Recibido: viernes, 14 de diciembre de 2007; revisado: miércoles, 30 de enero de 2008

ciencia ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 4, no. 1 (feb. 2008)

Cuerdas vibrantes y calor: la génesis del Análisis de Fourier

J.M. Almira
Departamento de Matemáticas
Universidad de Jaén
e-mail: jmalmira@ujaen.es

Pinche sobre una fórmula para ampliarla. Vuelva a pinchar sobre ella para reducirla, o pinche manteniendo pulsada la tecla [shift] para reducir todas las que permanezcan ampliadas.

Introducción

Cuando el 21 de diciembre de 1807 el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) presentó ante la Academia de Ciencias de París su *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*, es muy probable que éste no fuera consciente de la que se le venía encima. Fourier, que por otra parte era en esa época el Prefecto de la provincia de Isère, había trabajado en esta memoria a ratos perdidos -o, más bien, robados a sus múltiples obligaciones- y en ocasiones debió sentirse desfallecer. El objetivo de la memoria, como su propio título indica, era el estudio de la propagación del calor en un conductor, bajo diferentes hipótesis. Este problema quedaba fuera de los objetivos de la mecánica racional y la mecánica celeste, por lo que su investigación suponía abrir una nueva brecha en la ciencia de la época, inaugurar un nuevo y fecundo campo de estudio, además de introducir nuevas técnicas en el planteamiento de los problemas de la física matemática de la época (por ejemplo, distinguiendo el efecto de los fenómenos físicos en el cuerpo sólido según se esté considerando un punto interior al cuerpo o un punto de la frontera del mismo).

Fourier, inspirado en el trabajo anteriormente desarrollado por Daniel Bernoulli en relación a otro importante problema físico -el problema de la cuerda vibrante- había presentado en su memoria un método para el cálculo explícito de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que rigen el fenómeno de la distribución del calor. El empleo del método de Fourier-Bernoulli (actualmente denominado “método de separación de variables”) pasaba por descomponer cualquier función periódica con periodo T como una suma infinita del tipo

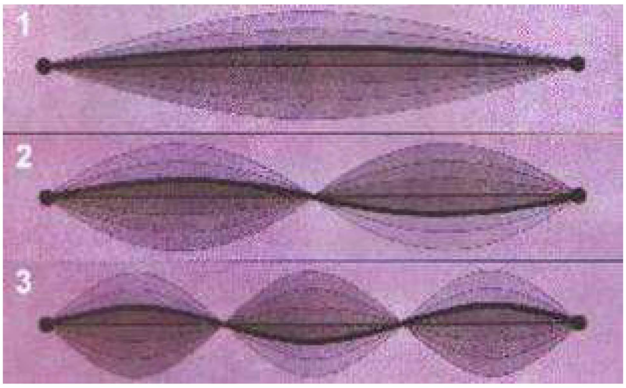
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{T},$$

y una de las aportaciones importantes de Fourier fue proporcionar una expresión explícita para los coeficientes a_i, b_i, afirmando la validez de su expresión para funciones “arbitrarias”. Es en este punto donde surgieron los problemas, porque algunos de los matemáticos de la Academia que debían juzgar el trabajo no estaban de acuerdo con buena parte de los argumentos presentados por Fourier y, sin embargo, tampoco tenían argumentos convincentes que probaran que estaba equivocado. Más bien al contrario, los resultados presentados encajaban a la perfección con las observaciones experimentales. Todo esto provocó una “acalorada” discusión que perduraría en el tiempo hasta casi la muerte de Fourier, en 1830 (sólo en 1829 J.P.G.L. Dirichlet (1805-1859) proporcionó un resultado que terminó por darle la razón). En el fondo, estos matemáticos estuvieron discutiendo largo tiempo sobre algunos conceptos que hoy consideramos básicos, como el concepto de función, o los distintos tipos de convergencia. Sin embargo, a principios de siglo XIX muchas de estas cosas estaban aún en el aire, a pesar de los importantes avances que se habían producido en matemáticas tras la introducción del cálculo diferencial e integral por Newton y Leibniz durante el siglo XVII. La aparición del Análisis de Fourier fue, sin duda, clave para el avance de la matemática y, como veremos, de la física y la ingeniería.

Pero vayamos por partes. Antes de explicar con detalle los logros de Fourier, será interesante conocer el ambiente en el que estos descubrimientos tuvieron lugar.

La física matemática del siglo XVIII: el problema de la cuerda vibrante

Fue Brook Taylor (1685-1731) quien, en 1715, propuso, en su obra *Methodus incrementorum directa et inversa*, el problema de la cuerda vibrante. Se trata de determinar el movimiento de una cuerda elástica así como el tiempo de vibración de la misma si ésta es tensada mediante la aplicación de cierta fuerza externa y luego se deja libre. Más precisamente: supongamos que tenemos una cuerda perfectamente tensada, de longitud L, elástica, pinchada en el origen de coordenadas $(0,0)$ y en el punto $(L,0)$, y supongamos que tiramos de ésta hasta que alcance la forma de la función $y = f(x)$ donde, por supuesto, hemos asumido que $f(0) = f(L) = 0$ y que $f(x)$ es una función continua. Si soltamos la cuerda y la dejamos oscilar libremente, ¿qué formas adoptará a lo largo del tiempo?



Para abordar el problema anterior es necesario fijar varias hipótesis, como son:

La cuerda oscila siempre verticalmente, esto es, cada punto de la cuerda está sometido a una vibración que siempre es perpendicular al eje de abscisas.

La cuerda es homogénea (es decir, su densidad lineal de masa es una constante ρ).

