NOTAS DE CLASE

Por JUAN ANTONIO GARCIA CRUZ

Se propuso a los alumnos el cálculo de la primitiva de la función arc tg x. La mayoría empleó el método de integración por partes ($\int u\,dv = uv - \int v\,du$), llamando u = arc tg x y dv = dx, y obtuvo

$$x \text{ arc tg } x - \ln\left|\sqrt{1 + x^2}\right| + \text{Cte.}$$

Habíamos pasado ya al siguiente problema, cuando uno de los alumnos me enseñó, un tanto contrariado, el resultado obtenido por él, que no coincidía en la forma con el anterior. Había procedido así:

$y = \text{arc tg } x$; $x = \text{tg } y$; $dx = (1 + \text{tg}^2 y)\,dy$ luego, $\int \text{arc tg } x\,dx = \int y\,(1 + \text{tg}^2 y)\,dy$. A continuación aplicó el método de integración por partes, llamando $u = y$, $dv = (1 + \text{tg}^2 y)\,dy$ obteniendo $y \text{ tg } y - \int \text{tg } y\,dy = y \text{ tg } y + \ln|\cos y| + \text{Cte.}$ y, finalmente,

$$\int \text{arc tg } x\,dx = x \text{ arc tg } x + \ln|\cos \text{arc tg } x| + \text{Cte.}$$

He aquí el por qué de la perplejidad del alumno. Primeramente le sugerí la posibilidad de llegar de su resultado al primero aplicando fórmulas trigonométricas; pero, a renglón seguido, se me ocurrió una idea: La mayor parte de los teoremas que explicamos, sobre todo en COU, son de muy poca aplicabilidad para nuestros alumnos; sin embargo, aquí había una ocasión de mostrar la de un teorema sencillo, de esos que llamamos triviales. Le sugerí que calculara la derivada de $-\ln\left|\sqrt{1 + x^2}\right|$ y de $\ln|\cos \text{arc tg } x|$. Realizó el cálculo en la pizarra, bajo la atención de toda la clase, obteniendo para ambas funciones $-\frac{x}{1 + x^2}$.

Los alumnos se dieron por satisfechos intuyendo que, de alguna manera, la cuestión estaba zanjada. Pero es aquí donde interviene el teorema: "Si dos funciones tienen la misma derivada, entonces se diferencian en una constante". ¿Cuánto vale ésta? Un cálculo sencillo nos da Cte. = 0. Luego los resultados obtenidos son equivalentes.