NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 103, marzo de 2020, páginas 123-146

50 Aniversario en la Facultad de Matemáticas
(Problemas Comentados LIII)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Los problemas y ejercicios presentados se desarrollan teniendo en cuenta las diversas estrategias existentes para la resolución de problemas, constituyendo una muestra de las mismas. En su resolución se emplean diversos materiales como las regletas de Cuisenaire y asistentes de geometría dinámica. Se presentan dos problemas provenientes de las Olimpiadas de Albacete y Asturias. Hacemos una reseña sobre el 50º aniversario de la creación de la carrera de Matemáticas en la Universidad de La Laguna y los diversos actos conmemorativos.

Palabras clave Métodos de resolución de problemas. Uso de regletas de Cuisenaire y asistentes geométricos. Olimpiadas matemáticas. 50 años Matemáticas en la Universidad de La Laguna (Tenerife)

Resumen The problems and exercises presented are developed taking into account the various existing strategies for solving problems, constituting a sample of them. Various materials such as Cuisenaire strips and dynamic geometry assistants are used in its resolution. There are two problems from the Albacete and Asturias Olympics. We review the 50th anniversary of the creation of Mathematics studies at the University of La Laguna and the various commemorative events.

Palabras clave Problem solving methods. Use of Cuisenaire strips and geometric assistants. Mathematical Olympics 50 years Mathematics at the University of La Laguna (Tenerife)

1. RETOS ANTERIORES

Vamos, para comenzar, a dar unas posibles respuestas a los problemas pendientes que se denominan INTERVENCIÓN QUIRÚRGICA y LA PARCELA TRIANGULAR.

El primero procede de una lectura de Thomas Byrne y Tom Cassidy, "*Cómo ganar a la ruleta rusa y otros problemas endiablados de lógica*", Alianza Editorial, 2013. El enunciado del problema es muy artificial, evidente a partir de la masa corporal no grasa de la persona. No intentamos adaptarlo ya que el objetivo era hacer ver como pequeñas variaciones en los porcentajes pueden resultar muy potentes en los valores a manejar. Sólo hicimos una variación en una palabra porque nos parecía "políticamente incorrecta", donde dice "persona" en origen decía "señora".

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

INTERVENCIÓN QUIRÚRGICA

Una persona pesa 300 kg, con un 99 % de grasa. Se somete a una intervención para resolver su problema. En la primera revisión seguía teniendo una cantidad total de grasa del 98 %.
¿Podríamos decir que fue un fracaso la intervención?
Razona tu respuesta.

Proceso de Resolución.

COMPRENDER Datos Una persona pesaba 300 kg, con un 99 % de grasa. Ahora tiene una cantidad total de grasa del 98 %. Objetivo Fue o no un fracaso la intervención. Relación Una persona pesa 300 kg, con un 99 % de grasa. Se somete a una intervención para resolver su problema. En la primera revisión seguía teniendo una cantidad total de grasa del 98 %. Diagrama Modelo.

PENSAR Estrategias Modelización. Organización de la información.

EJECUTAR Podemos hacer una modelización de los pesos tomando como modelo de 10 kg un cubito de 1 cm^3 de volumen (centicubo) en las cantidades necesarias para representar los pesos antes y después de la intervención quirúrgica.

Para saber si es un éxito o un fracaso debemos saber cuánto peso perdió. Al principio tenía un 99% de grasa. O sea, que el 1% restante se corresponde con la masa de huesos, músculos, órganos, etc. De los 300 kg que pesaba en esos momentos, había 3 kg de materia no grasa (1%) y 297 kg de grasa (99%).

La materia no grasa no se elimina en la intervención quirúrgica. La bajada de peso se corresponde con lo eliminado en la intervención más lo perdido en la dieta posoperatoria. Es decir, el porcentaje de materia no grasa aumenta a medida que desciende el porcentaje de grasa. Con un 98% de grasa, la componente no grasa es ahora de un 2% para un peso de 3 kg.

El razonamiento ahora es bien simple. Como hay proporcionalidad, construimos una tabla.

% Materia no grasa	Peso total
1	
2	**100**
3	¿?
4	
5	

Bastará con buscar unas parejas de valores. Utilizaremos, de manera sencilla, un razonamiento que incorpore las propiedades de la proporcionalidad con respecto al producto y a la suma.

Materia no grasa	Peso total
1	50
2	**100**
2 + 1 = 3	100 + 50 = 150
3	**150**
4	200

O razonar como de costumbre en las proporciones:

PESO	PORCENTAJE GRASA	PESO GRASA	PORCENTAJE NO GRASA	PESO NO GRASA
300	99%	0.99·300 = 297	1% = 0.01·300	3
X	98%	0.98·X = X - 3	2% = 0.02·X	3

Luego 0.02·X = 3 y despejando la X, X = 3/0.02 = 150 kg.

O también de 0.98·X = X – 3 obtenemos la misma expresión: 0.02·X = 3.

Así que el peso de esta persona ha bajado desde los 300 kg hasta los 150 kg. Ha perdido la mitad del peso que tenía. El médico que realizó la intervención quirúrgica debe estar satisfecho, aunque aún el paciente tiene un buen problema por delante, seguir bajando de peso y no recuperar la grasa eliminada.

Solución: Fue un éxito.

RESPONDER Comprobación 98% de grasa → 2% de 150 = 2 x 150 / 100 = 3 kg materia no grasa; 3 kg/ 300 kg = 0,01 = 1% → 99% de materia grasa. Análisis Solución única.

Respuesta: **La intervención quirúrgica no fue un fracaso; al contrario, fue un éxito rotundo.**

El segundo había sido tomado de Carlo Frabetti, "*El diablillo de Einstein y otros enigmas perturbadores*", Alianza Editorial.

LA PARCELA TRIANGULAR

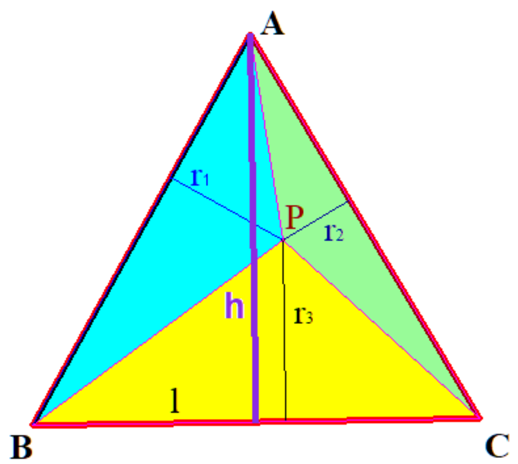
En una parcela limitada por tres tramos rectilíneos de carretera de la misma longitud, y con la misma densidad de tráfico, ¿dónde tenemos que construir una casa para que la suma de las distancias a las tres carreteras sea la máxima?
Justifica tu respuesta.

Proceso de Resolución

COMPRENDER Datos Una parcela limitada por tres tramos rectilíneos de carretera de la misma longitud, y con la misma densidad de tráfico. Objetivo: Dónde tenemos que construir una casa. Relación: La suma de las distancias a las tres carreteras debe ser máxima. Diagrama Dibujo del triángulo. Geoplano isométrico. Geogebra.

PENSAR Estrategias Modelización. Organización de la información.

EJECUTAR La parcela tiene forma de triángulo equilátero. Podemos usar el geoplano isométrico para construir el triángulo equilátero y elegir un punto cualquiera en su interior para calcular las tres distancias a los lados. Variar la posición del punto y estudiar qué ocurre con esas tres distancias (perpendiculares a los lados).



O mejor, hacer una construcción dinámica con Geogebra y realizar el mismo estudio. También podemos utilizar un dibujo del triángulo realizado con regla y compás. Sobre él elegimos un punto y trazamos las tres distancias a los lados.

Si unimos ese mismo punto a los tres vértices del triángulo, obtenemos tres triángulos. Cada uno de esos triángulos tiene como base uno de los lados y como altura la distancia correspondiente a dicho lado.