Denotemos por $u(x,t)$ la posición del punto de la cuerda correspondiente al valor x en las abscisas y en el instante de tiempo $t \geq 0$. En particular, $u(x,0) = f(x)$. Pues bien, es posible probar que la ecuación diferencial que describe el movimiento de la cuerda está dada por $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$ para cierta constante positiva a que depende de las características físicas de la cuerda.

Varios matemáticos se enfrentaron a esta ecuación, produciendo diversas formas de abordar su solución. Taylor había propuesto el problema tras estudiar algunas propiedades básicas de dicha solución. En particular, había demostrado ya en 1713 la existencia de soluciones periódicas con frecuencia $\upsilon = \frac{1}{2L}\sqrt{F/\rho}$, donde ρ denota la densidad lineal de masa, F es la tensión a la que está sometida la cuerda y L es su longitud (esta solución se corresponderá con el primer modo fundamental de la cuerda), pero no las había calculado porque en aquel momento no se disponía de una ecuación diferencial adecuada para describir el movimiento de la cuerda. El error fundamental de Taylor fue asumir que en cada punto la fuerza restauradora es proporcional a la distancia de éste al eje de abscisas, algo que fuerza a centrarse en el primer modo fundamental de vibración de la cuerda. En 1727 Johann Bernoulli abordó el problema como proceso límite a partir del movimiento de un número finito de cuentas de igual masa y colocadas equidistantes en una cuerda sin masa (es decir, con una masa despreciable en comparación a la masa de las cuentas), muy tensa -para que la posición de equilibrio sea una recta horizontal- y que se desplaza en $t = 0$ de su posición de equilibrio. Este problema es una versión discreta del problema de la cuerda vibrante y su solución pasaba por el establecimiento de cierta ecuación en diferencias. Johann cometió el mismo error que Taylor y, por tanto, no fue capaz de deducir resultados generales. Fue su hijo Daniel Bernoulli (1700-1782) quien por primera vez, y siguiendo el modelo del collar de cuentas introducido por su padre, adquirió conciencia de la existencia de un conjunto infinito de modos fundamentales de vibración. En particular, se percató de la existencia de soluciones oscilatorias muy complejas a las que no se podía asignar una frecuencia de vibración concreta.

Sin embargo, el primer matemático que proporcionó un modelo razonable para el estudio del problema de la cuerda vibrante y, en particular, el primero en deducir correctamente y resolver la ecuación de ondas, fue Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), en 1746. Él supo aprovechar la hipótesis de Taylor sobre las fuerzas restauradoras que intervienen en el problema conjuntamente con la segunda ley de Newton para deducir la ecuación

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$. Para abordar su solución, D'Alembert realizó los siguientes cálculos: Consideremos las funciones $p(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $q(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}$. Entonces la ecuación de ondas se expresa en términos de estas nuevas funciones como $\frac{\partial q}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)$. Ahora bien, si suponemos que $u(x,t)$ es de clase al menos dos, entonces un conocido resultado de cálculo de varias variables (el Lema de Schwarz) garantiza que $\frac{\partial q}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial p}{\partial t}(x,t)$, por lo que la expresión usual $dq = \frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial t}dt$ puede reescribirse como $dq = \frac{\partial p}{\partial t}dx + \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x}dt$. Si ahora tenemos en cuenta que $dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial t}dt$, resulta fácil comprobar que

$$d\left(\frac{p}{a}+q\right) = \left[\frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t}\right] d\left(x+\frac{t}{a}\right), \qquad d\left(\frac{p}{a}-q\right) = \left[-\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial x}\right] d\left(x-\frac{t}{a}\right).$$

Ahora bien, como

$$\begin{cases} x' &= x + \frac{t}{a} \\ t' &= x - \frac{t}{a} \end{cases}$$

define un cambio de variables, podemos interpretar que $\frac{p}{a}+q$ es una función que sólo depende de la variable $x+t/a$ y que $\frac{p}{a}-q$ depende sólo de $x-t/a$, lo que matemáticamente se expresa diciendo que existen dos funciones $\varphi(h), \phi(h)$ -dependiendo de una única variable- tales que

$$\begin{cases} \frac{p}{a}+q &= \varphi\left(x+\frac{t}{a}\right) \\ \frac{p}{a}-q &= \phi\left(x-\frac{t}{a}\right). \end{cases}$$

Despejando las funciones $p = \frac{a}{2}(\varphi(x+t/a)+\phi(x-t/a))$ y $q = \frac{a}{2}(\varphi(x+t/a)-\phi(x-t/a))$, y teniendo en cuenta que $du = pdx + qdt$, concluimos que

$$du = \frac{a}{2}\left(\varphi\left(x+\frac{t}{a}\right)d\left(x+\frac{t}{a}\right) + \phi\left(x-\frac{t}{a}\right)d\left(x-\frac{t}{a}\right)\right),$$

por lo cual

$$u = \frac{a}{2}\left(\Phi\left(x+\frac{t}{a}\right) + \Psi\left(x-\frac{t}{a}\right)\right),$$

donde $\Phi' = \varphi$ y $\Psi' = \phi$. Si además tenemos en cuenta que $u(0,t)=0$, resulta que $\Phi(t) = -\Psi(-t)$, y si ahora usamos que $u(L,t) = \frac{a}{2}(\Phi(L+t/a) - \Phi(t/a-L)) = 0$, resulta que Φ es forzosamente una función $2L$ -periódica. Así pues, las soluciones de la ecuación de ondas se expresan como suma de dos "ondas viajeras", cada una de las cuales va en sentido opuesto a la otra y con igual velocidad.

