



AGENTGEOM: un sistema tutorial para el desarrollo de competencias argumentativas de los alumnos a través de la resolución de problemas

Pedro Cobo

Departament de Matemàtiques
Institut d'Ensenyament Secundari Pius Font i Quer (Manresa)
e-mail: pcobo@xtec.cat

Josep M. Fortuny

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
e-mail: JosepMaria.Fortuny@uab.es
página web: <http://antalya.uab.es/edumat/Fortuny.html>

1. Introducción

Las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas y los avances en el desarrollo de las nuevas tecnologías abren vías para mejorar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, facilitando la gestión de dichos procesos por parte del profesorado, y la adquisición de competencias matemáticas por parte del alumnado de enseñanza secundaria. Las competencias en matemáticas se consideran parte esencial de la preparación para la vida ciudadana de los estudiantes; es por eso que el enfoque pedagógico por competencias se está imponiendo en nuestro país.

El modelo de aprendizaje por competencias proporciona referencias adaptadas a todos los que quieran tener en cuenta la complejidad de la relación didáctica que supone el hecho de considerar partes esenciales del aprendizaje de las matemáticas los procesos comunicativos -estrategias compartidas con el uso de la lengua natural, del lenguaje matemático y de la argumentación-, el razonamiento, la abstracción, la resolución de problemas, etc.

El desarrollo de estas competencias está asociado a una gran diversidad de alumnado que nos encontramos actualmente en las aulas y a la necesidad que tenemos de atenderlos a todos de una forma cada vez más personalizada.

La problemática que presentamos plantea cómo ayudar al docente en su responsabilidad de atender la diversidad de casos cuando el enfoque pedagógico se centra en el desarrollo de las competencias argumentativas de sus alumnos. La solución que proponemos para conseguir que el profesor pueda atender con mayor eficacia a esta diversificación de alumnos está en la línea de simultanear, en la enseñanza de las matemáticas, la tutorización artificial y la humana en entornos asistidos por ordenador. Los entornos *e-learning* y, en particular, el ordenador con conexión a Internet son herramientas privilegiadas si, detrás de la programación, hay un análisis serio y riguroso de las tareas pedagógicas y matemáticas a desarrollar, siendo el entorno tecnológico el que sepa adaptarse a los conocimientos de cada alumno y no el alumno el que se tenga que adaptar al dispositivo informático.

La ayuda del profesorado al alumnado se puede concretar en la facilitación de la actividad mental, mediante la provisión de ayudas educativas ajustadas y contingentes a sus necesidades de aprendizaje en un entorno tecnológico (Coll y otros, 2006). El propio entorno tecnológico puede traer incorporada una funcionalidad asistencial que refuerce la función tutorial del profesorado, la cual puede permitir en el alumnado un alto grado de autorregulación de su propio aprendizaje. De esta manera entendemos que la tecnología en la educación matemática se considera como un instrumento que amplifica las posibilidades de seguimiento y ayuda ajustada al proceso de aprendizaje de los estudiantes, y en especial en la gestión y tutorización continua y proactiva en procesos de resolución de problemas (Cobo y otros, 2007).

Nuestro propósito es aprovechar y potenciar las ventajas de ese tipo de entornos para elaborar un *sistema tutorial inteligente*, al que llamamos *AGENTGEOM* (*Agente de Geometría*) que colabora con la tutorización humana, ayudando al alumno a mejorar sus competencias matemáticas. Cuando nos referimos a las competencias matemáticas estamos pensando concretamente en la resolución de situaciones-problema, en el desarrollo del razonamiento matemático y en la utilización del lenguaje matemático en los procesos comunicativos que se dan en las situaciones que se plantean.

Un *sistema tutorial inteligente* ha de tener, desde nuestro punto de vista, tres características básicas:

Ha de ser *emergente* en el sentido de que tenga una conducta que no pueda ser predicha desde una descripción centralizada de las unidades que lo componen. Por tanto, su comportamiento ha de ser autónomo y calificable como espontáneo. Por ejemplo, entre otros, en los aspectos que se refieren a la conversación -ha de tener capacidades de interacción avanzadas, en nuestro caso, mediante mensajes escritos en tiempo real y ajustado al lenguaje del contexto en que se use -. Para mantener este tipo de conversación ha de incorporar una base de conocimientos y un modelo de discurso que le permitan al mismo tiempo asociar ideas.

