción en el alumno".*

La consideración de los problemas, métodos, contextos y soluciones alcanzadas en la antigua Grecia con respecto a los números irracionales ha resultado una tarea ineludible dentro del Proyecto *“Comprensión del número real y del infinito matemático en estudiantes de secundaria y universidad”*

(Montoro **y** Juan, 2013) y podemos dar como referencias básicas al lector interesado los excelentes artículos de Arsac (1987) y Jiménez (2006) que figuran en la bibliografía.

Mencionemos entre los problemas de nuestro interés la relación lado-diagonal en el cuadrado, las relaciones entre lados y diagonales en el pentagrama pitagórico, la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo, la construcción de polígonos regulares…

Notemos que estos problemas emergieron al explorar y comparar figuras en el plano, donde los números fueron mirados inicialmente como medidas de segmentos y los intentos de dar solución a los mismos dieron lugar a la primera crisis de fundamentos en la Matemática.

A todo esto se suma que los antiguos griegos impusieron la idea de que en la resolución de estos problemas sólo podían usarse la regla no graduada y el compás, poniendo requerimientos sobre el tipo de soluciones que buscaban.

Podemos señalar entonces como condiciones históricas que resultan interesantes para la enseñanza que los números aparecen como *medida de segmentos,* bajo ciertas *restricciones* y en un entorno *bidimensional*.

Siguiendo estas ideas, proponemos el desarrollo de una actividad en un entorno 2D y restringido donde, aunque de condiciones diferentes a las que inspiraron a los griegos, hay mucha matemática por hacer y algún irracional por descubrir.

La actividad que desarrollamos en este artículo fue pensada para implementar en talleres de formación continua de profesores de Matemática y fue puesta en funcionamiento con profesores y maestros en las ciudades argentinas de San Rafael (Mendoza), Bariloche (Rio Negro) y Esquel (Chubut) y en un encuentro informal de intercambio con profesores y estudiantes de doctorado en Educación con estudios de grado en matemática en Medford (Massachussets, USA). Las referencias a actuaciones de los resolutores corresponden a estas instancias, de las cuales no hay registros materiales.

2. Delimitación del problema

Ante la afirmación "en un sistema cartesiano no se pueden construir triángulos equiláteros cuyos vértices tengan todos coordenadas enteras"**,** un matemático no puede permanecer indiferente a interesarse en algún tipo de prueba y un profesor de matemática no puede dejar de ver una situación problemática que puede dar lugar a serias exploraciones matemáticas por parte de los estudiantes.

Así enunciado se trata de un problema de probar, según la clasificación de Polya (1965), si se tiene fe en que la afirmación sea verdadera, pero cabe una respuesta constructiva (exhibir un triángulo) si fuera falsa. ¿Podría anticipar de qué manera encararían sus alumnos el desafío?

Estudiemos primero el enunciado: un ente geométrico (triángulo equilátero) inmerso en un contexto analítico (sistema de coordenadas cartesianas). Desde la didáctica podemos decir que el problema está enunciado en dos marcos, el geométrico y el numérico-con-coordenadas, por tanto abordar el problema se presta al juego de marcos (Douady, 1999).

Además, una persona familiarizada con la matemática reconoce que la alusión a un sistema de coordenadas ortonormal provee una descripción concisa y refiere la situación inequívoca y unívocamente. Sin embargo, desde la didáctica surge la pregunta: ¿será necesario tanto artilugio matemático?, ¿no habremos perdido oportunidades de realizar razonamientos y manipulaciones geométricas siguiendo un arrebato hacia el marco numérico?