Nótese que, como $f(x)=u(x,0)=\frac{a}{2}(\Phi(x)-\Phi(-x))$, entonces es natural asumir que $f(-x)=\frac{a}{2}(\Phi(-x)-\Phi(x))=-f(x)$ y, por tanto, si admitimos que $f(x)$ y $\Phi(x)$ son funciones impares, entonces podremos despejar la función $\Phi(x)=\frac{1}{a}f(x)$ y llegar a que la solución general del problema de la cuerda vibrante está dada por $u(x,t)=\frac{1}{a}\big(f(x+t/a)+f(x-t/a)\big)$.

Una vez resuelto el problema de la cuerda vibrante, D'Alembert añadía la hipótesis adicional de que la función $f(x)$ debía estar dada en términos de una única expresión analítica (o fórmula), incluso para los valores de la incógnita que no pertenezcan al intervalo $[0,L]$, que es el lugar donde se ha planteado el problema físico. La razón para asumir esta hipótesis artificial era que D'Alembert estaba inmerso en la tradición leibniziana según la cual las únicas funciones continuas eran aquellas que hoy conocemos como funciones analíticas. Estas funciones tienen la particularidad de satisfacer un fuerte principio de identidad, según el cual, si conocemos una de estas funciones sobre los puntos de una sucesión convergente con límite un punto interior a su dominio de definición, entonces la conocemos allá donde ésta pueda estar definida en todo el plano complejo. El problema es que, al asumir tal grado de suavidad para la función $f(x)$, se estaban eliminando muchos casos físicamente posibles como, por ejemplo, el de una cuerda pulsada en forma triangular.

Euler (1707-1783) publicó entonces una nueva memoria sobre el problema de la cuerda vibrante, esta vez admitiendo como condición inicial funciones $f(x)$ definidas a trozos. Es decir, consideró la ecuación de ondas deducida por D'Alembert, pero admitía que la función $f(x)$ fuera representada mediante el uso de diferentes expresiones o fórmulas en las distintas partes del intervalo $[0,L]$. Curiosamente, Euler justificaba su teoría porque este tipo de funciones se obtienen fácilmente por medios físicos (mecánicos) y, como es evidente, el problema de la cuerda vibrante tiene sentido para ellas. Sin embargo, no aclaraba en qué sentido se pueden interpretar estas funciones desde el punto de vista estrictamente matemático como soluciones de una ecuación diferencial (la ecuación de ondas), pues ésta involucra ciertas derivadas que estas funciones no poseen en determinados puntos. Así pues, para justificar el uso de funciones tan generales fue necesario esperar hasta la llegada de la moderna teoría de distribuciones. Euler observó que, a partir de la periodicidad de $f(x)$, se deducía que la solución general $u(x,t)$ debía ser periódica en el tiempo, con periodo $2L\sqrt{\rho/F}$.

En 1753 Daniel Bernoulli publica otra memoria sobre el problema de la cuerda vibrante y en ésta hace explícito su desacuerdo con los derroteros que había tomado el trabajo de Euler y D'Alembert, acusándolos de haberse alejado del problema físico original y haber introducido técnicas muy complicadas del Análisis que en su opinión no aclaraban sino que, por el contrario, oscurecían la cuestión:

> "Admiro los cálculos de los señores D'Alembert y Euler, que ciertamente incluyen lo más profundo y avanzado del Análisis, pero muestran al mismo tiempo que un análisis abstracto, si se dirige sin un examen sintético de la cuestión propuesta, es más apropiado para sorprender que para iluminar. Me parece que prestar atención a la naturaleza de las vibraciones de las cuerdas basta para predecir, sin la realización de cálculo alguno, todo lo que estos grandes geómetras han encontrado mediante los cálculos más difíciles y abstractos que la mente analítica haya concebido jamás."

Bernoulli acudía entonces a la acústica para argumentar que ya en aquel momento era conocido que los cuerpos sonoros vibran en una serie de modos simples con frecuencias de oscilación bien definidas, y que en el caso de las cuerdas vibrantes los diferentes modos normales de vibración se obtienen a partir del modo fundamental forzando que las distintas frecuencias intervinientes sean siempre múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. En términos matemáticos, esto significa que Bernoulli afirmaba que

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\frac{k\pi at}{L}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L} \qquad (1)$$

para ciertas constantes A_k. Por supuesto, tanto Euler como D'Alembert rechazaron la idea de Bernoulli. Euler argumentaba que si admitimos la validez de (1) entonces tomando $t=0$ obtendríamos que $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\operatorname{sen}(k\pi x/L)$ y, por tanto, $f(x)$ debe ser periódica e impar, lo cual resulta una restricción innecesaria (absurda, según Euler) sobre la función. Por otra parte, reconocía que las expresiones anteriores eran soluciones de la ecuación de ondas, pero sólo representaban un tipo de las posibles soluciones de ésta y, además, estas mismas soluciones ya las había obtenido él mismo previamente. D'Alembert añadía la crítica de que para él ni siquiera estaba claro que toda función periódica e impar $f(x)$ se pueda representar como suma infinita de senos pesados. En particular, pensaba que la función debía ser al menos de clase dos.

Por su parte, Bernoulli respondía que, puesto que para un número finito de nodos $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ y para funciones arbitrarias $f(x)$, el sistema lineal de ecuaciones

$$f(x_i)=\sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}\frac{k\pi x_i}{L} \qquad (i=0,1,\ldots,n) \tag{2}$$

es soluble, y puesto que en la expresión bajo discusión hay implicados infinitos coeficientes, es natural pensar que esta identidad se pueda dar sobre un conjunto infinito de puntos de la recta.