Ha de ser *personalizado*, es decir, ha de proporcionar al usuario actividades y ayudarle a realizarlas, y ha de ser capaz de evolucionar en el tratamiento de la realización de la tarea y adaptarse a las características cognitivas y sociales de cada alumno.

Ha de ser *abierto*, es decir, ha de poner menos énfasis en tipos de aprendizajes basados en elementos instructivos y más en aspectos constructivos, en los que primen las interacciones no guiadas que permitan a los alumnos practicar y adquirir habilidades metacognitivas, asociadas con la efectividad de la exploración, tan importantes en los modelos de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas de matemáticas.

Hemos construido el sistema tutorial inteligente *AGENTGEOM* teniendo en cuenta esas características de emergencia, personalización y apertura, sobre una arquitectura web, a la que podemos acceder mediante un protocolo http^[1]. Además, este sistema tutorial no sólo se aprovecha de las ventajas de este tipo de entornos, sino que se beneficia de las competencias de su profesor, ya que el docente puede adaptar el estilo, el contenido o la naturaleza de los mensajes del tutor artificial.

En los apartados siguientes nos centramos, sobre todo, en la descripción de las funcionalidades del *AGENTGEOM* y en el análisis de su base de conocimientos, que le permite adaptarse a las características cognitivas de cada alumno, y en su modelo de discurso, especialmente en las categorías de mensajes que hemos implementado en el sistema. Otros aspectos relacionados con los beneficios cognitivos de los alumnos como consecuencia de la experimentación con el sistema tutorial *AGENTGEOM* pueden consultarse en [Cobo \(2004\)](#) y [Cobo y otros \(2007\)](#). Además, en [Reverter y otros \(2007\)](#) pueden consultarse aspectos relacionados con la evaluación de los procesos de resolución desarrollados por los alumnos en su interacción con el *AGENTGEOM*.

2. Antecedentes del *AGENTGEOM*

El *AGENTGEOM* tiene un antecedente en el proyecto Baghera, desarrollado en el Laboratorio Leibniz de Grenoble ([Laboratoire Leibniz, 2003](#)).

A diferencia del proyecto Baghera, el *AGENTGEOM* incorpora una descripción *a priori* de todos los procedimientos, que identifica un resolutor experto y que pueden conducir a resolver el problema propuesto.

El proyecto Baghera, como nuestro sistema tutorial, incorpora tres principios que consideramos básicos en la elaboración de entornos asistidos por ordenador. Por una parte, la colaboración entre agentes humanos y artificiales, que supera el paradigma de décadas anteriores en las que se consideraba al ordenador como máquina autónoma que concebía la enseñanza sólo como función instruccional. En segundo lugar, la concepción de "*la educación como el resultado de un proceso complejo que emerge de las interacciones entre agentes que tienen habilidades diferentes y complementarias*" ([Webber y otros, 2002](#)). Y, por último, ambos proyectos están concebidos como sistemas tutoriales multiagentes de diagnóstico que son capaces de identificar los conocimientos de los alumnos después de las interacciones de éstos con el sistema y, por tanto, han de ser capaces de adaptarse a sus características cognitivas y a la evolución de sus conocimientos matemáticos.

En cambio, hay diferencias entre ambos proyectos, en concreto en dos aspectos que consideramos fundamentales y que hacen del nuestro una propuesta innovadora y pionera en la elaboración de entornos interactivos web de enseñanza y aprendizaje. Así, mientras Baghera es un entorno basado en la red para el aprendizaje de la demostración geométrica, fundamentado en los trabajos de [Luengo \(1999\)](#), y ése es el contenido básico de las propuestas de actividades que se hacen a los alumnos, el proyecto *AGENTGEOM* utiliza como objeto de estudio y como base de las propuestas de sus actividades, además del desarrollo del razonamiento matemático, todos los procesos implicados en la resolución de problemas y los procesos comunicativos que conllevan, y tiene como fundamento las amplias investigaciones llevadas a cabo por los investigadores que formamos parte de él, relacionadas con las interacciones en la resolución de problemas en diferentes contextos ([Cobo y Fortuny, 2000](#); [Richard, 2004](#); y [Cobo y otros, 2007](#)).