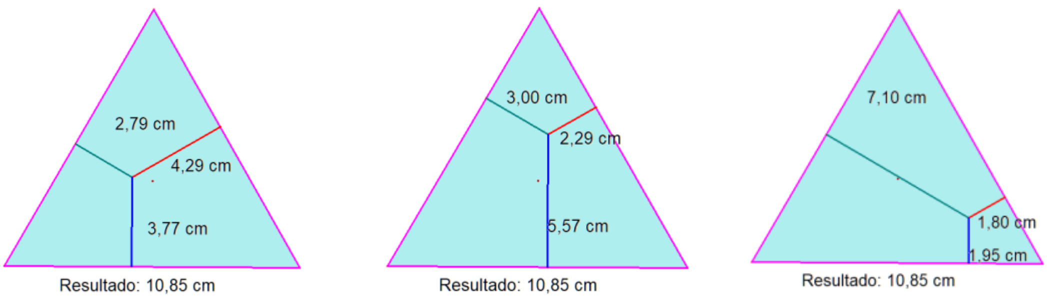
El área (S) del triángulo equilátero de la figura es la suma de los tres triángulos que obtendríamos al unir un punto cualquiera (P) con los tres vértices.

Si llamamos *l* al lado del triángulo y r_1, r_2 y r_3 a las distancias (alturas) de P a los tres lados,

$$S = \frac{l \cdot r_1}{2} + \frac{l \cdot r_2}{2} + \frac{l \cdot r_3}{2} = \frac{l(r_1 + r_2 + r_3)}{2}$$

por lo que la suma de las distancias ($r_1 + r_2 + r_3$) es constante e igual a la altura del triángulo, h, ya que $S = \frac{l \cdot h}{2}$.

Resulta entonces que no importa dónde se coloca el punto, la suma de las distancias a los tres lados es igual para cualquier punto elegido.



Solución: Cualquier punto.

RESPONDER

Comprobación La mejor comprobación sería la empírica, es decir, colocar tres puntos en diferentes partes de la parcela y hacer las tres mediciones correspondientes a las distancias a los lados desde dicho punto; la suma de las tres deberá dar la misma cantidad en los tres casos y, además, ser igual a la altura del triángulo.

Análisis Este resultado constituye el teorema de Viviani. Debe su nombre al matemático italiano Vincenzo Viviani (1622-1703) nacido en Florencia. Fue colaborador de Galileo Galilei.

El teorema se puede generalizar a cualquier polígono equiángulo o equilátero. Es un teorema con abundancia de demostraciones diferentes del mismo. También hay consecuencias interesantes sobre los segmentos determinados sobre los lados y sobre las áreas de los triángulos que se forman.

Hay una versión diferente de este problema que se ha hecho famosa después de su publicación por Clifford Pickover y dice así: Un surfista se encuentra viviendo en una isla con forma de triángulo equilátero. Quiere construir una cabaña de tal manera que las distancias a cada una de las costas sean mínimas, ya que le gusta surfear en las tres costas por igual.

Respuesta: **Cualquier punto del interior de la parcela cumpliría con la condición del problema**.

2. ÚLTIMOS RETOS

Y, naturalmente, las soluciones de los retos con problemas de Paenza que propusimos en el anterior artículo. Recordamos que dichos problemas fueron ligeramente adaptados en su enunciado con respecto a los originales. Las soluciones son del propio Paenza. Nosotros hemos añadido la estructura del proceso de resolución, así como algunas estrategias complementarias y unas pocas observaciones. No para enmendar la plana al maestro (¡Dios nos libre!) sino para dar continuidad a la intención con la que son escritos estos artículos. Esperamos que don Adrián Paenza y nuestros lectores nos disculpen por la licencia.

LAS GUARDIAS DE RECREO

Un centro escolar a principios de los años setenta del siglo pasado. Un grupo de cuatro profesores, a quienes voy a llamar A, B, C y D, decidieron encargarse de las guardias en los recreos del colegio. El encargo se hacía de manera semanal, pero con algunas condiciones que establecieron entre ellos.

Estas son las cuatro condiciones que decidieron cumplir:

• Los días en los que hacía guardia A, no la hacía B.

• Los días en los que hacía guardia B también la hacía D, pero no la hacía C.

• Los días en los que hacía guardia D, también la hacían A o B (o incluso los dos).

• Nunca hubo dos días iguales, es decir en donde se repitieran los profesores que salieron al patio de recreo para hacer la guardia.

En los siete días de la semana, ¿cuántos días estuvo de guardia D y con quién (o quienes)?

Proceso de Resolución

COMPRENDER Datos Un centro escolar a principios de los años setenta del siglo pasado. Un grupo de cuatro profesores (A, B, C y D) se encargan de las guardias en los recreos del colegio. Una semana. Objetivo: En los siete días de la semana, cuántos días estuvo de guardia D y con quién o quiénes. Relación: Los días en los que hacía guardia A, no la hacía B. Los días en los que hacía guardia B también la hacía D, pero no la hacía C. Los días en los que hacía guardia D, también la hacían A o B (o incluso los dos). Nunca hubo dos días iguales, es decir en donde se repitieran los profesores que salieron al patio de recreo para hacer la guardia. Diagrama Tabla.

PENSAR Estrategias Organizar la información de manera sistemática, Eliminar.

EJECUTAR Construiremos una tabla con todas de todas las maneras posibles de realizar las guardias por parte de los cuatro profesores. Puede haber guardias con los cuatro profesores juntos, con sólo tres de ellos, con sólo dos, con sólo uno o, incluso, con ninguno.

Para facilitar la creación de la tabla (con filas denominadas A, B, C, D, en ese orden, donde A, B, C y D son los profesores) usaremos una simbología eminentemente lógica, con el uso del 1 y el 0 (lenguaje binario), para representar la presencia o la ausencia de un profesor determinado.

Días		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª
Profesores	**A**	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	B	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	C	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	D	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Si en una columnas aparece, por ejemplo, (1, 0, 0, 1), esto significa que ese día estaban de guardia los profesores A y D, mientras que B y C libraron. De igual manera, la columna 16ª (1,1,1,1), significaría que, ese día, los cuatro profesores estaban de guardia simultáneamente; asimismo, la columna 1ª (0,0,0,0) expresa que ese día ninguno de los cuatro profesores hizo guardia de recreo.

Como en total hay cuatro profesores (A, B, C y D) que cada día pudieron (o no) haber hecho la guardia de recreo, entonces hay 2x2x2x2 = 2_4 = 16 permutaciones con repetición posibles. Ahora examinaremos, una a una, las diferentes relaciones del problema.

- Los días en los que hacía guardia A, no la hacía B.

Esta primera relación dice que las columnas que empiecen con un 1 en la primera fila (aquellas en las que A estaba de guardia) deben tener un cero en la segunda fila ya que si estaba de guardia A entonces no estaba B. Esto elimina las columnas empiezan con un uno y tienen un uno en la segunda fila, pero no asegura nada de las que empiezan por cero. Se eliminan así las columnas 13, 14, 15 y 16.

Días		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª
Profesores	**A**	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	B	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	C	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	D	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- Los días en los que hacía guardia B también la hacía D, pero no la hacía C.

Esta segunda relación dice que las columnas que resuelvan el problema que contengan un número 1 en la posición de B (o sea, si B estaba de guardia) tienen que tener un uno en B, un cero en C y un uno en D, pero no asegura nada de las que tienen un cero en B. Por lo tanto, se eliminan las columnas 5ª, 7ª y 8ª.

Días		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª
Profesores	**A**	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	B	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	C	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	D	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- Los días en los que hacía guardia D, también la hacían A o B (o incluso los dos).

En la última relación se dice que los días en los que hay un uno en la última fila (los que corresponden a que ese día D estaba de guardia), tienen que tener, al menos, un 1 en las dos primeras filas ya que los días que hacía guardia D también debían hacerla A o B o incluso los dos, además del 1 en la última fila. Esto hace que haya que eliminar las columnas 2ª y 4ª.

Días		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª
Profesores	**A**	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	B	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	C	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	D	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Después de estas eliminaciones, las únicas columnas que quedan con información correcta del problema son las columnas: 4ª, 7ª, 8ª, 9ª, 12ª, 14ª y 16ª.

Es decir, las guardias de recreo se distribuyeron así:

Días		1ª	3ª	6ª	9ª	10ª	11ª	12ª
Profesores	**A**	0	0	0	1	1	1	1
	B	0	0	1	0	0	0	0
	C	0	1	0	0	0	1	1
	D	0	0	1	0	1	0	1

Esto corresponde exactamente a siete días distintos en los que se cumplen todas las condiciones. Y no hay más. Por lo tanto, ahora podemos contestar a la pregunta del problema.

Solución El profesor D estuvo de guardia tres días. Una vez con A solamente, otra vez con B solamente y, una tercera vez, hizo la guardia acompañado por A y por C.

RESPONDER Comprobación Bastará con comprobar las siete columnas, una por una, para comprobar que se cumplen en cada una de ellas las tres relaciones del problema.

