NUMEROS.18 - 1988

LA PROPORCION Y LA HISTORIA DE LAS MATEMATICAS

Santiago Fernández Fernández

I.F.P. de Erandio (Bilbao)

Entre las muchas aportaciones de los pitagóricos, se encuentra una verdaderamente curiosa y sorprendente : La *teoría de las proporciones*, también conocida por *teoría de las mediedades*.

Es sabido el conocimiento que Pitágoras y los pitagóricos tenían de las tres *mediedades* conocidas por los babilonios, esto es, las medias aritmética, geométrica y armónica, definidas, como se sabe, respectivamente, para dos valores a y c, así :

$$\text{med. arit.}(a\ ,\ c) = (\ a + c\ )\ /\ 2$$

$$\text{med. geom.}(a\ ,\ c) = \sqrt{a\ .\ c}$$

$$\text{med. arm.}\ (a\ ,\ c) = 1\ /\ \text{med.arit.}(1/a\ ,\ 1/c) = 2.a.c\ /\ (a + c)$$

Según historiadores posteriores - entre ellos Proclo(410-485) - los pitagóricos y luego los neopitagóricos lograron un esquema general, en el cual las tres medias mencionadas constituyen casos particulares. El esquema es el siguiente :

ESQUEMA 1

DADOS DOS NUMEROS REALES a, c , $0<a<c$, SE TRATA DE CALCULAR UN TERCER VALOR b , $a<b<c$, TAL QUE DOS DE ELLOS Y DOS DE SUS DIFERENCIAS SE ENCUENTREN EN LA MISMA RELACION.

Las relaciones que aparecen son, por tanto, de los tipos

$(a - b)\ /\ (b - c) = a/b$; $(a - c\ )\ /\ (b - c) = b/c$, etc

Entre las relaciones que se pueden plantear, los pitagóricos y neopitagóricos estudiaron las diez siguientes :

1. $(b-a)/(c-b) = a/a$ (Media aritmética)

2. $(b-a)/(c-b) = a/b$ (Media geométrica)

3. $(b-a)/(c-b) = a/c$ (Media armónica)

4. $(b-a)/(c-b) = b/a$

5. $(b-a)/(c-b) = c/a$

6. $(b-a)/(c-b) = c/b$

7. $(c-a)/(b-a) = c/a$

8. $(c-a)/(c-b) = c/a$

9. $(c-a)/(b-a) = b/a$

10. $(c-a)/(c-b) = b/a$

Partiendo de la definición dada en el esquema 1, es interesante contestar a la pregunta: ¿Cuántas relaciones distintas se pueden encontrar?

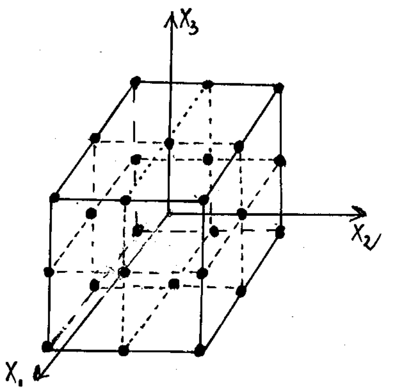
Nos puede ayudar a ello el presentar dicha definición con una terminología más precisa. Así :

Sea $C = \{(x_1, x_2, x_3),\ x_i \in \{-1, 0, 1\}\} \subset R^3$. *Dada la función* $F : C \to R$, *para valores dados* a, c, *con* $a<c$, *definida por* $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot a + x_2 \cdot b + x_3 \cdot c$, *se trata de encontrar un* b, *con* $a<b<c$, *tal que verifique relaciones del tipo*

$F(1,-1,0) / F(0,1,-1) = F(1,0,0) / F(0,1,0)$ (Equivalente a $(a-b)/(b-c) = a/b$)

....

$F(0,1,-1) / F(1,0,-1) = F(0,1,0) / F(0,0,1)$ (Equivalente a $(b-c)/(a-c) = b/c$



Paralelepípedo centrado en el origen, con todas las aristas de 2 unidades.