En la introducción a su libro Vectores y Tensores, Luis Santaló (1961) menciona que *al introducir coordenadas para estudiar una figura, aparece todo un ropaje de fórmulas que no son intrínsecas a la misma, sino que dependen de ella y del sistema de coordenadas utilizado. … Aparece así la necesidad de saber distinguir, frente a cada problema y en cada momento, cuáles son las propiedades inherentes a la figura que se trata de estudiar y cuáles las accesorias, introducidas parasitariamente como una necesidad del método analítico utilizado.*

Buscando reescribir este enunciado de modo que sea accesible a nuestros alumnos pero sin perder precisión, encontramos que Hilbert y Cohn-Vossen (1952) en su libro Matemáticas e Imaginación, sugieren que *"Una estructura particularmente simple compuesta de partes discretas es la celosía cuadriculada en el plano (fig 39)"* (Figura 1) y advierten que *"Aún la celosía más simple ha dado origen a investigaciones matemáticas importantes".*

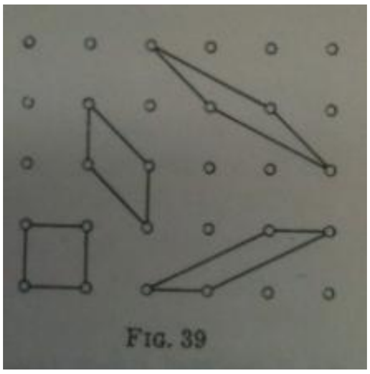

Figura 1. Extractada de Hilbert y Cohn-Vossen (1952)

Proponen además una manera de construirla, totalmente independiente de un sistema de coordenadas, apelando a transformaciones en el plano. Vale la pena seguir la transcripción de la construcción propuesta por estos autores, teniendo en cuenta las consideraciones y sugerencias de cuestiones matemáticas que emergen del texto.

> Para construirla comenzamos por marcar los cuatro vértices de un cuadrado unidad en el plano. Entonces movemos el cuadrado una unidad de longitud en una de las direcciones paralelas a sus lados y marcamos la posición de dos nuevos vértices. Ahora imaginamos este proceso repetido indefinidamente primero en la misma dirección y luego en la dirección opuesta. Obtenemos en el plano una banda consistente en dos filas de puntos equidistantes en el plano. Ahora movemos esta banda una unidad de longitud en una dirección perpendicular a ella, marcamos los nuevos puntos así generados, e imaginamos este proceso también repetido en ambas direcciones. La totalidad de puntos así marcados constituye la celosía cuadriculada; también podría haberse definido como el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas cartesianas son enteros.
> En esta celosía podemos por supuesto formar otras figuras que cuadrados a partir de cuatro puntos -paralelogramos por ejemplo. Ahora es fácil de ver que la celosía cuadriculada completa puede ser generada por cualquiera de tales paralelogramos incluido el cuadrado, dado que no tiene otros puntos en su interior o en su frontera que no sean sus vértices (si esto no fuera así el proceso de generación podría no dar lugar a todos los puntos de la celosía).

> Además, la consideración de tales paralelogramos nos muestra que deberían tener la misma área que el cuadrado generador (ver fig. 39); daremos una prueba rigurosa de esto…
>
> Hilbert y Cohn-Vossen (1952)

3. El problema en situación de clase

Nuestra elección didáctica es entonces enunciar el problema de construir triángulos equiláteros en el contexto de una celosía bidimensional cuadriculada, independizándonos así del sistema de coordenadas.

En la práctica escolar, esta celosía cuadriculada bidimensional puede ser materializada en el geoplano (dispositivo tipo tablero con clavos o tarugos como soporte de las figuras que se "dibujan" utilizando gomas elásticas, fig. 2) o en simples hojas de papel punteado o simulada en la pantalla de una computadora.

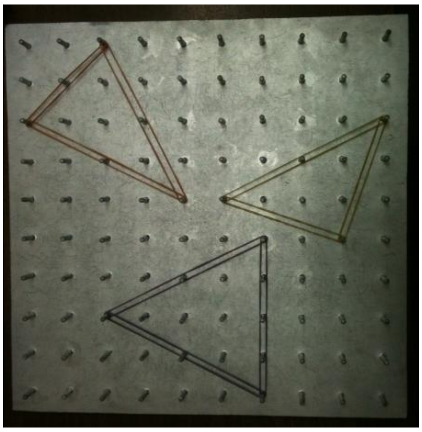

Figura 2. Geoplano

Llamemos "entorno" a cualquiera de estos recursos equivalentes que materializan un trozo de celosía bidimensional cuadriculada y daremos preferencia al entorno geoplano en lo que sigue de este artículo.

