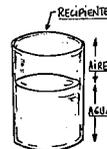


Las Matemáticas y la Música

Utilización del proceso de ajuste por mínimos cuadrados para afinar un conjunto de vasos de agua y formar una escala musical.

ES SABIDO QUE AL GOLPEAR UN RECIPIENTE, ÉSTE Y LA SUSTANCIA QUE CONTIENE (AIRE, AGUA, VINO,...) VIBRAN Y PRODUCEN UN SONIDO DE UNA DETERMINADA FRECUENCIA. ESTA FRECUENCIA DEPENDE DEL MATERIAL DEL RECIPIENTE, DE LA SUSTANCIA QUE CONTIENE, DEL TAMAÑO DE LA CAVIDAD DE AIRE, ETC...



Nosotros hicimos el siguiente **EXPERIMENTO**:

- 1 LLENAMOS 5 VASOS CILÍNDRICOS IGUALES CON DISTINTAS CANTIDADES DE AGUA HASTA CONSEGUIR REPRODUCIR LOS SONIDOS DO, RE, MI, FA, SOL (PARA ESTE PUNTO HACE FALTA BUEN OIDO MUSICAL)

SOY EL MEJOR DITADO DE OIDO DE TODA CARRERAS, PERO HE LLEGADO DISTINGUIR ENTRE "EL CUBANITO" Y EL "PARA ÉSTA"



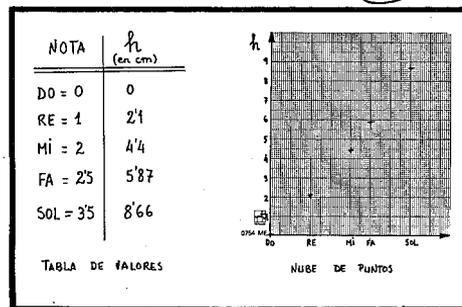
- 2 MEDIMOS LA ALTURA h DE LA CAVIDAD DE AIRE EN CADA UNO DE ELLOS.

- 3 HACEMOS UNA TABLA DE VALORES, ASIGNANDO A CADA NOTA LA ALTURA h

- 4 REPRESENTAMOS LA "NUBE DE PUNTOS"



YO SOY LA AUTÉNTICA NUBE DE PUNTOS, LA OTRA ES UNA IMPOSTORA

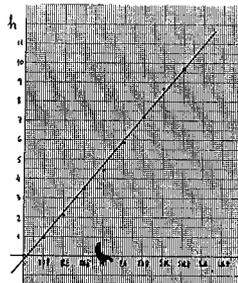


- 5 AJUSTAMOS UNA RECTA DE REGRESIÓN POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS Y RESULTA $Y = 2,47X - 0,24$
 EL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN ES $r = 0,997$, LO QUE QUIERE DECIR QUE EL AJUSTE ES MUY BUENO.

- 6 AHORA PODEMOS CALCULAR VALORES INTERMEDIOS PARA LOS TONOS SOSTENIDOS (TECLAS NEGRAS DEL PIANO).

PARA ELLO UTILIZAMOS LA FÓRMULA DE AJUSTE Y RESULTA LA TABLA AMPLIADA

NOTA	f_i
DO = 0	
DO# = 0,5	0,995
RE = 1	
RE# = 1,5	3,465
MÍ = 2	
FA = 2,5	
FA# = 3	7,47
SOL = 3,5	
SOL# = 4	9,64
LA = 4,5	10,87



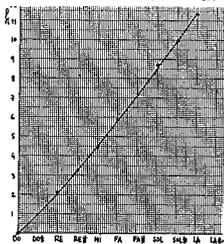
Ajuste lineal.