El conjunto C está formado por los vértices, los puntos medios de las aristas y los de las caras ; en total, 26.

Como ya hemos indicado, de las tres primeras posibilidades se deducen, respectivamente, las medias aritmética, geométrica y armónica de a y c, esto es, $b = (a+c)/2$, $b = \sqrt{a.c}$ y $b = 2.a.c/(a+c)$.

Pero, ¿cuáles son las demás?

Recordemos una mediedad muy utilizada en aquella época y posteriormente : la *división áurea* de un segmento. Dividir un segmento AC en razón áurea es obtener un punto B de él que verifique $AC / AB = AB / BC$.

Designando por a, b, c las coordenadas de los puntos A, B, C tenemos que :

B divide en razón áurea al segmento AC si

$(c-a)/(b-a) = (b-a)/(c-b)$

Por ejemplo, para $a=5$ y $c=12$ es

$(12-5)/(b-5) = (b-5)/(12-b) \Longrightarrow$

$b^2 - 3b - 59 = 0 \Longrightarrow b \simeq \underline{9{,}3262375}$ (razón áurea)

Calculando ahora los valores de b para cada una de las diez relaciones vistas, sabremos si alguna de ellas representa (es otra forma de) la razón áurea.

1. $b = (a+c)/2 = 8{,}5$
2. $b = \sqrt{a.c} = 60 \simeq 7{,}7459666$
3. $b = 2.a.c/(a+c) = 120/17 \simeq 7{,}0588235$
4. $\ldots\ldots \Longrightarrow b^2 - 7b - 25 = 0 \Longrightarrow b \simeq \begin{cases} 9{,}6032775 \\ -2{,}6032775 \text{ (inadm.)} \end{cases}$
5. $\ldots\ldots \Longrightarrow 17b = 169 \Longrightarrow b \simeq 9{,}9411764$

....

El lector puede fácilmente comprobar que el valor 9,3262375 no se obtiene tampoco utilizando las otras cinco igualdades. Por tanto, ¡la razón aúrea no está en este esquema 1 !

Veamos otro :

ESQUEMA 2

DADOS DOS NUMEROS REALES a, c , $0<a<c$, SE TRATA DE CALCULAR UN TERCER VALOR b , $a < b < c$,TAL QUE DOS CUALESQUIERA DE ELLOS SE ENCUENTREN EN LA MISMA RELACION QUE OTROS DOS CUALESQUIERA.

Con base en este esquema, se obtienen las quince relaciones siguientes :

1. $a / b = a / c$	6. $a / c = c / a$	11. $a / b = b / a$
2. $b / a = c / a$	7. $a / c = c / b$	12. $a / b = c / a$
3. $b / c = c / b$	8. $c / a = b / c$	13. $b / a = a / c$
4. $a / b = c / b$	9. $a / c = b / c$	14. $a / b = b / c$
5. $b / a = b / c$	10. $c / a = c / b$	15. $b / a = c / b$

Algunas son equivalentes y otras no cumplen el esquema. El análisis de las quince nos lleva a concluir que :

1,2 y 3 dan el mismo resultado ($b=c$)

4,5 y 6 nos dan $a=c$ (imposible)

De 7 y 8 , que son equivalentes, resulta $b > c$ (imposible)

Las relaciones 9,10 y 11 nos llevan también a una imposibilidad ($a=b$)

Los casos 12 y 13 dan lugar a $b = a^2 / c = a / c \, . \, a < a$ (imp.)

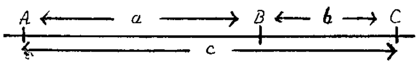
Por último, 14 y 15 corresponden a la media geométrica de a y c

Curiosamente, pues, un esquema que parecía tan amplio sólo da lugar a una solución.

Ensayemos finalmente el

ESQUEMA 3

DADO UN SEGMENTO AC, SE TRATA DE ELEGIR UN PUNTO $B \in \overline{AB}$ (designando por a, b, c las longitudes de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$), TAL QUE DOS LONGITUDES CUALESQUIERA SE ENCUENTREN EN LA MISMA RELACION QUE OTRAS DOS CUALESQUIERA.