Días		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Total
Profesores	**A**	0	0	0	1	1	1	1	4
	B	0	0	1	0	0	0	0	1
	C	0	1	0	0	0	1	1	3
	D	0	0	1	0	1	0	1	**3**

Por ejemplo:

La última columna, | 1 | 0 | 1 | 1 | la 7ª, dice que ese día estaban de guardia A, C y D.

Ese día hizo guardia A, pero no la hizo B. Ese día en el que hizo guardia D, también la hizo A.

Repetir la verificación para cada una de las restantes filas.

Análisis Solución única. No es posible encontrar ninguna otra permutación de los cuatro profesores de guardia que respete las relaciones sin repetir alguna de estas siete filas.

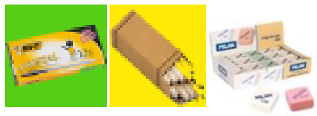
Es interesante notar que en uno de los días de la semana ninguno de los profesores estaba de guardia. Naturalmente, eso debió acontecer el domingo, día en que en ningún colegio es día lectivo.

También aparecen, curiosamente seis días de guardia y, por tanto, lectivos. Y hoy sabemos que, en España, los sábados no son lectivos. La duda se aclara cuando se lee con atención el problema y se ve que el centro escolar corresponde a principios de los años setenta del siglo pasado. En esa época sí se trabajaba los sábados en los colegios.

Respuesta: **El profesor D estuvo de guardia tres días. Una vez con A solamente, otra vez con B solamente y, una tercera vez, hizo la guardia acompañado por A y por C**.

INICIO DE CURSO

Existe la costumbre al principio de curso de pedir al alumnado que aporte el material suficiente para trabajar durante el curso. Se deposita en la clase y, a medida que se va gastando, se surten de él los alumnos que lo han aportado. El profesor a veces, previendo que habrá alumnos que no puedan aportar todo el necesario, pone de su bolsillo o del presupuesto escolar de aula una cierta cantidad de material básico. Supongamos que usted, profesor entró en un kiosco y compró tres tipos de materiales: lápices, bolígrafos y gomas de borrar. Juntando todo lo que compró, se llevó 30 cajas por las que pagó 30 euros. Se sabe, además, que compró por lo menos una caja de cada producto.
Cada uno de los productos venía envasado en su propio paquete y los precios por unidad estaban distribuidos de la siguiente forma:



a) Cada caja de bolígrafos costaba tres euros,
b) Cada caja de lápices costaba dos euros, y finalmente,
c) Cada caja de gomas de borrar costaba 50 céntimos.

¿Es posible determinar cuál fue la distribución de lo que compró? Es decir, ¿es posible determinar cuántas cajas de cada producto se llevó a su aula?

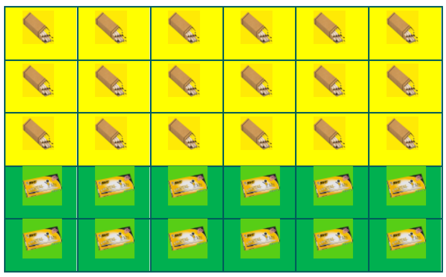
Proceso de Resolución

COMPRENDER Datos Se compran lápices, bolígrafos y gomas de borrar. Todo junto son 30 cajas por las que se pagan 30 euros. Cada caja de bolígrafos cuesta 3 euros. Cada caja de lápices cuesta 2 euros. Cada caja de gomas de borrar cuesta 50 céntimos. Objetivo Cuántas cajas de cada producto se compran. Relación Se compra por lo menos una caja de cada producto. Cada uno de los productos viene envasado en su propio paquete. Diagrama Modelo, Tabla, Partes/Todo.

PENSAR Estrategias Modelización, Ensayo y Error, Organizar la información de manera algebraica.

EJECUTAR

Mediante Modelización:



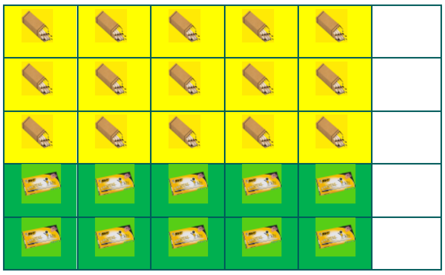
Usaremos como modelo las regletas. Con ellas representaremos el dinero gastado en comprar cada tipo de caja. La regleta blanca (1) para representar el coste de dos cajas de gomas de borrar, ya que han de ser siempre un número para al no haber decimales en el total final de euros. La regleta verde (3) para representar el coste de una caja de lápices. La regleta amarilla (5) para representar el coste de una caja de bolígrafos.

Como el coste total de la compra es de 30 euros, podemos utilizar una configuración plana de 5 x 6 cubitos (o cualquier otra descomposición en dos factores, 10 x 3 o 15 x 2, pero parece más útil la indicada).

Si pensamos en las cajas de bolígrafos y lápices, emparejadas, cada dos de ellas (una de cada) cuestan 3 + 2 = 5 euros. Repitiendo seis veces esa configuración, obtenemos el rectángulo de área 30.

Pero no nos serviría esta solución ya que así no se pueden comprar cajas de gomas de borrar. Tampoco se cumpliría con el número correcto de cajas compradas que ha de ser de 30. Sólo compramos 6 x 2 = 12.

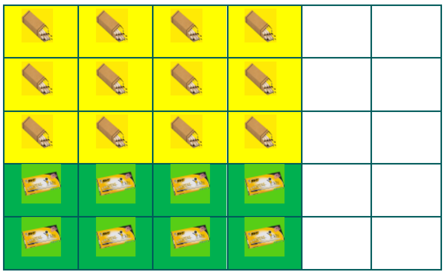
Es necesario comprar menos cajas de bolígrafos y lápices para poder comprar cajas de gomas de borrar.



Por cada pareja amarilla-verde que eliminemos (5 euros), podremos comprar 10 cajas (10 x 0,50) de gomas de borrar, o sea, cinco regletas blancas.

Si eliminamos una pareja:

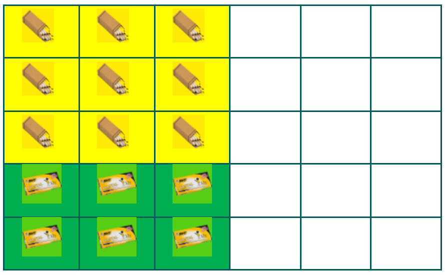
La cantidad total de cajas ahora es de 5 + 5 + 2 x 5 = 10 + 10 = 20. Insuficiente todavía.



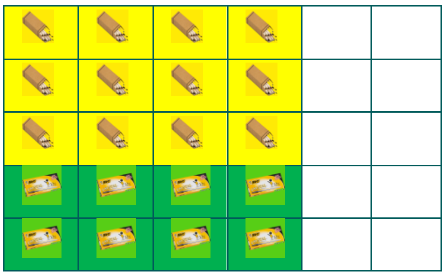
Eliminamos otra pareja:

La cantidad total de cajas ahora es de 4 + 4 + 2 x 10 = 8 + 20 = 28. Casi, pero insuficiente aún.

Eliminamos otra pareja:

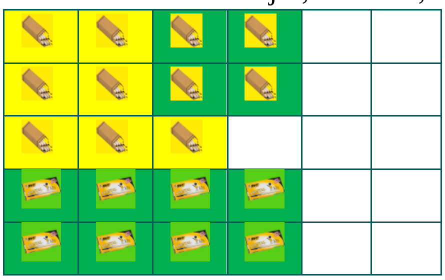


La cantidad total de cajas ahora es de 3 + 3 + 2 x 15 = 6 + 30 = 36. Se ha pasado. Por tanto, hemos de volver a la situación anterior y tener en cuenta que no podemos eliminar la pareja, sino uno solo de los componentes.



Hay dos opciones: cambiar la regleta verde por regletas más pequeñas o cambiar la regleta amarilla por regletas más pequeñas.

Si cambiamos la verde no hay más que una opción: habrá una caja de lápices menos y cuatro cajas de gomas de borrar más. Eso aumenta en tres la cantidad total de cajas, es decir, ahora hay 28 + 3 = 31 cajas. No es bueno.



Si cambiamos la amarilla hay dos opciones.

La primera, como la anterior, consistirá en cambiar una regleta amarilla por seis blancas, o sea, una caja de bolígrafos menos y doce cajas de gomas de borrar más. Un total de 28 + 11 = 39. La situación empeora.