Una de las ventajas de contar con el geoplano, se observa con respecto al enunciado del problema puesto que puede pasar a ser ostensivo, es decir, se explica visualmente a los estudiantes que cuentan con el dispositivo:

¿Será cierto que no se pueden construir triángulos equiláteros en el geoplano?

Así logramos encuadrar, aunque momentáneamente, el problema en el marco geométrico exclusivamente y le damos un carácter exploratorio. La consigna puede darse también en forma de desafío: *Construir un triángulo equilátero con vértices en el geoplano.* De esta manera estamos planteando un problema de resolución imposible, cuestión que deberemos validar matemáticamente y convalidar, teniendo en cuenta una mirada didáctica, como práctica útil para "hacer matemática".

El entorno geoplano permite el comportamiento de "prueba y error" en los estudiantes, dando lugar a conjeturas y posibilidades de validación, es decir, permite realizar trabajo matemático. Que los estudiantes se familiaricen con este entorno antes de plantear el problema que nos ocupa puede ser provechoso para un mejor desarrollo de esta propuesta.

Enfocando nuevamente en la situación planteada, probablemente los primeros triángulos que construyan los estudiantes tendrán algún lado paralelo a los bordes del tablero, para luego explorar otras posibilidades. El teorema de Pitágoras surgirá naturalmente en este entorno pleno de ángulos rectos y triángulos rectángulos para realizar algunas validaciones (el marco numérico-medida emerge sin haber sido impuesto de antemano). Aparecen de manera natural una variedad de números irracionales al calcular las longitudes de hipotenusas de triángulos rectángulos.

Entre otras observaciones los resolutores encontraron que la altura de un triángulo equilátero está incluida en la mediatriz de la base y que esto permitía calcular la relación entre base y altura mediante Pitágoras, considerando un triángulo rectángulo "mitad" del equilátero (de cateto congruente a 1/2 base e hipotenusa congruente a la base) y así entra en juego el número irracional $(\sqrt{3}/2)$.

Se puede sugerir que los estudiantes construyan un triángulo de base 8 unidades y paralela a un borde, con el vértice opuesto a 7 unidades de distancia de la base, en un clavo del geoplano contenido en una recta perpendicular a la base que pasa por su punto medio. Este triángulo que "es a ojo" parecido a un equilátero resulta ser sólo isósceles. Esto se puede comprobar utilizando el compás, o mediante Pitágoras que nos muestra que los lados congruentes miden raíz de 65, bastante próximo a 8 (raíz de 64). Esta situación se presta para discutir acerca de las medidas y sus aproximaciones, teniendo en cuenta que al medir con instrumentos siempre hay un margen de error.

¿Qué pasa con los triángulos equiláteros de lados no paralelos a los bordes del geoplano?

En una de las implementaciones de la actividad, la atenta mirada de una resolutora permite intuir que alcanzaría (sería condición suficiente) con estudiar los triángulos con un lado paralelo a los bordes para resolver el problema. Esto se explica en el carácter fractal del geoplano: marquemos una base de triángulo equilátero cualquiera (Figura 3) y veamos que está inmerso en una celosía cuadriculada equivalente a la original (Figura 4), salvo por escala.

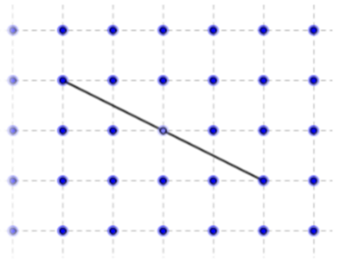

Figura 3. (Geogebra CC)

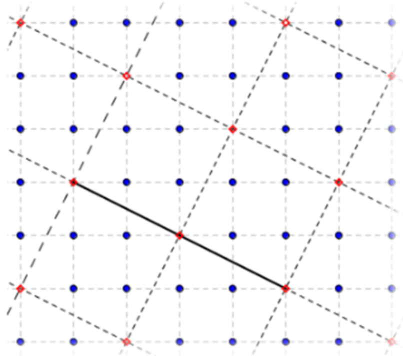

Figura 4. (Geogebra CC)

Cabe preguntarse desde la investigación didáctica si esta visualización se hubiera dado trabajando con coordenadas. Subyace como interrogante matemático, para considerar el problema resuelto, si el tercer vértice podría estar en la "vieja" celosía sin pertenecer a esta "nueva" celosía incluida en la anterior. Dejamos la validación de esta última proposición como tarea para el lector puesto que haremos uso de esta propiedad ligada a la estructura geométrica del geoplano.