Razonando de modo similar a como lo hicimos con el esquema 2, se llega a la relación

$a / b = c / a$ o, lo es lo mismo, $\overline{AB} / \overline{BC} = \overline{AC} / \overline{AB}$, que sí da lugar a la *proporción áurea* del segmento *AC*.

Y...para terminar, proponemos al lector las cuestiones que siguen :

1. En el esquema 1, estudiar qué pasa con relaciones como

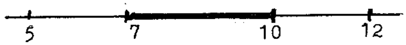
$(b-a)/(c-b) = b/c$ y $(c-a)/(c-b) = a/b$

2. ¿Cuántas relaciones se pueden plantear según dicho esquema?

3. Manipulando las igualdades del esquema 1, ¿podríamos demostrar que están incluidas en las del 3?

4. Realiza un estudio detallado del esquema 3.

5. Observa que, en el ejemplo propuesto en el esquema 1, todos los valores de b están en el intervalo $[7, 10]$, centrado en el origen. ¿Es esto verdad en cualquier caso?



6. ¿Serías capaz de obtener más relaciones provechosas del esquema 1?

Calendario para la preinscripción y propuestas de talleres, comunicaciones y materiales para la exposición

La preinscripción habrá de realizarse antes del 30 de enero de 1989, remitiendo el boletín que se reproduce más abajo.

Quienes deseen presentar una comunicación (en forma de póster) habrán de enviar junto al boletín de preinscripción un resumen de dos hojas grandes (destinadas a ser reproducidas directamente, previa reducción) en las que la superficie escrita ocupe 23 por 31 cm., destinando 6 cm. de la primera para el título, nombre de los autores y lugar de trabajo. Se encarece que la necesaria selección de referencias bibliográficas (¡no una simple lista bibliográfica final!) se ajuste a las normas establecidas para el envío de originales a *Enseñanza de las Ciencias*.

Quienes deseen proponer un taller pueden utilizar hasta cuatro hojas de las dimensiones arriba indicadas, de forma a dar una idea lo más clara posible del contenido del taller (tema, tipo de actividades...) y de su fundamentación.

En hoja aparte se indicará el número mínimo y máximo de asistentes al taller, así como el material audiovisual que se precisa (retroproyector, proyector de diapositivas, vídeo). El resto del material necesario para el desarrollo del taller habrá de ser aportado, en principio, por los organizadores del mismo. Rogamos igualmente que se indique la posibilidad o no de hacer más de una presentación del taller (para el caso en que las peticiones de asistencia así lo recomendaran).

Importante:

Sólo podrán ser aceptadas las propuestas de comunicaciones y talleres debidamente fundamentadas, que sean presentadas en el formato indicado, con *original en impresión de calidad* y dos copias, para hacer posible su reproducción en un volumen, que ha de enviarse a los congresistas con la debida antelación para permitirles la preparación del Congreso.

Cuando varias preinscripciones incluyen una misma propuesta de comunicación o taller, ello se indicará explícitamente en cada preinscripción, pero se enviará exclusivamente un solo original y dos copias. Es necesario igualmente dejar bien claro, cuando un trabajo es de varios autores, quién o quiénes se preinscriben para asistir al Congreso.

Quienes deseen presentar materiales didácticos para la exposición prevista, habrán de remitir un ejemplar de los mismos. Por otra parte, consideramos que para facilitar un mejor conocimiento de los materiales expuestos, sería útil poner a disposición breves presentaciones de dichos materiales. Invitamos, pues, a los autores a que elaboren dichas presentaciones (incluyendo un boletín de solicitud de los materiales) y llevar al Congreso cuantas copias de la presentación se consideren convenientes.

Selección de talleres, comunicaciones y solicitudes de asistencia

Antes del 30 de marzo de 1989 se comunicará el resultado de la selección de talleres y pósters propuestos, así como el de solicitudes de asistencia (atendiendo a criterios de implicación en tareas de investigación e innovación didáctica).

BOLETÍN DE PREINSCRIPCIÓN → pág. 70