Además, Baghera tiene un nivel de actuación muy limitado en lo que se refiere a la verificación en tiempo real de la realización de las actividades de los alumnos ([Webber y otros, 2002](#)), dejando tal verificación para cuando el alumno ha acabado su propuesta de demostración. En cambio, hemos conseguido que el *AGENTGEOM* compruebe y verifique de forma instantánea todas las acciones realizadas por los alumnos, identificando el momento del proceso de resolución en el que se encuentra y mostrándole, siempre que el tutor humano lo considere oportuno o cuando el alumno lo solicite, mensajes o sugerencias que orienten su proceso y que le ayuden a que sea él mismo quien obtenga una solución del problema. Este sistema de ayuda diferenciado para cada alumno, en función de la evolución de su proceso de resolución, hecho de forma directa, en tiempo real y adaptado a sus necesidades cognitivas, dará a nuestro aplicativo el carácter de emergente al que nos referíamos en la introducción de este artículo.

3. Características generales del AGENTGEOM. Relación con sus usuarios.

El AGENTGEOM es un sistema tutorial artificial concebido como un sistema multiagente híbrido que combina *interfaces*, utilizadas por personas como usuarios del sistema (profesores y alumnos), con *dos agentes artificiales* -el agente tutor, que tiene una arquitectura principalmente reactiva, y el agente mediador, que recibe las entradas de las interfaces del alumno y del profesor-; y *una base de datos*, en la que se almacenan todas las entradas de los usuarios.

Las interfaces son todas las herramientas de las que disponen los usuarios para interactuar con los agentes mediador y tutor. En el caso del alumno le ofrece todas las herramientas para resolver el problema. Como se observa en la **Figura 1**, el alumno dispone de un área de construcción gráfica (parte izquierda de la pantalla) y de un editor de deducciones (parte derecha). En el área de construcción gráfica, el alumno puede dibujar figuras utilizando los botones -primitivas de construcción- para dibujar puntos, líneas rectas, circunferencias, segmentos, paralelas, perpendiculares, definir la intersección de dos objetos, etc. Con el editor de deducciones, el alumno puede construir sentencias sobre los objetos gráficos que ha creado, y que el agente mediador validará o no.

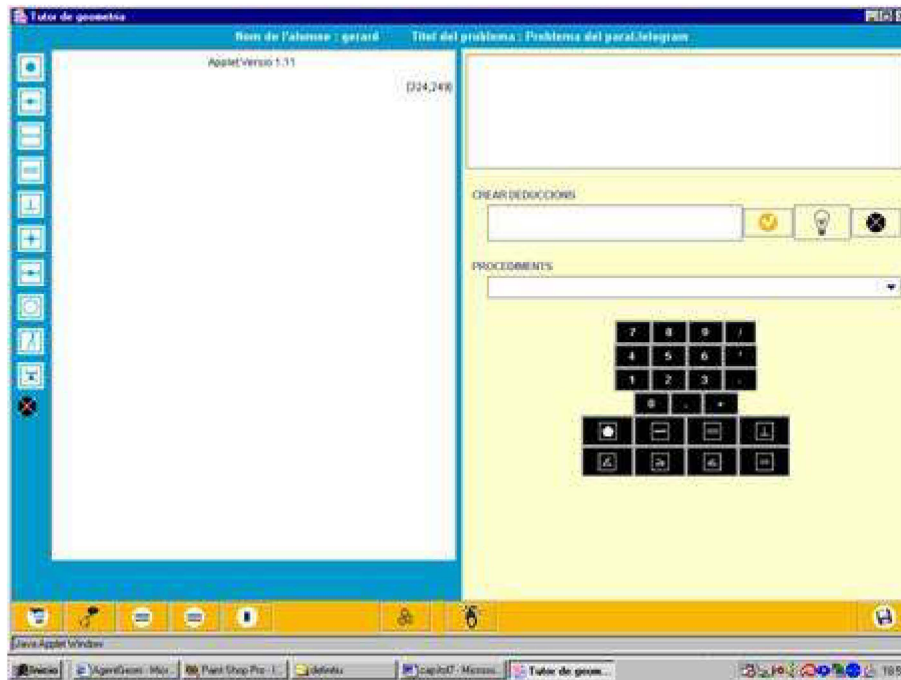


Figura 1. Pantalla del área de trabajo del alumno.

