NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 41, marzo de 2000, páginas 45-48

El rincón de la calculadora gráfica

A cargo de Francisco Puerta García

Motivando temas de matemáticas con la calculadora gráfica

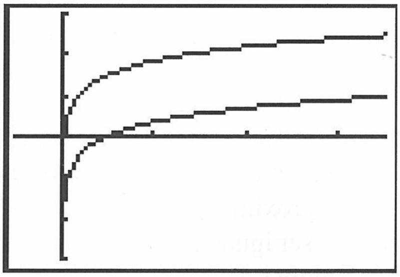
Bruce Edwards

1. Introducción

La calculadora gráfica como herramienta tecnológica nos ofrece la posibilidad de despertar el interés del estudiante y estimular su comprensión. Mediante ejemplos previamente escogidos el estudiante puede descubrir, usando la calculadora gráfica, conceptos importantes. Esta práctica da al profesor la oportunidad de explicar temas matemáticos fundamentales de manera mas vívida. Por otra parte, el estudiante practica y aprende por sí mismo nociones y resultados matemáticos que de otra manera serían difíciles de entender.
En este trabajo presentaremos tres ejemplos que ilustran temas matemáticos importantes, y para los cuales el uso de la calculadora gráfica ayuda en su explicación.

2. Traslaciones

¿Cuál es la relación entre las gráficas de las siguientes dos funciones?

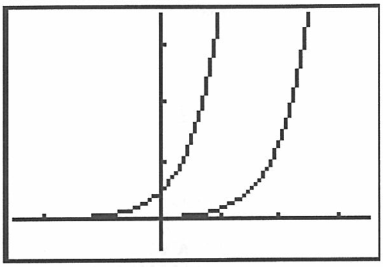


$$f_1(x) = \ln x$$
$$f_2(x) = 3 + \ln x$$

Es fácil ver que la gráfica de f_2 es una traslación vertical de la gráfica de f_1.

Esto quiere decir que las funciones inversas de f_1 y f_2 deben ser traslaciones horizontales:

Esta sección ofrece a los lectores un foro en el que exponer ideas, consultar dudas y debatir planteamientos didácticos relacionados con el uso de la nueva generación de calculadoras gráficas avanzadas en la enseñanza de las matemáticas. Esperamos que participes enviando tus consultas o aportaciones a la dirección indicada abajo.



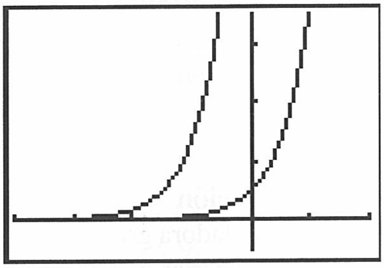
$f_3(x) = e^x$ (inversa de f_1)

$f_4(x) = e^{x-3}$ (inversa de f_2)

Sin embargo, no es tan obvia la relación entre las gráficas de las siguientes funciones:

$$f_3(x) = e^x$$

$$f_5(x) = 20e^x$$



¡Las gráficas indican que deben ser traslaciones horizontales!

Este resultado es correcto, puesto que

$$f_5(x) = 20e^x = e^{\ln 20} e^x = e^{x+\ln 20} = f_3(x+\ln 20)$$

Es interesante observar este resultado con la calculadora gráfica utilizando una tabla. Hacemos la tabla con

$$y_1 = e^x \,;\, y_2 = 20\, e^x$$

ΔTbl=ln(20)

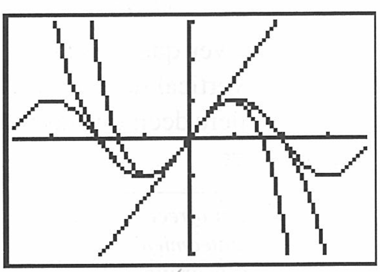
X	Y1	Y2
-6	.00248	.04958
-3.004	.04958	.9915
-.0085	.9915	19.83
2.9872	19.83	396.6
5.9829	396.6	7932
8.9787	7932	158640
11.974	158640	3.17E6

X= -6

Nótese que cada valor de y_2 es igual al valor de y_1 situado una línea más abajo.