Fue, sin embargo, Lagrange (1736-1813) el matemático destinado a desarrollar la teoría de interpolación con polinomios trigonométricos tanto para el caso de interpolación en nodos uniformemente espaciados como para nodos arbitrarios, demostrando de forma elegante que efectivamente (2) admite una única solución y calculándola explícitamente. En lo referente al problema de la cuerda vibrante, Lagrange se puso del lado de Euler, argumentando, a partir de la versión discreta del problema, que éste se podía resolver para funciones arbitrarias $f(x)$. Concretamente, si las masas se colocan equiespaciadas, en los puntos de la cuerda correspondientes con las abscisas $x_k = kL/n$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$, y denotamos por $u_k(t)$ la función que describe el movimiento de la cuenta k -ésima en términos temporales, dicho movimiento queda descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$u_k''(t)=\left(\frac{na}{L}\right)^2\left[u_{k+1}(t)-2u_k(t)+u_{k-1}(t)\right] \qquad (k=1,2,\ldots,n-1).$$

Lagrange resolvió este sistema de ecuaciones sometido a las condiciones

$$u_k(0)=f_k := f(x_k), \qquad u_k'(0)=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n-1).$$

Concretamente, demostró que

$$u_k(t)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f_j \operatorname{sen}\frac{i\pi x_j}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi x_k}{L}\cos\left(\frac{2nat}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi}{2n}\right) \qquad (k=1,2,\ldots,n-1). \tag{3}$$

Curiosamente, existe un argumento relativamente simple (ver [La, 26]) para, a partir de (3) y tomando $n\uparrow\infty$, deducir la expresión correcta para la solución de la ecuación de ondas con una función $f(x)$ general, que es la dada por

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(s)\operatorname{sen}\frac{i\pi s}{L}ds\right)\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\cos\frac{i\pi at}{L}$$

(y, de paso, para el cálculo de los "coeficientes de Fourier" de $f(x)$). Sin embargo, Lagrange no tomó este camino sino que, por el contrario, llegó a la expresión desafortunada

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\int_0^L\left(\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{i\pi s}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\cos\frac{i\pi at}{L}\right)f(s)ds,$$

que involucra una serie divergente, algo por lo que fue duramente criticado.

El siguiente paso de importancia en esta larga historia fue nuevamente dado por Euler quien, en 1777, observó que si $f(x)=F\left(\cos(\pi x/L)\right)$ para cierta función $F(z)$ analítica cuyo desarrollo en serie de potencias $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ es convergente para $z\in[-1,1]$, entonces, teniendo en cuenta que

$$\left(\cos\frac{\pi x}{L}\right)^k=\frac{1}{2^{k-1}}\sum_{i=0}^{[k/2]}\frac{k!}{i!(k-i)!}\cos\frac{(k-2i)\pi x}{L},$$

y sustituyendo en la expresión $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\cos(\pi x/L)\right)^k$, parece razonable esperar que la función $f(x)$ admita un desarrollo en serie del tipo

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{L} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Claro que esta simple observación no bastaba para obtener una expresión razonable para los coeficientes a_k. En una demostración de poderío, Euler fue capaz de deducir con exquisito rigor la fórmula correcta:

$$a_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(s)\cos\frac{k\pi s}{L}ds \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Para ello utilizaba, entre otras cosas, las relaciones de ortogonalidad satisfechas por los vectores

$$v_k=\left(\cos\frac{\pi x}{L},\cos\frac{2\pi x}{L},\ldots,\cos\frac{(n-1)\pi x}{L}\right) \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Además, una vez calculada dicha expresión, comenta que ésta podría haber sido hallada en base a las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^L \cos\frac{i\pi s}{L}\cos\frac{k\pi s}{L}ds=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad i\neq k \\ L/2 & \text{si} \quad i=k\geq 1 \\ L & \text{si} \quad i=k=0, \end{cases}$$

que es el método empleado usualmente en la actualidad para introducir las series de Fourier. Claro que Euler veía esto último sólo como un proceso heurístico para deducir la expresión de los coeficientes a_k.

La *Teoría Analítica del Calor*: Fourier entra en escena

Al parecer, antes de ocuparse del problema de la distribución del calor en sólidos conductores, Fourier había realizado algunas contribuciones al problema de la vibración de los cuerpos sonoros. En particular, se sabe que estaba bien familiarizado con la *Mecánica Celeste* de Lagrange y las contribuciones de Daniel Bernoulli al problema de la cuerda vibrante. Lo que no nos es conocido es cuándo y por qué orientó Fourier sus intereses hacia el problema de la distribución del calor, aunque es casi seguro que esto debió suceder alrededor de 1804, tras leer un trabajo de J.B. Biot (1774-1862) sobre el tema. En dicho artículo Biot estudiaba la evolución temporal de la distribución del calor en una barra metálica delgada y muy larga, cuando ésta se calienta desde uno de sus extremos. Biot asumía la conocida ley de enfriamiento de Newton, según la cual la cantidad de calor intercambiada por dos cuerpos que se ponen en contacto es proporcional a la diferencia de sus temperaturas. Sin embargo, su modelo no era correcto, como él mismo reconocería posteriormente. El problema básico es que Biot asumía el mismo tipo de intercambio de calor entre la superficie de la barra metálica y el aire que en el interior de la barra.