El agente mediador recibe las entradas de las interfaces del profesor y de los alumnos, es decir, procesa todas las acciones (gráficas y deductivas) del profesor cuando crea problemas nuevos y del alumno cuando resuelve el problema, y las almacena en la base de datos. Concretamente, por lo que se refiere a las acciones gráficas -cualquier acción que se realiza en el área gráfica-, el agente mediador recibe todas las primitivas de construcción, calcula todos los elementos nuevos derivados de las acciones, emite mensajes si hay errores en la construcción o en la identificación de los nuevos objetos gráficos, y, si el proceso acaba correctamente, muestra la figura que se ha dibujado en el área de construcción. Las acciones gráficas constan de una primitiva de construcción y de parámetros asociados, como por ejemplo el nombre que el alumno le da al objeto que crea o la posición que se elige para situarlo en el área gráfica, en el caso de un punto, etc. Las acciones gráficas conducen al agente mediador a mantener una representación interna de la figura que el alumno está construyendo. Esa representación interna está referida en todo momento al conocimiento sobre geometría métrica clásica necesario para resolver cualquier tipo de problemas geométricos, que hemos implementado en el AGENTGEOM.

Por lo que se refiere a las acciones deductivas (o sentencias) -acciones que se realizan en el editor de deducciones-, el agente mediador gestiona la construcción correcta de su sintaxis, mostrando mensajes de error si no están bien construidas; determina si la sentencia es verdadera o falsa, utilizando el modelo de gráfico al cual está referida siempre la sentencia; y muestra la validez o no de la deducción introducida.

El agente tutor tiene por objetivo ayudar directamente al alumno en la resolución del problema. Por eso contiene, en forma de árbol, cada una de las estrategias correspondientes a cada problema. También tiene diferentes listas de mensajes: una lista para cada estrategia y una lista especial de cambio de estrategia. Así, el agente tutor tiene toda la información sobre estrategias, y sólo necesita un mecanismo para saber cuándo y cómo mostrar los mensajes al alumno. Este mecanismo comienza cuando el agente mediador, que sigue la pista de todas las acciones que realiza el alumno, las pasa al agente tutor, que las identifica dentro de su árbol de estrategias. Para una descripción exhaustiva de la forma que tiene el agente tutor de mostrar los mensajes al alumno véase Cobo y otros (2007).

La interfaz del profesor dispone de herramientas de comunicación -diferentes pantallas- que hacen posible que el profesor asigne a sus alumnos algunos de los problemas que ya están implementados en el sistema, o cree problemas nuevos (**Figura 2**).