Otros posibles caminos o heurísticas, que surgieron en el mismo ámbito de puesta en aula, parten de transformar el problema en otro. Resuelto el nuevo problema, se tendrían las herramientas para aplicarlas al problema original.

Entre estos caminos posibles los profesores resolutores consideraron:

1. construir ángulos de 60º determinados por vértices del geoplano (ángulos);
2. si consideramos coordenadas y dos de los vértices tienen coordenadas enteras, ¿qué pasa con el tercero? (vértices)
3. construir un segmento de longitud raíz de 3 en el geoplano que sirva como altura de un triángulo equilátero adecuado (lados).

Esta variedad de caminos propuestos muestra la riqueza de la situación problemática planteada y abre además nuevas posibilidades a las anticipadas como solución en el diseño de la actividad. Es interesante también observar que cada uno de los caminos que aparecieron cambia el foco de considerar el triángulo a particularizar en los elementos.

Lo cierto es que los caminos vislumbrados son adecuados y se pueden continuar satisfactoriamente, pero al menos en los dos primeros, debemos abandonar la idea de que simplifiquen los razonamientos requeridos para resolver el problema original. Mencionaremos someramente que en los caminos 1 y 2 la consideración de coordenadas surge espontáneamente, el problema se traslada al marco numérico-con-coordenadas, y tras cálculos y conexiones con conceptos matemáticos nada triviales, se puede lograr el objetivo. Si se cuenta con tiempo para el desarrollo de la actividad, sería deseable permitir algunos intentos aunque para evitar empantanamientos y frustraciones, podemos proponer una manera de encarar el problema mucho más accesible en cuanto a los contenidos matemáticos que involucra.

Distinta es la situación en el camino 3, cuya aparición nos sorprendió gratamente. A los fines de este artículo, postergamos su desarrollo en función del diseño previo que nos permitió plantear la actividad conociendo una forma posible de resolución.

Hasta el momento relatamos acciones tendientes a la construcción del ejemplo, debido tal vez a que el enunciado que presentamos fue dado en todas las instancias como desafío, y es tiempo ya de preguntarse acerca de la imposibilidad de encontrar el triángulo tan buscado. Observemos que si bien a esta altura no se ha resuelto aún el problema, se ve cumplido nuestro objetivo de que los participantes hagan matemática.

A este momento de las implementaciones, que no siempre se dan en las circunstancias óptimas, dirigimos la atención hacia la solución que teníamos prevista de modo que los participantes puedan hacer un cierre de la actividad y cuenten con la certeza de que es imposible realizar el triángulo equilátero requerido.

3.1. Búsqueda dirigida de una solución

Dando un rodeo a la situación, con un abordaje diferente y la consideración más global del entorno, nos abocaremos al estudio de las condiciones en que está enunciado el problema. Es decir, nos involucraremos en la Geometría del Geoplano.

¿Cómo son los polígonos que viven en el geoplano? ¿Qué tipo de triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos tienen sus vértices en la cuadrícula?

Vemos a los cuadrados como los habitantes privilegiados de este entorno, observamos además que, sin importar la posición de sus lados, ocupan siempre una cantidad entera de cuadrados unidad.

También sabemos que cualquier polígono se puede subdividir en triángulos, por tanto bastará con saber calcular áreas de triángulos en el geoplano para calcular el área de un polígono cualquiera.

¿Cómo calcular el área de un triángulo con vértices en el geoplano? El Teorema de Pick[1], uno de los resultados más conocidos del entorno geoplano, puede utilizarse en esta situación.