3. Series infinitas

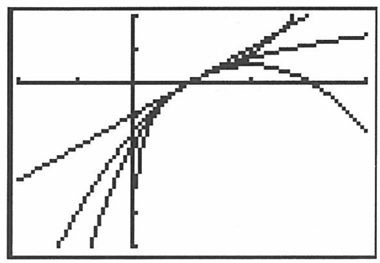
El tema de las series infinitas presenta cierta dificultad para los estudiantes. Se trata de entender cómo una función, por ejemplo $f(x) = \text{sen}\, x$, puede estar aproximada por un polinomio y también puede ser igual a un polinomio infinito (serie de Taylor). La calculadora gráfica nos permite ilustrar esta convergencia de manera clara y precisa. Graficando $y_1 = \text{sen}\, x$ con sus polinomios de Taylor correspondientes, la calculadora gráfica muestra la convergencia al aumentar el grado de los polinomios.



$$y_1 = \text{sen}\, x$$
$$y_2 = x$$
$$y_3 = x - x^3/3!$$
$$y_4 = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$$

En el caso de $f(x) = \text{sen}\, x$, el intervalo de convergencia de la serie de Taylor es $(-\infty, \infty)$. Sin embargo, existen funciones cuyos intervalos de convergencia son más pequeños. Este caso se puede ilustrar con la función logarítmica. Si el estudiante produce las siguientes gráficas, observará que hay convergencia únicamente en el intervalo $(0,2]$

$$y_1 = \ln(x)$$
$$y_2 = (x-1)$$
$$y_3 = (x-1) - (x-1)^2/2$$
$$y_4 = (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3$$

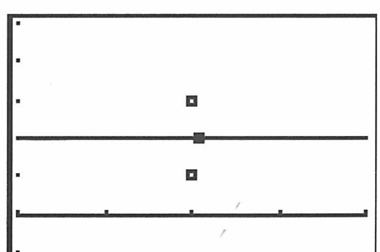


Concluímos que la calculadora gráfica es una herramienta muy útil para ilustrar los polinomios de Taylor y los intervalos de convergencia correspondientes.

4. La recta de regresión por mínimos cuadrados.

Una de las aplicaciones más importantes de la calculadora gráfica es hallar la fórmula de la recta de regresión por mínimos cuadrados. Dado un conjunto de puntos en el plano (x_1,y_1), (x_2,y_2),..., (x_n,y_n), la calculadora permite determinar dicha línea de manera más rápida y sencilla que con los métodos antiguos. Sin embargo, no se debe perder de vista la importancia de comprender el algoritmo para calcularla. Existen conjuntos de puntos a los cuales dicha recta no se ajusta bien. Veamos un ejemplo.

Consideramos los tres puntos *(3,1)*, *(3.1,2)* y *(3,3)*. La calculadora gráfica nos da como recta de regresión por mínimos cuadrados $y = 2$, que no se ajusta a los puntos. Es decir, los puntos son casi verticales, ¡pero la línea es horizontal!



¿Que sucedió? Que es un error tratar de cuadrar puntos casi verticales con la recta de regresión por mínimos cuadrados. Habría sido mejor intercambiar los valores de *x e y*, y usar los puntos casi horizontales, *(1,3), (2,3.1)* y *(3,3)*. Esta vez la calculadora nos da la recta, que cuadra mejor con los datos.

Este resultado tan sorprendente motiva al estudiante a investigar y entender mejor la teoría de la recta de regresión por mínimos cuadrados.

5. Conclusión

Los ejemplos ya citados ilustran la importancia que tiene la calculadora gráfica en la enseñanza matemática. Gracias a la calculadora gráfica dicha enseñanza ha cambiado haciéndose mas amena y práctica para el estudiante, permitiéndole ser parte activa del proceso. Contando con la calculadora y la guía adecuada, el estudiante está en capacidad de descubrir resultados matemáticos. Invitamos a nuestro apreciado lector a que descubra ejemplos motivantes que sigan sirviendo a la loable causa de la comprensión matemática.

Agradezco la colaboración de Diego Montaña.

El profesor Bruce Edwards, be@math.ufl.edu, pertenece al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Florida. (Estados Unidos de América).

Francisco Puerta García
Instituto "Isabel de España"
Tomás Morales, 39
35003 Las Palmas de G. Canaria
fpgg@correo.rcanaria.es