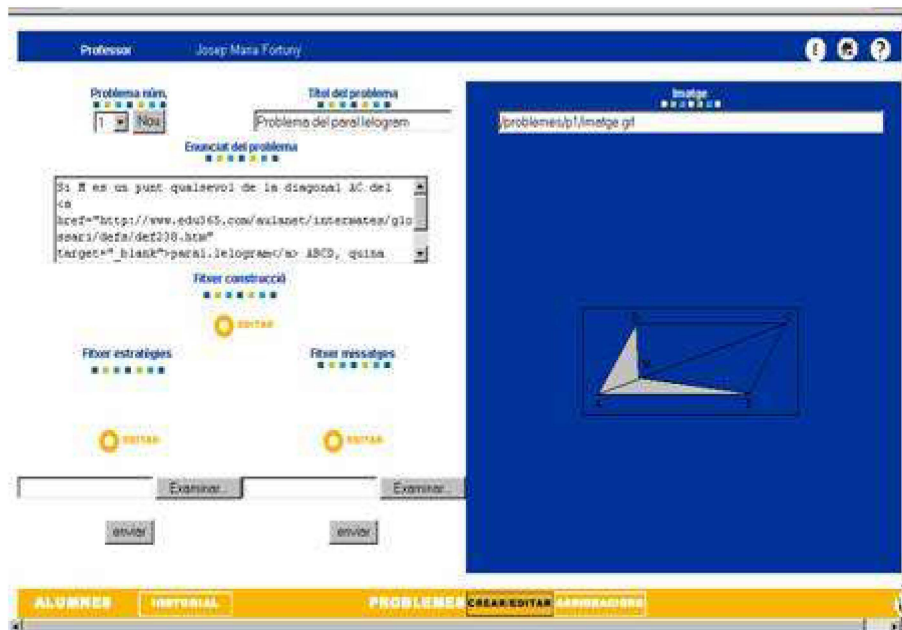


Figura 2. Pantalla del área de trabajo del profesor.

El *AGENTGEOM* ya tiene implementados una amplia batería de problemas propuestos, y asociado a cada uno de ellos lo que hemos llamado un “árbol de problemas” (ver apartado 4.1) sobre el que el sistema se puede mover para adaptarse a las características cognitivas de los alumnos. Por otra parte, la creación de problemas nuevos por parte del profesor exige la elaboración de todo un contenido pedagógico alrededor de cada problema, que comporta la identificación de todas las estrategias que resuelvan el problema y los diferentes mensajes que el profesor quiera que se muestren al alumno cuando el agente tutor lo considere necesario.

Además, desde su pantalla el profesor puede acceder a los historiales de todos sus alumnos clicando en el botón “HISTORIAL”, donde se muestran todas las acciones gráficas y deductivas que el alumno ha realizado durante la resolución de cada problema, así como las reacciones del agente tutor, sea en forma de validaciones o no de las sentencias introducidas por el alumno, o los mensajes que el agente tutor le envía. En el historial de la resolución de cada problema por parte del alumno también podemos ver la fecha y hora en las que realiza cada acción. Con toda esta información, además de ponerla a disposición del profesor y del alumno, que también puede consultarla desde su pantalla, el *AGENTGEOM* elabora un informe final, a modo de evaluación, sobre el proceso de resolución del problema propuesto (Reverter y otros, 2007).

4. Base de conocimientos del *AGENTGEOM*

Para implementar en el agente tutor la base de conocimientos de la que dispondrá el *AGENTGEOM* nos hemos basado en el concepto de “espacio básico de un problema”, que definimos como el conjunto de todas las formas posibles de resolver un problema que tiene un resolutor experto. Así, cada rama del espacio básico definirá una estrategia de resolución. Por ejemplo, en la Figura 4 mostramos el espacio básico del *problema de los triángulos*, cuyo enunciado es el siguiente:

Problema 3.1. Problema de los triángulos.

ABC es un triángulo cualquiera y E y F son los puntos medios de los lados BC y AC , respectivamente. Si D es un punto cualquiera del lado AB , ¿qué relación hay entre el área del cuadrilátero $DECF$ y la suma de las áreas de los triángulos DBE y ADF ?

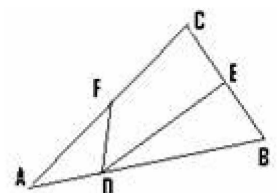


Figura 3.

La idea es que a partir de la construcción del espacio básico de un problema podamos identificar todos los contenidos matemáticos implicados en cada una de sus estrategias, con la finalidad de implementar en el sistema todas las acciones gráficas y deductivas que desarrollan cada una de las líneas del espacio básico (Cobo, 2004). Estas acciones serán las reconocidas por el *AGENTGEOM*, en el sentido de que serán las que el sistema considere a efectos de validar las posibles formas de resolución o argumentación que realice el alumno.