¿Qué nos aporta este teorema? La posibilidad de calcular el área de cualquier polígono con vértices en una cuadrícula y también que este resultado numérico es o bien un número entero de cuadrados unidad o bien un número racional de cuadrados unidad (múltiplo impar de ½).

Siendo que base y altura de un triángulo equilátero son segmentos inconmensurables entre sí resulta que la longitud de la base y el área del mismo triángulo equilátero son números inconmensurables entre sí (l y $\left(\sqrt{3}/4\right) \cdot l^2$ respectivamente).

Uniendo este resultado con la consideración de escala antes realizada, podemos pensar sin pérdida de generalidad, en un triángulo equilátero con un lado paralelo a los bordes (la longitud de este lado es un número entero y por tanto la altura no puede ser un número entero) el cual tiene por área un número irracional.

La conclusión se obtiene así por absurdo: el postular la existencia de un triángulo equilátero en el geoplano conduce a una contradicción con el teorema de Pick.

¿Estamos con esto diciendo que no se puede construir un triángulo equilátero cuya área sea un número natural (o racional)? Aunque la respuesta es no en el geoplano, es afirmativa si no ponemos restricciones en el plano. Por eso el cuidado en el uso de la propiedad del geoplano como fractal para la afirmación hecha, mostrando como caso particular un triángulo con un lado paralelo a alguno de los bordes y la consideración de escala.

Al mismo resultado que provee el teorema de Pick se puede llegar por consideraciones geométricas y de cálculos de áreas por diferencia entre rectángulos y triángulos convenientes. Hemos incursionado en la exploración de estas posibilidades con geogebra, lo que abre toda una gama de nuevos problemas geométricos interesantes que exceden los objetivos de este artículo.

3.2. Digresión importante sobre el camino 3

La consideración de conocimientos matemáticos lleva a un participante del taller a descubrir una estructura subyacente al geoplano (la estructura es la misma hallada en la visualización del fractal que ya describimos antes, pero aquí operaron elementos que hacen esta aproximación diferente: la disponibilidad de conocimientos matemáticos condujo al descubrimiento de la estructura).

El razonamiento seguido por este profesor fue: cualquier segmento no paralelo a los bordes es hipotenusa de algún triángulo rectángulo. Entonces, para construir un segmento de longitud raíz de 3 en el geoplano debemos buscar la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan longitudes 1 y raíz de 2. Recordemos que un triángulo equilátero de base con longitud l tiene una altura de $\left(\sqrt{3}/2\right) \cdot l$ luego, la búsqueda de raíz de 3 simplifica cuentas.

Pero si analizamos las rectas determinadas por un par de clavos y buscamos dos rectas que sean perpendiculares entre sí, veremos que los segmentos contenidos en dichas rectas perpendiculares son conmensurables entre sí (múltiplos enteros de la misma "unidad" dada por dos puntos consecutivos al

---

[1] Ver por ejemplo http://gaussianos.com/el-teorema-de-pick/

considerar cualquiera de las dos direcciones perpendiculares). Cada hipotenusa es parte de una nueva celosía cuadriculada bidimensional, semejante a la original.

Dicho de otro modo, los triángulos rectángulos con vértices en el geoplano tienen catetos conmensurables entre sí y el enunciado del problema (o más bien, su transformado de acuerdo al camino 3) nos exige construir un triángulo con base y altura inconmensurables entre sí, imposible en el geoplano.

Así, se obtiene una respuesta negativa al desafío propuesto, validada matemáticamente, mediante un razonamiento que no había sido previsto en el diseño.

Esta resolución nos permite también trazar un paralelismo histórico insospechado con el concepto de constructibilidad e interesarnos por las implicaciones matemáticas del mismo, que incluyeron realizar una revisión de la propia solución propuesta. Este concepto de constructibilidad de segmentos surgió en el marco de las restricciones impuestas por los antiguos griegos de uso exclusivo de la regla y el compás, mientras que en nuestra propuesta la restricción es mantener el ajuste a la cuadrícula.