- 7 PARA UN OÍDO MUSICAL EXIGENTE ALGÚN VASO PUEDE PARECER DESAFINADO (DE HECHO LO ESTÁN); POR ELLO HEMOS MEJORADO LA FUNCIÓN DE AJUSTE UTILIZANDO UNA FUNCIÓN POTENCIAL $Y = AX^B$ Y LA HEMOS AJUSTADO A LOS DATOS INICIALES POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS (TOMANDO PREVIAMENTE LOGARITMO NEPERIANO). RESULTA $Y = 2,074X^{1,13}$ CON $r = 0,999$ (MEJOR AJUSTE QUE ANTES).

- 8 VOLVEMOS A CALCULAR LOS TONOS INTERMEDIOS PARA LA NUEVA FÓRMULA Y SE OBTIENE OTRA TABLA:

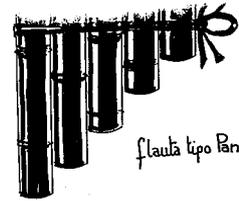
NOTA	f_i
DO# = 0,5	0,94
RE# = 1,5	3,28
FA# = 3	7,18
SOL# = 4	9,93
LA = 4,5	11,35



Ajuste potencial

EXPERIMENTALMENTE HEMOS NOTADO UNA MEJORA EN EL AFINADO DEL INSTRUMENTO

ESTE EXPERIMENTO SE PUEDE REPETIR MODIFICANDO EL INSTRUMENTO. POR EJEMPLO, COMANDO TIRZOS DE CAÑA DE IGUAL DIÁMETRO Y DIFERENTES LONGITUDES Y SOPLANDO POR ELLOS, SE PRODUCE UNA VIBRACIÓN DEL AIRE EN UNA CIERTA FRECUENCIA. SE PUEDE REPETIR TODO EL PROCESO ANTERIOR CON LAS LONGITUDES DE LAS CAÑAS Y AFINAR UNA FLAUTA TIPO "PINULLO", "RONDADOR", "SIKU"...



flauta tipo Pan

Erasteado de una guitarra

EXISTE UNA FÓRMULA DE ACÚSTICA QUE RELACIONA LA LONGITUD DE UNA CUERDA VIBRANTE CON SU FRECUENCIA DE VIBRACIÓN.

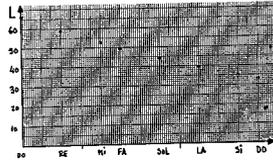
$$f = \frac{1}{2L} \cdot K$$

K = cte. que depende de la cuerda y su tensión

SE SABE TAMBIÉN LA RELACIÓN DE FRECUENCIAS $\frac{f(DO)}{f(RE)} = \frac{8}{9}$; $\frac{f(RE)}{f(MI)} = \frac{9}{10}$; $\frac{f(MI)}{f(FA)} = \frac{15}{16}$; $\frac{f(FA)}{f(SOL)} = \frac{8}{9}$; $\frac{f(SOL)}{f(LA)} = \frac{9}{10}$; $\frac{f(LA)}{f(SI)} = \frac{8}{9}$; $\frac{f(SI)}{f(DO)} = \frac{15}{16}$.

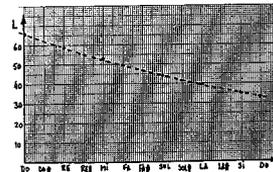
UTILIZANDO LA FÓRMULA ANTERIOR SE PUEDE DEDUCIR LA LONGITUD, L, A LA QUE HAY QUE COLOCAR LOS TRASTES. HEMOS OBTENIDO LOS SIGUIENTES VALORES PARA UNA CUERDA DE 66 cm

NOTA	L
DO	66
RE	58.2
MI	52.8
FA	49.5
SOL	44
LA	39.6
SI	35.2
DO	33



HEMOS AJUSTADO UNA EXPONENCIAL DE REGRESIÓN, RESULTANDO CON: $p = -0.9998$. PARA LOS TONOS INTERMEDIOS LAS LONGITUDES SON:

NOTA	L
DO #	62.34
RE #	55.58
FA #	46.79
SOL #	41.71
LA #	37.19



Ajuste exponencial

$$y = 66.026 e^{-0.1148x}$$