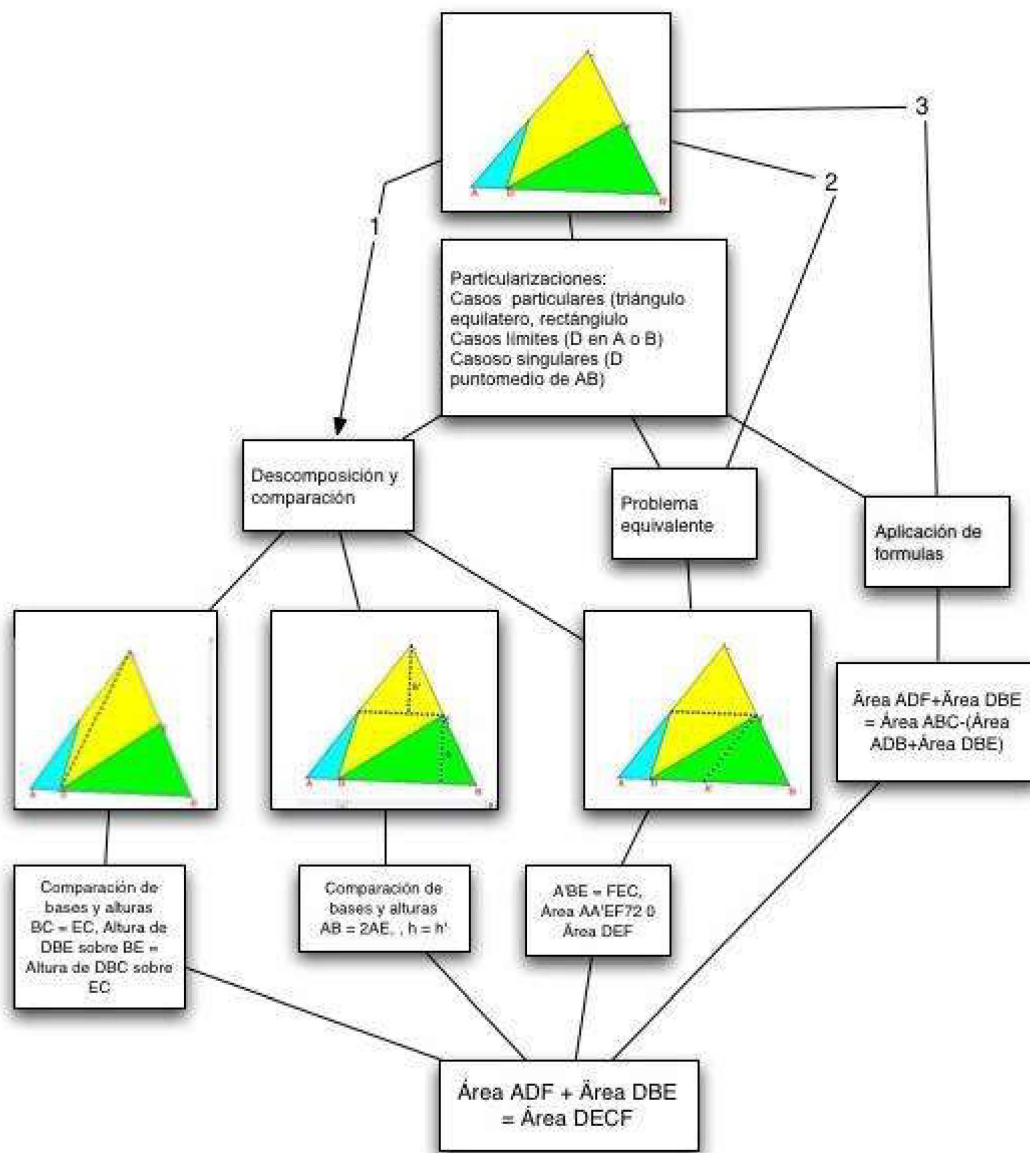


Figura 4. Espacio básico del problema de los triángulos.

Como dicen **Stacey y Groves (1999)**: “Una de las tareas más difíciles a las que el profesor se enfrenta es encontrar el equilibrio justo entre ayudar demasiado a los alumnos y dejarlos bloqueados mucho rato. Es contraproducente que los alumnos se sientan bloqueados, incapaces de moverse, pero también lo es el hecho de que otra persona les resuelva el problema” (p. 16). Este dilema que se presenta en la enseñanza de la resolución de problemas nos ha hecho ver la necesidad de implementar un sistema de ayudas en el *AGENTGEOM* que combine el lanzamiento de mensajes que permitan ayudar al alumno sólo lo estrictamente necesario, con la propuesta de problemas más sencillos en casos de bloqueos durante el proceso de resolución.