La segunda consistirá en cambiar la regleta amarilla por una verde y una blanca, es decir, una caja de bolígrafos menos, una caja de lápices más y dos cajas de gomas de borrar más. Eso hace un total de 28 + 2 = 30. Correcto.

Recontando las regletas encontramos: 3 amarillas, 5 verdes y 11 blancas

Estos se traduce en términos de cajas a: 3 cajas de bolígrafos, 5 cajas de lápices y 22 cajas de gomas de borrar

Mediante Ensayo y Error:

Primero crearemos una tabla que nos estructure las informaciones del problema.

Gomas de borrar	Lápices	Bolígrafos	Costo Total 30 euros
x 0,50	x 2	x 3	+

Los 30 euros se completan con sólo 10 cajas de bolígrafos, o con 20 cajas de lápices o con 60 cajas de gomas de borrar. Pero ha de comprarse una caja, al menos, de cada tipo. Por lo tanto, la cantidad mayor de cajas ha de ir por el lado de las cajas de gomas de borrar. La cantidad de cajas de gomas de borrar ha de ser par, porque en el total no aparecen céntimos de euro. Cada 10 cajas de gomas de borrar se podrán convertir en una caja de bolígrafos y otra de lápices.

Gomas de borrar	Lápices	Bolígrafos	Costo Total 30 euros	Total cajas
x 0,50	x 2	x 3	x y +	+
50	1	1	25 + 2 + 3 = 30 euros	50 + 1 + 1 = 52

Aunque se satisface la cantidad de euros de coste, resulta una cantidad de cajas demasiado elevada. Probemos otra conversión de cajas de gomas de borrar en cajas de bolígrafos y de lápices.

Gomas de borrar	Lápices	Bolígrafos	Costo Total 30 euros	Total cajas
x 0,50	x 2	x 3	x y +	+
50	1	1	25 + 2 + 3 = 30 euros	50 + 1 + 1 = 52
40	2	2	20 + 4 + 6 = 30 euros	40 + 2 + 2 = 44
30	3	3	15 + 6 + 9 = 30 euros	30 + 3 + 3 = 36

En ambos casos se vuelve a satisfacer la cantidad de euros de coste, pero, aunque se ha reducido bastante, aún debe disminuir más.

Pero ahora no se puede repetir una conversión similar a las anteriores, porque se quedaría por debajo del número correcto de cajas.

Gomas de borrar	Lápices	Bolígrafos	Costo Total 30 euros	Total cajas
x 0,50	x 2	x 3	x y +	+
50	1	1	25 + 2 + 3 = 30 euros	50 + 1 + 1 = 52
40	2	2	20 + 4 + 6 = 30 euros	40 + 2 + 2 = 44
30	3	3	15 + 6 + 9 = 30 euros	30 + 3 + 3 = 36
20	4	4	10 + 8 + 12 = 30 euros	20 + 4 + 4 = 28

Por lo tanto, la conversión sólo se deberá realizar con uno de los dos tipos de cajas.

Convirtiendo 6 cajas de gomas de borrar en una caja de bolígrafos:

Gomas de borrar	Lápices	Bolígrafos	Costo Total 30 euros	Total cajas
x 0,50	x 2	x 3	x y +	+
50	1	1	25 + 2 + 3 = 30 euros	50 + 1 + 1 = 52
40	2	2	20 + 4 + 6 = 30 euros	40 + 2 + 2 = 44
30	3	3	15 + 6 + 9 = 30 euros	30 + 3 + 3 = 36
24	3	4	12 + 6 + 12 = 30 euros	24 + 3 + 4 = 31

Convirtiendo 4 cajas de gomas de borrar en una caja de lápices:

Gomas de borrar	Lápices	Bolígrafos	Costo Total 30 euros	Total cajas
x 0,50	x 2	x 3	x y +	+
50	1	1	25 + 2 + 3 = 30 euros	50 + 1 + 1 = 52
40	2	2	20 + 4 + 6 = 30 euros	40 + 2 + 2 = 44
30	3	3	15 + 6 + 9 = 30 euros	30 + 3 + 3 = 36
26	4	3	13 + 8 + 9 = 30 euros	26 + 4 + 3 = 33

En ambos casos se supera la cantidad de cajas. Habría que buscar una manera de realizar esta conversión sin que se produzca este exceso de cajas. La única forma será aumentando un tipo de caja y disminuyendo el otro. Es decir, quitamos 4 cajas de gomas de borrar y las convertimos en 1 de lápices.

Gomas de borrar	Lápices	Bolígrafos	Costo Total 30 euros	Total cajas
x 0,50	x 2	x 3	x y +	+
50	1	1	25 + 2 + 3 = 30 euros	50 + 1 + 1 = 52
40	2	2	20 + 4 + 6 = 30 euros	40 + 2 + 2 = 44
30	3	3	15 + 6 + 9 = 30 euros	30 + 3 + 3 = 36
26	4	3	13 + 8 + 9 = 30 euros	26 + 4 + 3 = 33
22	5	3	11 + 10 + 9 = 30 euros	22 + 5 + 3 = 30

Con lo que volvemos a obtener la solución del problema.

Este ensayo y error podría hacerse de muchas maneras diferentes, mediante el uso de otros razonamientos. Uno muy eficaz también podría ser de tipo sistemático.

Mediante Organizar la Información:

Representaremos B, L y G a la cantidad de cajas que hay de bolígrafos, lápices y gomas, respectivamente.

Los datos referidos a la cantidad de cajas, nos permite escribir: B + L + G = 30.

Por otro lado, los datos referidos a las cantidades de euros pagadas por las cajas, nos permite escribir también: (3·B) + (2·L) + (0,50·G) = 30.

Disponemos de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Es necesario realizar una composición de ambas igualdades a fin de tener únicamente una ecuación.

Multiplicando por 2 la segunda igualdad, obtenemos: 6 B + 4 L + G = 60, y restando de ésta la primera igualdad, obtendremos: 5 B + 3 L = 30.

De esta ecuación con dos incógnitas sabemos que los valores de las mismas han de ser números naturales, de lo cual deducimos que nos encontramos ante una ecuación diofántica.

Despejamos, por ejemplo, la incógnita L que representa a los lápices.

$$L = 10 - \frac{5}{3}\,B$$

Podemos utilizar una tabla para calcular el valor de L, dando sucesivos valores a B.

No olvidemos que hay al menos una caja de cada artículo, por tanto, B no puede ser cero. Para que se cumpla la condición anterior, B ha de ser múltiplo de 3, es decir, valdrá 3, 6, 9, 12, …

Para B = 3: $L = 10 - \frac{5}{3} \cdot 3 = 10 - 5 = 5$	Para B = 9: $L = 10 - \frac{5}{3} \cdot 9 = 10 - 15 = -5$
Para B = 6: $L = 10 - \frac{5}{3} \cdot 6 = 10 - 10 = 0$	Para B= 12: $L = 10 - \frac{5}{3} \cdot 12 = 10 - 20 = \cdots$

No es necesario seguir probando valores. No pueden resultar valores negativos. Por consiguiente, sólo hay una solución: hay 3 cajas de bolígrafos y 5 cajas de lápices.

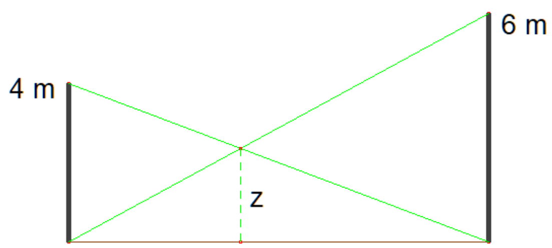
De la ecuación B + L + G = 30 deducimos: G = 30 – 3 – 5 = 30 – 8 = 22 cajas de gomas de borrar.

Solución 3 cajas de bolígrafos, 5 cajas de lápices y 22 cajas de gomas de borrar.

RESPONDER Comprobación 3 + 5 + 22 = 30 cajas en total; 3·3 + 5·2 + 22·0,50 = 9 + 10 + 11 = 30 euros. Análisis La solución es única.

Respuesta: **Ha sido perfectamente posible determinar la distribución de la compra. Se compran 3 cajas de bolígrafos, 5 cajas de lápices y 22 cajas de gomas de borrar**.

TORRES DE TELEFONÍA CELULAR



Suponga usted que hay dos torres de telefonía celular. Estas torres se erigen en forma vertical. No importa la distancia que hay entre una y otra,

pero lo que sí se sabe es que una mide seis metros y la otra cuatro.
Del extremo superior de cada una, sale un cable que llega hasta la base de la otra. Obviamente, esos cables tienen que cruzarse en alguna parte (ver Figura 1):
¿Puede deducir usted a qué altura del piso se cruzan? Mirando la figura, el problema consiste en determinar cuánto mide "Z".