Al principio Fourier pensó que evitaría las dificultades con las que se encontró Biot proponiendo un modelo discreto que, aunque resultaba un tanto artificial, podía resolver con técnicas similares a las empleadas por Lagrange en el problema de la cuerda vibrante. Esto fue lo primero que hizo, y tuvo un éxito relativo porque, aunque fue capaz de deducir la expresión general de la solución e incluso demostró algunas propiedades cualitativas de la misma, en ésta aparecían ciertos coeficientes que no pudo hallar sino en ciertos casos especiales -para dos o tres masas-. (Curiosamente, sí pudo hacer las cuentas posteriormente para el problema discreto en un anillo, y esto le sirvió también para el cálculo de los coeficientes de Fourier).

Entonces decidió volver al problema en el caso continuo. En su primer intento, en 1806, llegó a la ecuación de difusión errónea

$$\frac{\partial u}{\partial t}=K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-hu,$$

pero pronto descubrió su error y, al distinguir el comportamiento del flujo del calor dentro del sólido y en sus puntos superficiales, llegó a la ecuación correcta, la cual es, para los puntos del interior del sólido,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Esta es la ecuación de difusión que incluyó en su memoria de 1807. Fourier estudió entonces el problema de la distribución estacionaria de temperaturas en una lámina semi-infinita cuya superficie lateral mantenemos a temperatura constante. La ecuación en juego es ahora $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, pues la estacionariedad se traduce en que $\frac{\partial u}{\partial t}=0$. Este fue el primer problema en el que Fourier empleó el método de separación de variables. Dicho método consiste básicamente en lo siguiente. Supongamos que la ecuación sólo depende de dos variables (la idea es esencialmente la misma cuando hay más variables en juego). Primero nos preocupamos de buscar soluciones $u(x,t)$ de la ecuación que atiendan a una descomposición de la forma $u(x,t)=X(x)T(t)$. Esto tendrá el efecto de transformar la ecuación en derivadas parciales (EDP) bajo consideración en una o varias ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución general hemos de buscar. A continuación, se afirma que toda solución de la ecuación que estamos tratando se expresa como superposición de las soluciones "especiales" que acabamos de hallar y, teniendo en cuenta las condiciones iniciales y de contorno del problema, se calculan los pesos asociados.

Vamos a hacer los cálculos para el caso de la ecuación del calor en el problema de una barra metálica homogénea y delgada, con superficie lateral aislante cuya distribución de temperaturas inicial es una función dada y cuyos extremos se mantienen constantes a temperatura cero, que es otro de los casos considerados por Fourier en su memoria. La EDP bajo consideración es $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, por lo que, si $u(x,t)=X(x)T(t)$ resuelve la ecuación, entonces $X(x)T'(t)=c^2X''(x)T(t)$ o, lo que es equivalente, $\frac{c^2X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)}$. Como las variables x,t no están ligadas por relación alguna, se sigue que, forzosamente, las expresiones que aparecen a ambos lados de la última igualdad son constantes e iguales entre sí. Esto permite reformular el problema como el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} X''(x)-\dfrac{\lambda}{c^2}X(x) & = & 0 \\ T'(t)-\lambda T(t) & = & 0. \end{cases}$$

La solución general de $T'(t)-\lambda T(t)=0$ es $T(t)=Ce^{\lambda t}$. Como el calor se disipa con el paso del tiempo, es evidente que $\lim_{t\to\infty}u(x,t)=X(x)\lim_{t\to\infty}T(t)=0$, por lo que necesariamente $\lim_{t\to\infty}T(t)=\lim_{t\to\infty}Ce^{\lambda t}=0$, es decir, $\lambda<0$. Por otra parte, la solución general de $X''(x)-\frac{\lambda}{c^2}X(x)=0$ es de la forma $X(x)=A\cos\sqrt{\frac{-\lambda}{c^2}}x+B\operatorname{sen}\sqrt{\frac{-\lambda}{c^2}}x$. Ahora bien, si imponemos las condiciones de contorno $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, éstas se traducen en el par de ecuaciones $X(0)=X(\pi)=0$, lo que nos lleva a $\frac{-\lambda}{c^2}=k^2$ y $X(x)=B\operatorname{sen}(kx)$ para cierto número natural k. Se sigue que $u(x,t)=Ce^{-\frac{k^2}{c^2}t}\operatorname{sen}(kx)$ y, por tanto, la solución general de la ecuación del calor para este problema concreto es de la forma

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k e^{-\frac{k^2}{c^2}t}\operatorname{sen}(kx). \tag{4}$$

Las "series de Fourier" aparecen en este contexto de forma natural, puesto que al sustituir $t=0$ en la expresión anterior, obtenemos que

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\operatorname{sen}(kx). \tag{5}$$

Esto significa que la afirmación de que toda solución del problema bajo consideración se debe expresar como superposición de las soluciones "especiales" de la forma $u(x,t)=X(x)T(t)$ conlleva la hipótesis de que toda función $f(x)$ definida en $[0,\pi]$ y satisfaciendo $f(0)=f(\pi)=0$ admite una representación del tipo (5). De hecho, ambas cosas son en gran medida equivalentes. Si probamos que la convergencia de la "serie de Fourier" es suficientemente buena, entonces podremos derivar término a término en (4) y comprobar directamente que ésta es solución de la ecuación del calor. Por otra parte, si $u(x,t)$ es una solución arbitraria de la ecuación del calor y, fijado $t \geq 0$, consideramos el desarrollo en serie de senos de $f_t(x) = u(x,t)$, entonces tendríamos que $f_t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\operatorname{sen}(kx)$. De nuevo, derivando término a término, sustituyendo en la ecuación del calor y utilizando la unicidad de los coeficientes de Fourier (siempre que justifiquemos que estas cosas son posibles -y, de hecho, lo son en muchísimos casos-), se comprobaría que $b_k(t) = b_k e^{-\frac{k^2}{c^2}t}$.