3.3. Un breve comentario sobre el uso de coordenadas

Si el lector no queda todavía convencido, puesto que el último razonamiento se apoya en una justificación visual, podemos pensar en un cambio de representación al poner un sistema de coordenadas en el geoplano, con ejes paralelos a los bordes y origen en un punto determinado de la cuadrícula. Trataremos de probar usando un razonamiento en el marco numérico-con-coordenadas que segmentos con extremos en la cuadricula contenidos en rectas perpendiculares son necesariamente conmensurables.

Como es sabido, podemos calcular la pendiente de cualquier recta con dirección distinta a cualquiera de los ejes establecidos, utilizando un triángulo rectángulo de catetos paralelos a los ejes e hipotenusa contenida en la referida recta. Para ello, debemos considerar la medida signada de estos catetos, es decir: se asigna una medida positiva si al partir desde el vértice común con la recta encontramos el otro extremo siguiendo el sentido positivo del eje paralelo a dicho cateto o, en caso contrario, se asigna un valor negativo. Teniendo en cuenta el entorno geoplano, obtenemos un número natural en el primer caso o un entero negativo en el segundo (figura 5.).

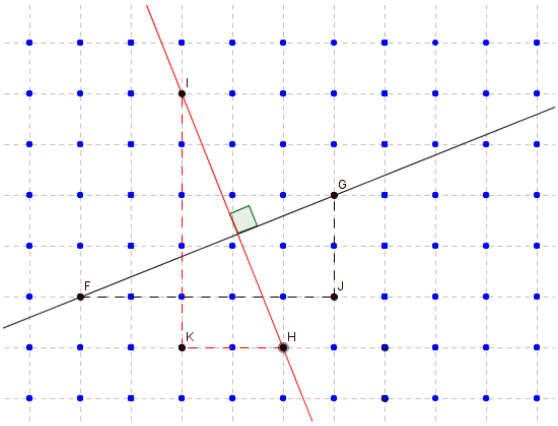

Figura 5. Dos rectas perpendiculares definidas por puntos del geoplano, notar que los triángulos FGJ y IHK son congruentes y que la intersección no es un punto de la cuadrícula. (Geogebra CC)

Es interesante notar que para las rectas que nos ocupan, las que pasan por al menos dos puntos de la cuadrícula del geoplano, sus pendientes son necesariamente números racionales y podemos elegir entonces el cociente de la medida signada de los catetos de modo que sea una fracción irreducible.

Agreguemos a esto nuestro conocimiento sobre las pendientes de dos rectas perpendiculares que son una la recíproca del opuesto de la otra, y para el tipo de rectas consideradas las fracciones irreducibles que representan sus pendientes nos asegura que en valor absoluto las medidas de los catetos de los triángulos correspondientes a cada una de ellas son iguales y por tanto los catetos son congruentes. Aplicando el primer criterio de congruencia de triángulos (dos lados y el ángulo comprendido, que es el recto) obtenemos que las hipotenusas son congruentes.

Así, el segmento "unitario" sobre cada una de las rectas, es decir, cualquier segmento que une dos puntos consecutivos en la misma recta, es congruente con el segmento "unitario" sobre cualquier recta perpendicular a ella. Hemos probado que dos segmentos con extremos en el geoplano dispuestos sobre rectas perpendiculares son conmensurables entre sí. Nuestra afirmación sobre la imposibilidad de construir en el geoplano un segmento de longitud raíz de 3 queda verificada.

Además, podemos observar que la pendiente de una recta que forme un ángulo de 60º con el eje x corresponde a la tangente de 60º, o sea $(\sqrt{3}/2)$, nuevamente entra en juego el mismo número irracional, y por tanto no tiene más punto común con el geoplano que el origen de coordenadas elegido (si lo tuviera, la recta tendría pendiente racional). De esta manera podemos concluir que dos rectas en el geoplano no pueden formar un ángulo de 60º entre si, como habían conjeturado los profesores que propusieron seguir el camino 1.

Hemos justificado la imposibilidad de construir triángulos equiláteros en el geoplano de tres maneras diferentes (una de ellas en dos versiones, en dos marcos diferentes).