Proceso de Resolución

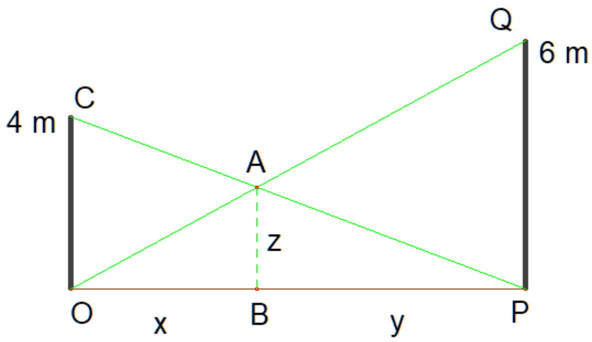
COMPRENDER Datos Dos postes verticales. No sabemos la distancia que hay entre uno y otro. Uno mide seis metros y el otro cuatro. Del extremo superior de cada una, sale un cable que llega hasta la base de la otra. Objetivo: Deducir a qué altura del piso se cruzan. Relación Los cables se cruzan en alguna parte. Cada cable junto con el poste y la distancia entre ambos forman un triángulo rectángulo. Diagrama Geoplano. Geogebra. Dibujo geométrico (el que acompaña el problema).

PENSAR Estrategias Modelización, Organizar la Información con técnica geométrica.

EJECUTAR Hay muchas formas de abordar el problema. La modelización puede resolver el problema perfectamente o, cuando menos, ayudar a entenderlo. Podemos utilizar un geoplano y representar en él la situación, colocando los postes a diferentes distancias entre sí. O realizar una representación en Geogebra, haciendo variables las alturas de los postes y la distancia entre ellos.

En cualquiera de los casos, habría que extraer conclusiones de lo observado para después conseguir encontrar la solución exacta.

Una forma es partir del dibujo que acompaña al problema y usar la semejanza de triángulos. Si observamos la Figura, a la que se ha añadido algunas letras para representar puntos (A, B, C, O, P, Q) y otras para representar segmentos (x, y), veremos unos cuantos triángulos en ella.



La letra A indica el lugar donde se cortan los cables, C es el extremo superior de la torre más baja, P es la base de la torre más alta y Q es el extremo superior de esa torre. La letra z, que ya aparecía en el dibujo original, sirve para medir la distancia desde A hasta el piso y es justamente la altura que queremos medir. Las letras x e y señalan, respectivamente, la distancia OB y la distancia BP, que conjuntamente indican la distancia entre las dos torres.

Desde la torre de la izquierda hasta la base de la torre de la derecha se forman los triángulos COP y ABP que son semejantes porque tienen los mismos ángulos, un lado superpuesto y el otro paralelo, CO y AB. Desde la torre de la derecha hacia la base de la torre de la izquierda también aparecen otros dos triángulos: OBA y OPQ, que también son semejantes por las mismas razones que los anteriores.

Con estos cuatro triángulos y las propiedades de semejanza, se deducen estas igualdades:

$$\frac{y}{z} = \frac{(x+y)}{4} \qquad \frac{x}{z} = \frac{(x+y)}{6}$$

Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Pero podemos hacer un cambio de variable: llamemos s = (x + y) y reemplazamos en las ecuaciones anteriores:

$$\frac{y}{z} = \frac{s}{4} \qquad \frac{x}{z} = \frac{s}{6}$$

Despejando x e y en estas dos igualdades tendremos:

$$y = \frac{s \cdot z}{4} \qquad x = \frac{s \cdot z}{6}$$

Pero como s = (x + y), usando esta igualdad y las anteriores:

$$s = x + y = \frac{s \cdot z}{4} + \frac{s \cdot z}{6}$$

Es decir: usando esta igualdad y las anteriores:

$$s = \frac{s \cdot z}{4} + \frac{s \cdot z}{6} = s \cdot z \qquad \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right\}$$

Que simplificada nos da $s = \frac{5s \cdot z}{12}$, o mejor: $1 = \frac{5z}{12}$

Despejando la z resulta ser z = 12/5 = 2,4 m

Sorprendentemente, la altura a la que se cortan los dos cables es de 2,4 metros.

El sistema de ecuaciones también podía haber sido resuelto sin el cambio de variable.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{x + y}{6} \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{x + y}{4} \end{cases}$$

Despejando en la segunda $x + y = \frac{4Y}{Z}$ $x = \frac{4y}{z} - y$

Sustituyendo en la primera:

$$x + y = \frac{6x}{z}; \qquad \frac{4y}{z} - y + y = 6\frac{\frac{4y}{z-y}}{z}; \qquad 4y = \frac{24y}{z} - 6y; \qquad 10y = \frac{24y}{z};$$

$$z = \frac{24y}{10y}; \qquad z = 2,4$$

Volvemos, pues, a la misma solución. Solución: 2,4 metros

RESPONDER Comprobación Si tomamos las proporciones iniciales y sustituimos en ellas el valor de z, obtendremos:

y / 2,4 = (x + y) /4 x /2,4z = (x + y) /6

Despejando y = 2,4 (x + y) / 4 x = 2,4 (x + y) / 6

Sumando x + y = 0,6 (x + y) + 0,4 (x + y) = x + y

P R O B L E M A S

Una auténtica tautología.

Análisis La altura a la que se cortan los cables ha sido totalmente independiente de la distancia que separa ambas torres. Si tenemos en cuenta que la figura que ilustra el problema representa un trapecio rectángulo al que le falta el cuarto lado, el oblicuo no paralelo, es curioso el hecho de que los cables son las diagonales del trapecio. Por lo tanto, la solución que acabamos de descubrir es una propiedad del punto de corte de las diagonales de un trapecio rectángulo.

Respuesta: **Los cables que anclan las torres se cruzan a 2,4 metros de altura.**

Hemos hablado abundantemente de MODELIZACIÓN como estrategia útil, ya sea para comprender, o bien, para resolver muchos problemas. En su día hicimos una descripción de esa estrategia y de su forma de aplicación. Pueden buscar en los NÚMEROS anteriores si quieren refrescar ideas.

Nosotros queremos poner un ejemplo de modelización para resolver de manera sencilla un problema aparentemente complicado: EL PAQUETE DE CARAMELOS. Este problema fue tratado en su día también, pero no mediante esta estrategia. Nos parece singular afrontar este problema por chicos.

EL PAQUETE DE CARAMELOS

En un paquete de caramelos, algunos son azules, otros son rojos y otros son verdes.
28 caramelos no son rojos.
39 caramelos no son azules.
31 caramelos no son verdes.
¿Cuántos caramelos de cada color hay en el paquete?
Explicad cómo habéis encontrado la respuesta.

Proceso de Resolución

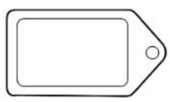
COMPRENDER Datos: Un paquete de caramelos, azules, rojos y verdes. Objetivo: Cuántos caramelos de cada color hay en el paquete. Relación 28 caramelos no son rojos. 39 caramelos no son azules. 31 caramelos no son verdes. Diagrama: Un modelo de los caramelos de la bolsa.

PENSAR Estrategias Modelización, Ejecutar

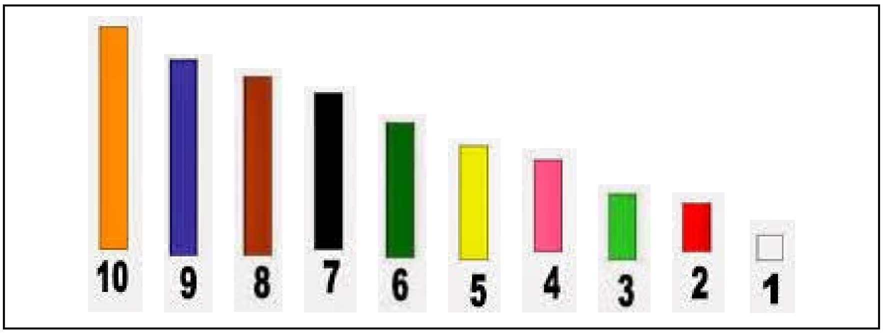
Utilizaremos como MODELO unos elementos que representen a los caramelos y unas tarjetas que representen a las ETIQUETAS de las distintas colecciones que se mencionan en el problema.

La mejor opción para los caramelos parecen ser las REGLETAS para evitar el manejo de mucho material.