Este es sólo uno de los problemas (y, como ya hemos tenido ocasión de comentar, no el primero en aparecer) relacionados con la distribución del calor estudiados por Fourier en su memoria de 1807. En realidad el método de separación de variables funciona para muchas EDPs, aunque es necesario adquirir cierta habilidad para su aplicación en casos complejos.

¿De qué forma abordó Fourier el cálculo de los coeficientes b_k? Tomando el desarrollo de Taylor de $f(x)$ en el origen de coordenadas, sustituyendo los desarrollos de Taylor en el mismo punto de las funciones $\operatorname{sen}(kx)$, sustituyendo ambas expresiones en (5), reagrupando para que aparezca a ambos lados de la igualdad un desarrollo en serie de potencias e igualando los coeficientes de ambos desarrollos, se llega al sistema infinito de ecuaciones lineales dado por

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n k^{2n+1} b_k = f^{(2n+1)}(0) \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Fourier trunca el sistema -considerando solamente las primeras n variables b_k - y lo resuelve, hace $n \uparrow \infty$ y llega a la expresión

$$b_k = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{k+n+1} k^{-2n-1} f^{(2n)}(\pi),$$

que identifica como el resultado de iterar cierto número de veces el proceso de integración por partes de la expresión

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx.$$

Todos estos cálculos, explicados en detalle, se pueden consultar en [Ca].

Sea como fuere, el caso es que, antes de que Fourier presentara su memoria sobre la propagación del calor, ya se habían calculado numerosos desarrollos en serie de Fourier (es decir, desarrollos de la forma $f(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kwx) + b_k \operatorname{sen}(kwx)$). Sin embargo, las funciones intervinientes en dichos desarrollos habían sido siempre analíticas, y es precisamente para esta clase de funciones para la que no había dudas. Por otra parte, parece ser que Fourier desconocía la memoria de Euler de 1777, por lo que su método para deducir los coeficientes de Fourier de una función analítica son completamente distintos (y, admitámoslo, muy inferiores en lo que respecta al rigor) de los de Euler. Ahora bien, el mérito de Fourier fue que apostó por afirmar la desarrollabilidad en serie de Fourier para clases de funciones generales. Además, introdujo e hizo un uso sistemático del método de separación de variables y precisó numerosos aspectos básicos para el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

Con respecto a su afirmación sobre la generalidad de sus desarrollos en serie, la idea básica en la que se apoyó Fourier es que para el cálculo de los coeficientes

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx$$

no es necesario en absoluto suponer suavidad alguna sobre la función $f(x)$, sino que lo único imprescindible es asumir que el área encerrada por el grafo de $\frac{2}{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)$ entre las abscisas 0 y π, es finita. Esto suponía además una importante motivación para el estudio del concepto de integral, testigo que fue recogido primero por Dirichlet y luego por B. Riemann y H. Lebesgue, entre otros, y dio lugar a las modernas teorías de integración y, en parte, al nacimiento de la teoría de conjuntos de Cantor. De hecho, actualmente se suelen considerar aliados inseparables el Análisis de Fourier y la Integración de Lebesgue.

La memoria de 1807 contenía investigaciones para una amplia gama de situaciones. En particular, en ella se tratan el problema discreto para la barra y el anillo, las ecuaciones generales para el caso continuo en un sólido, el estudio de la lámina semi-infinita, el teorema de Fourier sobre la expansión en series trigonométricas con el cálculo de los coeficientes de Fourier por eliminación y utilizando la ortogonalidad de los modos normales de vibración, el estudio del anillo en el caso continuo, la transición del caso discreto al continuo para el anillo, la esfera, el cilindro y, finalmente, algunos experimentos.

Lagrange, Laplace y Monge: tres de los cuatro miembros del comité encargado de informar sobre la memoria de Fourier de 1807. (Del cuarto miembro, Lacroix, no existen imágenes disponibles).

Cuando terminó, Fourier debía sentirse feliz porque había resumido el trabajo de varios años y, además, había hecho brecha en un nuevo campo de la física, hasta entonces prácticamente inexplorado, y había estandarizado el método de separación de variables como herramienta fundamental para el tratamiento de una clase relativamente amplia de ecuaciones en derivadas parciales.

Sin embargo, la memoria tuvo una pésima acogida. Los matemáticos que debían estudiar el manuscrito eran Lagrange, Laplace, Monge y Lacroix. Para empezar, no emitieron informe alguno sino que depositaron en Poisson -el alumno estrella de Laplace- la tarea de redactar una breve reseña de las aportaciones de Fourier, reseña que apareció en el número de marzo de 1808 del *Bulletin de la Société Philomathique* y en la cual simplemente se resume muy brevemente el trabajo de Fourier, sin aportar crítica alguna. Sin embargo, algo podemos decir sobre las críticas recibidas sobre la base de las distintas cartas de réplica con las que Fourier se defendió. Al parecer, Lagrange no veía clara la deducción de Fourier de la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen}(nx) = \frac{x}{2} \qquad (-\pi < x < \pi),$$

aunque ésta era correcta. Además, criticó no mencionar los trabajos de sus predecesores, en particular, el de Euler. A esto último Fourier replicó que no había citado el trabajo de Euler porque no lo conocía, pero que en cualquier caso sus resultados tenían mayor importancia y generalidad y, añadía:

> “Si tuviera que mencionar algunos trabajos, éstos hubieran sido los de usted, pues éstos los he leído cuidadosamente en el pasado y contienen multitud de elementos similares a los que he utilizado yo mismo.”