4. A modo de cierre

Esta actividad responde a una petición concreta hacia nuestro grupo de investigación en Educación Matemática, realizada por parte de profesores entrevistados en relación al aprendizaje de los números reales en el nivel medio y universitario (Ferrero **y** Montoro, 2012).

Estos profesores manifestaron como una de las principales dificultades para el aprendizaje de los números irracionales que desde la enseñanza no se tuvieran en cuenta, por desconocimiento y de ahí la demanda, situaciones problemáticas en que estos números se vieran como protagonistas.

La idea de Arsac de pensar en las condiciones de partida además de pensar en los problemas en sí, recuperando así el contexto bidimensional, nos permitió salir de la recta como sostén de representación exclusiva para situaciones con números reales.

La característica de ubicuidad que tienen los números irracionales en el conjunto de los números reales es poco apreciable en las prácticas escolares habituales y difícil de explicar a los estudiantes, que los consideran números raros. No ayudan ni la representación gráfica en la recta numérica ni la necesidad práctica de realizar cálculos, utilizando dos o tres decimales para dar suficiente precisión a un resultado. Sin embargo, tanto en los problemas clásicos como en esta actividad en los que opera alguna restricción, aparecen sin buscarlos: no se "ven" pero están, como el aire cuya existencia se percibe cuando a uno le tapan la nariz.

Esta actividad ha sido propuesta en el marco de talleres para profesores, donde los contenidos que se abordan no son sólo matemáticos sino también didácticos. En el mismo tono, la intención de este artículo es no sólo contar un problema que involucra un número irracional y distintas maneras de demostrar la imposibilidad de solución, sino también dar lugar a la reflexión sobre ciertas variables que se pueden controlar en la implementación de la actividad (cómo presentar el enunciado del problema, la consideración del entorno: con o sin coordenadas, qué dejar experimentar libremente y cómo conducir de modo de lograr un cierre, el uso de distintos métodos de medición, la consideración de otros problemas relacionados, la necesidad de validación mediante la demostración, cambiar la mirada) y promover la discusión sobre el uso de representaciones variadas (siendo que los aspectos del concepto a trabajar son diferentes al variar la representación) y sobre los efectos negativos de relegar el marco geométrico en favor del numérico (ya sea en su versión numérico-medida o numérico-con-coordenadas) simplemente porque en el segundo hay menos que explicar. Acordamos con Douady que el juego de marcos es uno de los principales promotores de actividad matemática en el aula.

Agradecimientos

A Virginia Montoro, Marcela Cifuentes, María Teresa Juan, Nora Scheuer, Bárbara Brizuela, y Guillermo Fernández Rajoy.

Bibliografía

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 8, Nº 3.

Douady, R. (1999). Juegos de Marcos y Dialéctica Herramienta-Objeto. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 7, Nº 2, Pág. 5- 31. I.

Ferrero, M. y Montoro V. (2012). Consulta a profesores como medio de aproximación a las concepciones de los estudiantes acerca del número real. *Revista de Educación Matemática.* Vol 27.

Hilbert, D. y Cohn-Vossen, S. (1952). *Geometry and the Imagination.* New York. Chelsea Publishing Company.

Jiménez, D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* Vol XIII, Nº 1.

Montoro, V. y Juan, M. (2013). *Proyecto de Investigación "Comprensión del número real y del infinito matemático en estudiantes de secundaria y universidad"* Universidad Nacional del Comahue. Argentina.

Pólya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* Madrid. Editorial Trillas.

Santaló, L. (1961). *Vectores y tensores con sus aplicaciones.* Ed. Eudeba. Buenos Aires.

María Martha Ferrero nació en la ciudad de Buenos Aires, Argentina, el 5 de octubre de 1969. Actualmente vive en Bariloche, Argentina, y es Profesora Adjunta Regular del Área Álgebra con especialidad en Geometría Euclidiana de la UNComahue, integrante del Proyecto en Educación Matemática "Comprensión del número real y del infinito matemático en estudiantes de secundaria y universidad".
Email: marthaferrero@gmail.com