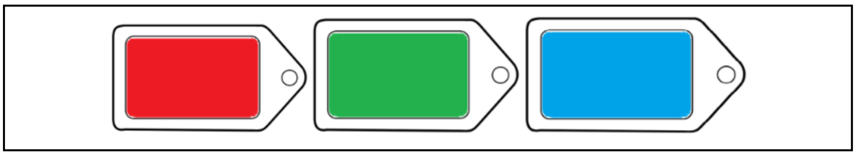
Para las etiquetas de las colecciones usaremos tarjetas con NOMBRES de los colores o los propios colores que caracterizan a cada colección.



Las regletas del 1 al 10

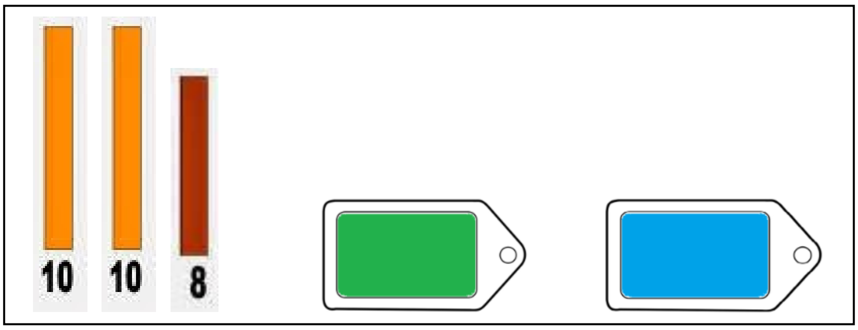


Las etiquetas de las colecciones de caramelos:



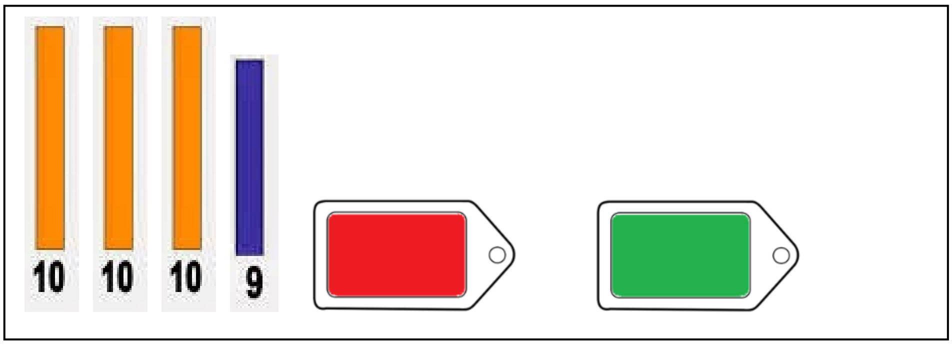
Estas tres etiquetas representan el contenido de la bolsa de caramelos.

28 caramelos no son rojos.



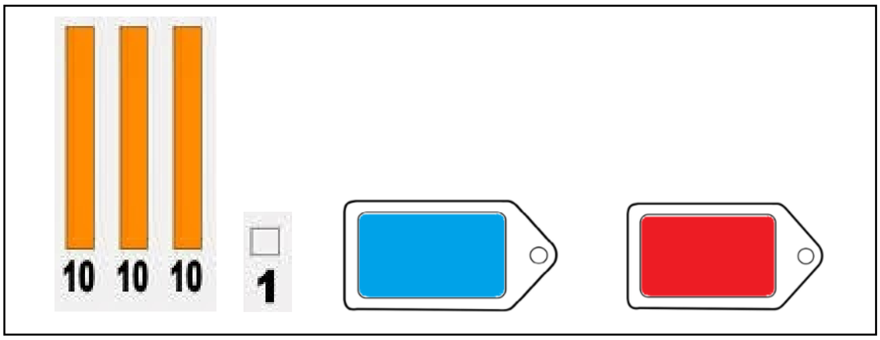
Equivalente a decir: Hay 28 caramelos de los cuales unos son azules y otros son verdes.

39 caramelos no son azules.



Equivalente a decir: Hay 39 caramelos de los cuales unos son rojos y otros son verdes.

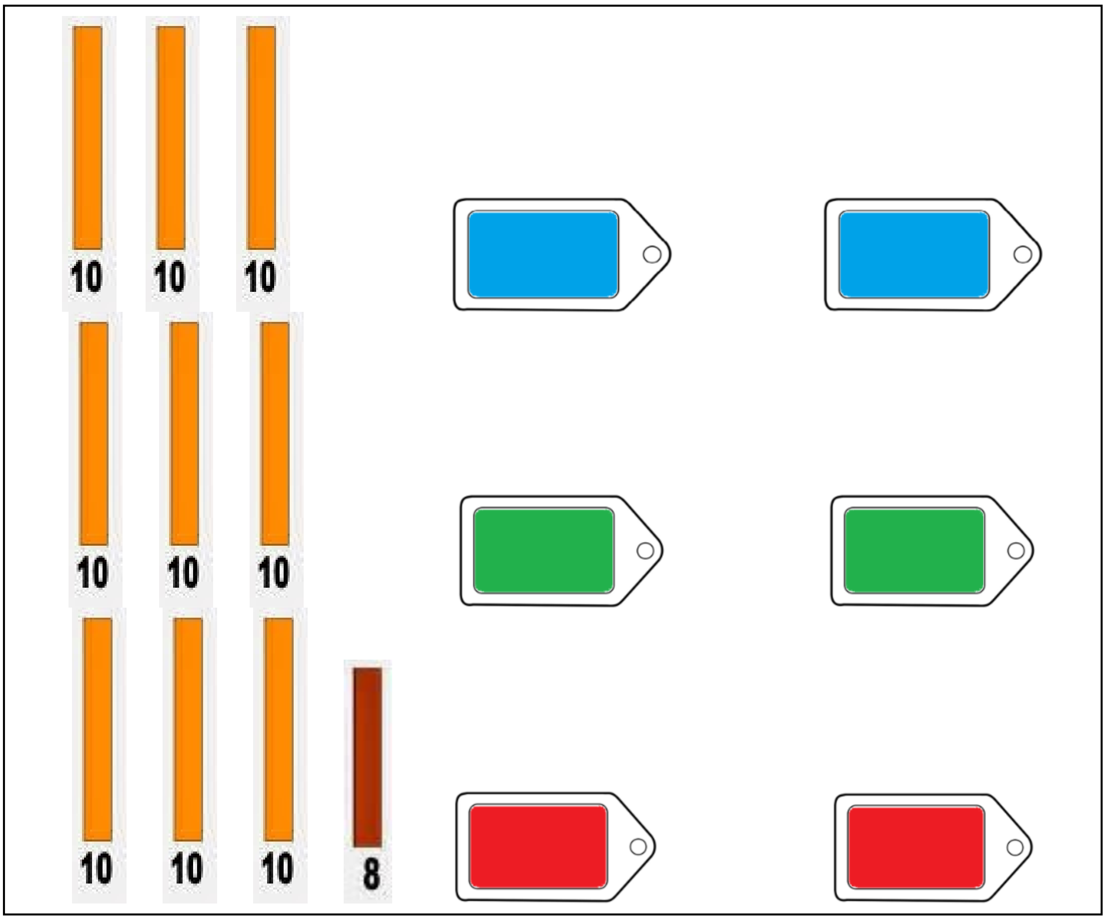
31 caramelos no son verdes.



Equivalente a decir: Hay 31 caramelos de los cuales unos son azules y otros son rojos.

Si juntamos las tres colecciones correspondientes a las tres relaciones del problema, obtenemos:

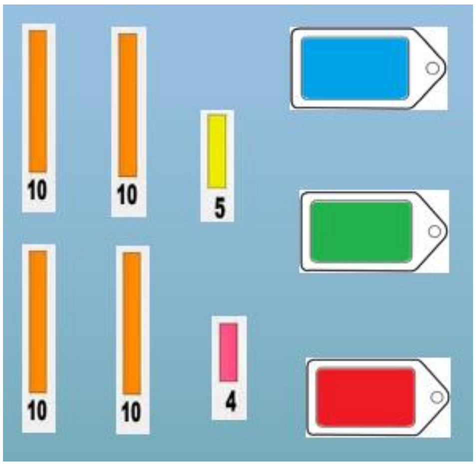
Si reorganizamos las regletas y ordenamos las etiquetas, obtenemos:

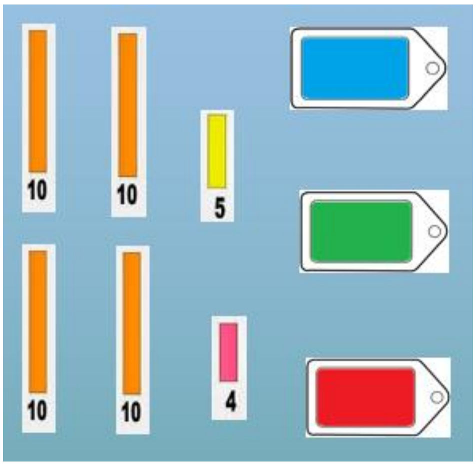


Es decir, hay 98 caramelos en esta nueva colección que no es la bolsa de caramelos.