Por su parte, Laplace objetaba que al ser los senos funciones impares, el desarrollo en serie de senos debía estar asociado forzosamente a una función impar. A esto Fourier respondía que eso no era problema si la igualdad de la función y la serie se restringía al dominio adecuado y, además, observaba que efectivamente todas las series que él había calculado eran convergentes. Además, Laplace no estaba de acuerdo con la derivación de la ecuación del calor (aunque por lo visto sólo había leído la primera propuesta de Fourier de 1806, que aún era errónea y que éste había enviado tanto a Laplace como a Biot) y de hecho él mismo derivó la ecuación en un trabajo posterior en el que incluía el siguiente comentario:

> “Debo observar que el Sr. Fourier ya ha obtenido estas ecuaciones, cuyo auténtico fundamento me parece es el que acabo de presentar.”

Sin embargo, Fourier supo sacar provecho de los cálculos presentados por Laplace, puesto que éstos motivaron una fructífera discusión entre ambos a raíz de la cual Fourier introdujo, en el tratamiento del problema del calor para un sólido infinito, el operador que actualmente denominamos transformada (o integral) de Fourier y gracias al cual es posible tratar funciones no periódicas en el dominio de la frecuencia.

La idea básica, en términos modernos, es la siguiente: supongamos que la función $f(x)$ está definida en toda la recta real y es aperiódica. ¿Cómo podemos aprovechar las series de Fourier para obtener una representación en frecuencia de esta función? El primer paso es considerar, para cada $T > 0$, la función $f_T(x) = f(x)$ para $x \in [-T, T]$ y extenderla $2T$ -periódicamente. Entonces calculamos el desarrollo en serie de Fourier de $f_T(x)$. Este desarrollo, si converge, debe coincidir con $f(x)$ en $[-T, T]$. Finalmente, hacemos $T \uparrow \infty$. ¿Qué sucede entonces? Pues bien, los coeficientes de

Fourier de la función $f_T(x)$ dan la descripción en frecuencias de $f(x)$ para $x \in [-T,T]$ y, además, están dados (en su versión compleja, la cual resulta de sacar a colación la famosa fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}x$) por las expresiones $c_k(f_T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{\pi kix/T}dx$. Ahora bien, para T suficientemente grande y bajo la hipótesis de que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$, podemos asumir que $2Tc_k(f_T) \cong \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\pi kix/T}dx = F(-\pi k/T)$, donde $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$ es la función a la que llamamos transformada de Fourier de $f(x)$. Como es natural, había que demostrar que una vez conocemos la transformada $F(\xi)$, es posible recuperar la función inicial $f(x)$. La aperiodicidad de $f(x)$ se vería entonces reflejada en el hecho de que, al variar tanto $T \geq 0$ como los enteros $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, los valores $\frac{\pi k}{T}$ recorren todo el continuo numérico y, por tanto, la descripción de $f(x)$ en términos frecuenciales requiere el uso de todas las frecuencias del continuo. Fourier, siguiendo los cálculos que acabamos de esbozar, estableció la siguiente fórmula integral:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$

Por supuesto, esta fórmula es válida siempre que impongamos ciertas condiciones sobre $f(x)$ y sobre la forma en la que interpretamos la integral impropia. Por otra parte, la aplicación que nos lleva $f(x)$ a $F(\xi)$ tiene ciertas propiedades formales que comparte con (¿o hereda de?) los coeficientes de Fourier y que son especialmente útiles para las aplicaciones.

Hay que decir que mientras que las "series de Fourier" eran viejas conocidas a principios del siglo XIX, la nueva técnica de las integrales de Fourier sí debe ser considerada creación exclusiva de éste.

En la Academia eran conscientes de la importancia del problema de la distribución del calor, así como de los avances significativos que Fourier, Biot, y otros estaban realizando en este tema. Es por ello que decidieron que la temática propuesta para el Gran Premio que debían conceder para 1812 fuera precisamente el estudio de la propagación del calor en sólidos conductores. Como era de esperar, Fourier se presentó al premio con una memoria en la que, además de revisar lo realizado hasta 1807, incluía sus nuevos cálculos con la integral de Fourier.

El jurado, compuesto por Lagrange, Laplace, Lacroix, Malus y Haüy, concedió el premio a Fourier, pero decidió que el trabajo no sería aceptado para su publicación en las *Memorias* de la Academia porque carecía del rigor y la generalidad necesarios. Fourier, que estaba resentido con la Academia por el trato dado a su obra fundamental, decidió finalmente publicar sus investigaciones por sí mismo en 1822 en un volumen al que tituló *Teoría Analítica del Calor*. Curiosamente, ese año fue nombrado secretario perpetuo de la Academia y entonces vio el cielo abierto, publicando en las *Memorias* el trabajo que había sido premiado en 1811, y que llevaba por título *Teoría del movimiento del calor en los cuerpos sólidos.* Este trabajo apareció en dos partes, la primera en las *Memorias* correspondientes a 1819/20 y la segunda en las de 1821/22 (que vio la luz en 1826). En el prólogo de su *Teoría Analítica* el propio Fourier explicaba las idas y venidas de su obra, reconociendo finalmente que

> "Los retrasos en la publicación [de mi obra] habrán contribuido a hacer el trabajo más claro y más completo."