Pero, curiosamente, observamos que las etiquetas de los colores están ¡duplicadas!

Eso significa que la colección original, la bolsa de caramelos, vale la mitad de la cantidad obtenida.



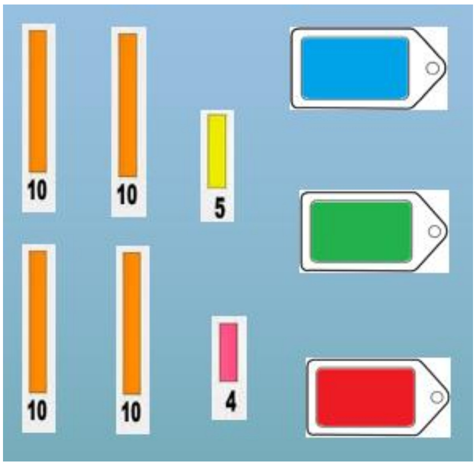


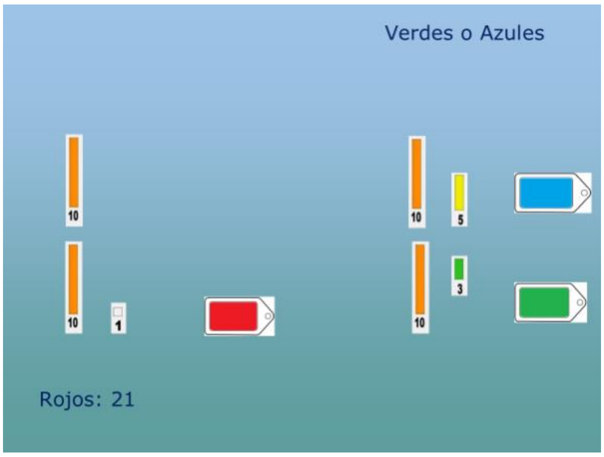
O sea, la bolsa original contiene 49 caramelos de los tres colores.

Ahora podemos volver a revisar las tres relaciones, una por una, y deducir la cantidad de caramelos de cada color.

28 caramelos no son rojos → Hay 28 caramelos de los cuales unos son azules y otros son verdes.

Si tomamos el total de caramelos de la bolsa y separamos los 28 que son azules o verdes, nos quedan los caramelos rojos:

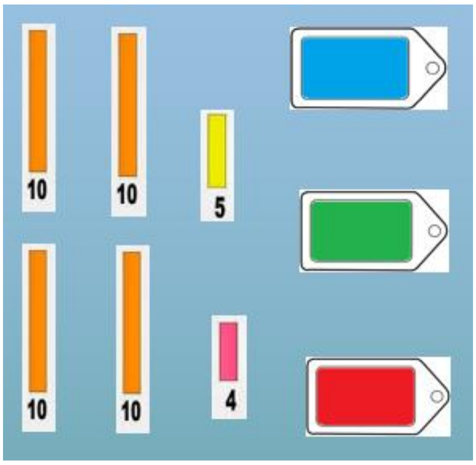


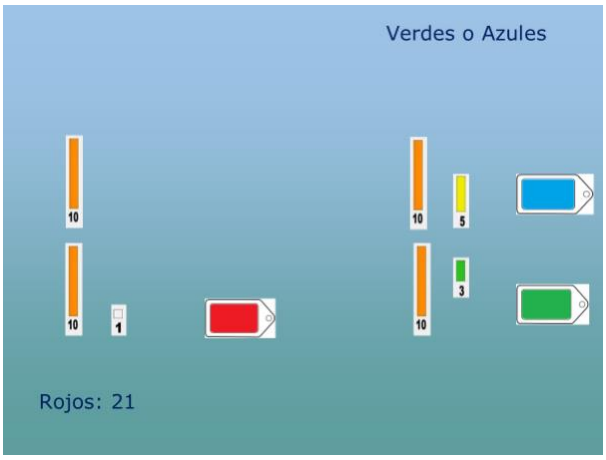


Seguimos con la segunda relación.

39 caramelos no son azules → Hay 39 caramelos de los cuales unos son rojos y otros son verdes.

Si tomamos el total de caramelos de la bolsa y separamos los 39 que son rojos o verdes, nos quedan los caramelos azules:

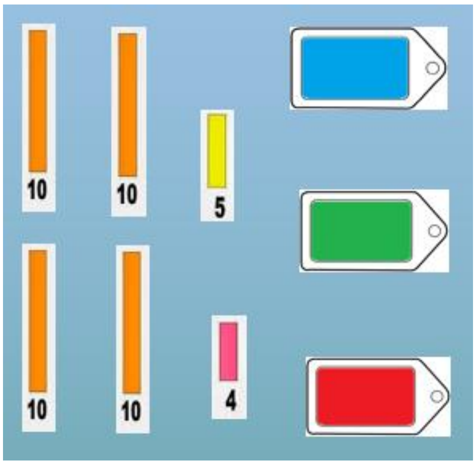


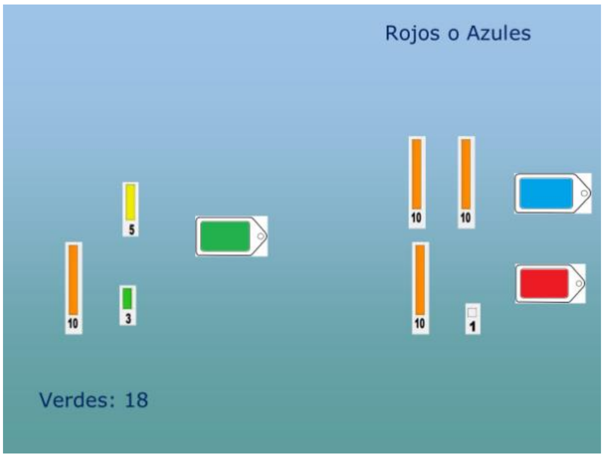


Terminamos con la tercera relación.

31 caramelos no son verdes ⟶ Hay 31 caramelos de los cuales unos son azules y otros son rojos.

Si tomamos el total de caramelos de la bolsa y separamos los 31 que son azules o rojos, nos quedan los caramelos verdes:





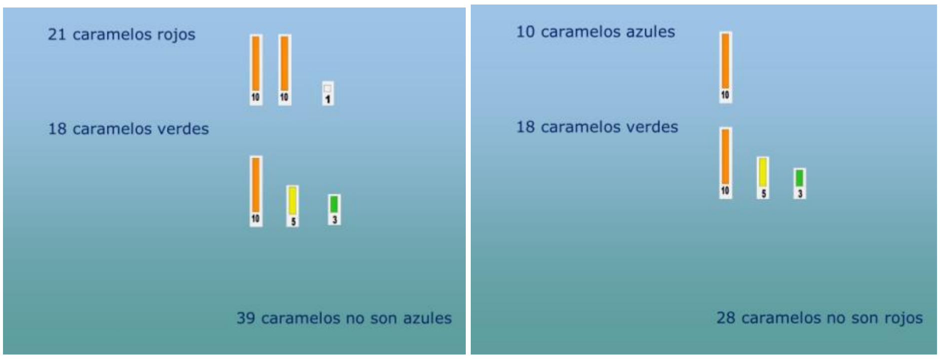
Solución

Hay 21 caramelos rojos, 10 caramelos azules y 18 caramelos verdes.

RESPONDER

Comprobación

Uniendo las tres colecciones de nuevo, obtenemos el total de caramelos de la bolsa y, además podremos ver que se cumplen las tres relaciones del problema.



Análisis La solución es única.

Respuesta: **En el paquete hay 10 caramelos azules, 18 caramelos verdes y 21 caramelos rojos.**

Queremos hacer unos comentarios sobre otras maneras de solucionar este problema.

Mediante ENSAYO Y ERROR:

Un alumno de 6º del CEIP Emeterio Gutiérrez Albelo encontró la solución mediante el uso de esta estrategia.

Lo razonó así:

28 caramelos no son rojos $\longrightarrow$ 28 = 10 + 18

39 caramelos no son azules $\longrightarrow$ 39 = 18 + 21

31 caramelos no son verdes $\longrightarrow$ 31 = 21 + 10

¡Es sorprendente!

A veces la intuición es un arma poderosa para resolver problemas. Gardner lo llamaba inspiración ¡Ajá! De Bono lo llamaba pensamiento lateral. Pero no deja de ser también una buena comprensión de la descomposición de números a partir de la manipulación de las regletas.

Mediante ORGANIZAR LA INFORMACIÓN:

Ya sabemos que esta estrategia, con diferentes técnicas permiten resolver el problema.

A) Mediante una técnica aritmética

Plantear un razonamiento aritmético.

39 + 28 + 31 ⟶ dos veces el total de caramelos

98 : 2 = 49 caramelos en la bolsa;   49 – 39 = 10; 49 – 28 = 21; 49 – 31 = 18.

También se puede llegar a la misma situación de la siguiente manera:

N – 28 rojos, N – 39 azules, N – 31 verdes → N – 28 + N – 39 + N – 31 = N

De donde, 2N = 28 + 39 + 31 → N = 98/2 → N = 49 caramelos tiene la bolsa.

B) Mediante una técnica algebraica

Plantear un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 28 = A + V \\ 39 = R + V \\ 31 = A + R \end{cases}$

De donde: A = 10   V = 18   R = 21

3. ANIVERSARIO DE LA FACULTAD

En el curso 1969–1970 se pusieron en marcha los estudios de la Licenciatura de MATEMÁTICAS en la Universidad de La Laguna. Se cumplen 50 años de los comienzos de estos estudios en esta Universidad. Es éste un buen momento para conmemorar dicha iniciativa y, como dice el propio Comité Organizador del evento, “poner en valor los logros conseguidos en este campo en nuestra región, poner de manifiesto las innumerables salidas profesionales que aporta a los egresados y reflexionar sobre lo que se debe hacer en el futuro para seguir creciendo en rigor y prestigio”.

La ULL y el Comité organizador de los Actos para la celebración del 50 aniversario de los estudios de matemáticas en la Universidad de La Laguna, han unidos sus fuerzas para crear un programa de actos a lo largo de todo el curso 2019-2020 para conmemorar tan esperada celebración. El día 14 de octubre arrancó el programa con un espléndido acto inaugural.

Es de destacar que, como no podía ser menos, nuestra Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas participa en el mencionado Comité en la persona de Luis Balbuena, miembro fundador de la Sociedad y activo dinamizador de la educación matemática. También hay participación de la Sociedad en muchas de las actividades programadas, con personas que intervienen en las actividades, creando actividades o cediendo espacios para celebrar algunas de ellas.

Mencionaremos ahora, sin extendernos en demasía, algunas de las actividades celebradas hasta ahora.

El 3 de octubre se celebró, de manera abierta a todos los públicos, una entrega especial de los Fisquitos Matemáticos con una selección de cuatro de ellos en El Ateneo de La Laguna.

La actual temporada de Fisquitos ha sido cerrada por Raúl Ibáñez, quien también ha dado una conferencia en La Orotava y presentado su último libro en la Casa Museo de la Matemática Educativa.

Durante el mes de octubre de 2019 se han expuesto en guaguas y tranvías 50 problemas matemáticos. Ha sido fundamental la colaboración de Metro Tenerife y Titsa para hacer posible que en el trayecto de ambos medios de desplazamiento los viajeros pensaran en la solución de dichos problemas.

Aunque ya se acabó la actividad, todos aquellos que quieran ver los problemas pueden obtener los enunciados y pistas para resolverlos en el siguiente sitio:

https://matdivu.webs.ull.es/50-problemas/

También en el periódico El Día y durante unas 32 semanas están apareciendo unas páginas dedicadas a la divulgación de las matemáticas. Entre otros artículos, aparecen semanalmente unos RETOS matemáticos en forma de problemas en una sección llamada EL RINCÓN DE PENSAR. Este y otros eventos pueden verse en esta dirección:

36
SOCIEDAD

50 ANIVERSARIO DE MATEMÁTICAS EN LA ULL

Los números de los estudios de Matemáticas en La Laguna

EL RINCÓN DE PENSAR

Carreras de caballos

LAS MATES QUE MUEVEN EL MUNDO

Criptoapocalipsis: ¿el fin de la seguridad en internet?

JUEGOS DE ESTRATEGIA

Nim 1-3-5-7

http://eventos.ull.es/36486/section/21853/50-aniversario-de-matematicas-en-la-ull.html

Asimismo ha habido actividades encuadradas bajo el nombre de MATEMAGIA. Para ello se contado con personal propio de la ULL que han atendido los diversos talleres impartidos y, además, se ha contado con la presencia de los dos máximos exponentes de esta materia en la Universidad española: Pedro Alegría y Fernando Blasco.

Además de sus intervenciones con alumnos en el Aula Magna de Matemáticas y Física, ofrecieron un espectáculo en el Convento de Santo Domingo, acompañados de José Antonio Rupérez.

Habrá muchas cosas más a lo largo del curso. Informaremos de ellas en nuestro próximo artículo, seguro.

Pero ahora toca plantear a nuestros lectores nuevos retos que atiendan su deseo de resolver problemas y mandarnos sus soluciones para ser publicadas en esta sección de la revista.

El primero procede de la XXVIII Olimpiada Matemática de Albacete. Lo tomamos prestado.

El segundo lo recogemos de la XVI Olimpiada Matemática Asturiana.

Vale la pena recordar que las Olimpiadas Matemáticas o Torneos se realizan por toda España, siempre a cargo de las diferentes Sociedades de Profesores que existen.

4.- EN EL ASCENSOR

Cuatro jugadores de rugby entran en un ascensor que puede trasportar un máximo de 380 kilos. Para que no suene una alarma, que detendría al elevador por exceso de carga, tiene usted que calcular su peso total con gran rapidez. Pero, ¿cuanto pesa cada jugador? He aquí los datos:

Pablo es quien pesa más: si cada uno de los otros pesara tanto como el, la alarma detendría el ascensor.

Carlos es el más ligero: ¡el ascensor podría subir a cinco como él!

Renato pesa 14 kilos menos que Pablo, y solo seis menos que Jesús.

Jesús pesa 17 kilos mas que Carlos. Los pesos de Pablo y de Carlos son múltiplos de cinco.

F.1 (14/16) Problema 6. REPARTIENDO CARAMELOS.

Vamos a repartir 1000 caramelos a tres parejas de hermanos (chico y chica) de la siguiente manera:

Las chicas reciben un total de 396 caramelos, de los cuales Maria obtiene 10 más que Diana, y Elena obtiene 10 más que María.

Guillermo Martínez obtiene el doble que su hermana, Enrique Hernández obtiene lo mismo que su hermana, y Juan Giménez obtiene un 50 por ciento más que su hermana.

¿Cuáles son los nombres completos (con apellidos) de las tres chicas?

.

Un tercer ejercicio adaptado de un libro que ya tiene unas cuantas décadas.

DESPACHANDO PEDIDOS.

Un trabajador de Amatón, a tiempo parcial, recibe cada día una cantidad de pedidos (P) que debe despachar lo antes posible (D). Pero está en prácticas y a veces se lía. El lunes despachó solamente alguno de los pedidos del día. El martes tuvo tantos pedidos como no había despachado el lunes, y despachó diez. El miércoles recibió doce pedidos más que el lunes, y despachó tantos como ese día. El jueves empeoró la cosa: recibió el triple de pedidos de los que había despachado el miércoles, y despachó solo ocho. El viernes llegaron seis pedidos y pudo despachar doce menos de los pedidos que recibió el miércoles. Tuvo que trabajar otro turno el sábado para despachar los catorce pedidos pendientes. ¿Cuántos pedidos le llegaron el lunes? ¿Cuántos despachó a lo largo de la semana?

(De “*Estrategias de pensamiento. Ejercicios de agilidad mental*”; de Larry E. Wood; Ed. Labor S. A. 1987.)

Y hasta aquí llegamos. Terminamos con nuestro mantra particular: resuelvan los problemas, singulares y alejados de los cotidianos; utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Nos repetimos: vamos, anímense… ¡Si es divertido!

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista .

Un saludo afectuoso del Club Matemático.

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista.

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**