La *Teoría Analítica del Calor* es considerada actualmente una de las obras maestras de la ciencia y la tecnología y, para los físicos, es sin duda uno de los documentos fundacionales de la física teórica. El impacto que ha tenido el Análisis de Fourier sobre las matemáticas, la física y las distintas ingenierías está fuera de duda y, de hecho, muchos pensamos que la ciencia y la tecnología modernas no hubieran sido posibles sin el desarrollo correcto de las ideas de Fourier.

El teorema de Dirichlet

La persona encargada en demostrar de forma precisa que la serie de Fourier de una función converge puntualmente (y, de hecho, uniformemente sobre ciertos compactos) para una clase amplia de funciones, incluyendo funciones con discontinuidades de salto, fue Dirichlet. El teorema es el siguiente:

> **Teorema (Dirichlet, 1829).** Supongamos que $f(x)$ es T -periódica, continua a trozos y con primera derivada continua a trozos. Entonces
>
> $$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

donde

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{\frac{2\pi ikx}{T}}$$

denota la suma parcial k -ésima de la serie de Fourier de $f(x)$, siendo la convergencia uniforme sobre compactos que estén contenidos en el interior de la región de continuidad de $f(x)$.

La demostración se apoyaba en ciertos cálculos realizados previamente por Fourier -que fue, junto con Poisson, su director de tesis, aunque ésta, defendida en la Universidad de Bonn en 1827, versaba sobre el último teorema de Fermat, un tema alejado de las series de Fourier-. La idea clave es conseguir una expresión cerrada para $S_N f(x)$, es decir, una expresión en la que desaparezca el sumatorio y éste sea sustituido por alguna función sencilla dependiente de $f(x)$ y de N a la que podamos aplicar las técnicas habituales del Análisis para obtener acotaciones, etc. En realidad esto no es excesivamente complicado de lograr; de hecho, es una sencilla consecuencia de la identidad $1+z+\ldots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ y la fórmula de Euler, que

$$S_N f(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(x-t)(N+1/2)}{T}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x-t)}{T}\right)}dt,$$

la cual es la expresión cerrada que buscábamos (la prueba al completo puede consultarse, por ejemplo, en [Al]).

Una vez demostrado el teorema de Dirichlet, la balanza se puso completamente del lado de Fourier y Daniel Bernoulli. Los matemáticos aceptaron finalmente que las series de Fourier eran un instrumento adecuado para la representación de funciones muy generales y, además, tomaron conciencia de la profundidad de las ideas defendidas por Fourier y la enorme cantidad de cuestiones abiertas interesantes que aún quedaban por resolver. La primera de todas: ¿cuál es la verdadera extensión de la clase de funciones para las que la serie de Fourier y la transformada de Fourier son convergentes?

Reconocimientos

Deseo mostrar aquí mi agradecimiento a los profesores J.M. Méndez y J. Duoandikoetxea porque ambos han leído una versión preliminar del artículo y han realizado importantes sugerencias para mejorarlo. Por otra parte, el profesor J.C. Sabina de Lis me indicó la existencia de la referencia [Da], la cual ha sido fundamental para la elaboración de este trabajo.

Referencias

[Al] ^ J.M. Almira: *Matemáticas para la recuperación de señales: una introducción*. Grupo Editorial Universitario, Granada, 2005.

[Ca] ^ A. Cañada: Fourier y sus coeficientes. *Boletín SEMA* 36 (2006), 125-148.

[Da] ^ O. Darrigol: The acoustic origins of harmonic analysis. *Archiv. Hist. Exact Sci.* 61 (2007), 343-424.

[Du] J. Duoandikoetxea: 200 años de convergencia de las series de Fourier. *La Gaceta de la RSME* 10 (2007), 651-677.

[Gr] I. Grattan-Guinness: *Joseph Fourier, 1768-1830*. The MIT Press, 1972.

[He] J. Herivel: *Joseph Fourier, the man and the physicist*. Clarendon Press, 1975.

[Ka] J.P. Kahane: El retorno de Fourier. *La Gaceta de la RSME*, 10 (2007), 678-688.

[La] ^ R.E. Langer: Fourier's series: The genesis and evolution of a theory. *Amer. Math. Monthly* 54 (1947), 1-81.

[Lo] P. López Rodríguez: *Vibración de una cuerda*, http://euler.us.es/~plopez/vibracion-de-una-cuerda.htm

[Lu] N.N. Luzin: Función. *La Gaceta de la RSME* 6.2 (2003), 415-436 [Traducción al castellano de J.M. Almira y D. Arcoya].

[MT] *The MacTutor History of Mathematics archive,* http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history.

[MA] Mathematics Archives: *Topics in Fourier Analysis and Wavelets,* http://archives.math.utk.edu/topics/fourierAnalysis.html

Sobre el autor

J.M. Almira es profesor titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén, donde imparte clases a ingenieros de telecomunicación. Cursó sus estudios de licenciatura y doctorado en la Universidad de La Laguna y ha sido profesor en las Universidades de Granada y Jaén. Aunque su principal línea de investigación es la teoría de aproximación y el análisis funcional, también ha publicado sobre otros temas como ecuaciones diferenciales, ecuaciones funcionales, análisis armónico, geometría algebraica, historia de la matemática, etc. Además, ha realizado numerosas traducciones al español de artículos sobre historia y filosofía de la matemática y últimamente ha publicado una biografía de David Hilbert. Su afición más enraizada es la búsqueda de nuevas demostraciones de los resultados clásicos del álgebra o el análisis. Actualmente está enfrascado en la elaboración de una biografía de Norbert Wiener y un ensayo sobre la importancia del análisis armónico en la matemática y en el resto de ciencias e ingenierías, que llevará por título *La magia de las ondas*.