Por tanto, la importancia que el espacio básico de un problema tiene en nuestro sistema no se limita sólo a facilitarnos las tareas de reconocimiento e implementación de contenidos matemáticos en el sistema, sino que a partir de él hemos desarrollado dos conceptos que nos servirán de fundamento para ilustrar la forma en que el *AGENTGEOM* se puede adaptar a las características cognitivas de cada alumno: *árbol de problemas asociado al problema propuesto*, y para mostrar las categorías y la forma en que implementamos en el sistema los mensajes que queremos que éste muestre al alumno en las diferentes fases del proceso de resolución del problema: *el espacio básico de la acción tutorial*.

4.1. Adaptación del *AGENTGEOM* a las características cognitivas del alumno. Árbol de problemas.

Entendemos por “árbol de problemas” asociado a un problema dado el conjunto de problemas vinculados a cada línea del espacio básico del problema y agrupados en cuatro niveles según la dificultad de las estrategias y contenidos matemáticos involucrados en sus resoluciones. Por ejemplo, supongamos que el profesor o el *AGENTGEOM* propone a un alumno de 4º. de ESO o 1º. de Bachillerato el problema de los triángulos (**Figura 3**), que para este tipo de alumnos lo hemos clasificado como de nivel 3 (según los conocimientos de los alumnos que lo intentan resolver y las estrategias que involucra en su resolución). El alumno se encuentra en una situación de bloqueo y no sabe reaccionar a las sugerencias que el agente tutor le envía en forma de mensajes de texto. En esta situación el *AGENTGEOM* puede reaccionar proponiendo al alumno problemas más sencillos relacionados con el problema propuesto. Es aquí donde entra en juego la noción de árbol asociado.

En esta línea 1 del espacio básico del problema de los triángulos (Figura 4) hay dos acciones que son claves para resolver el problema y que dan nombre a la línea, que son, por este orden: una acción de descomposición adecuada del triángulo ABC en otros triángulos (acción estratégica que llamamos A), y otra de comparación de bases y alturas de los nuevos triángulos que se forman para establecer su equivalencia (acción estratégica B). Asociada a esta línea consideramos los problemas que mostramos en la **Tabla 1**.

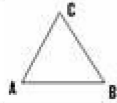
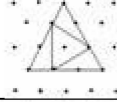
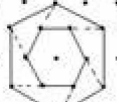
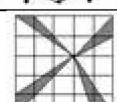
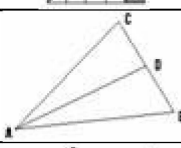
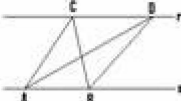
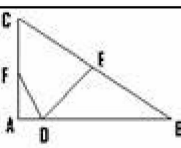
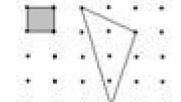
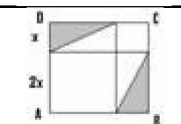
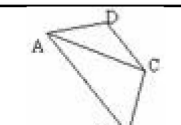
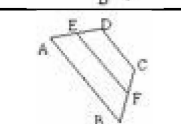
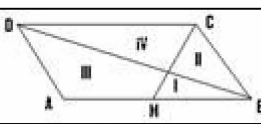
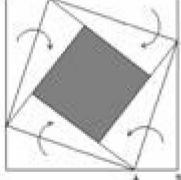
Problemas de nivel 1	
Probl. 1.1A. Dado el triángulo equilátero ABC , divídelo en tres triángulos equivalentes a partir de dos líneas rectas que pasen por el vértice C .	
Probl. 1.2A. Sobre la malla triangular de la figura, ¿qué relación hay entre las áreas de los dos triángulos equiláteros?	
Probl. 1.3A. Si se prolongan, en el mismo sentido, todos los lados de un hexágono regular una longitud igual a ellos mismos y se unen los extremos de estas prolongaciones se obtiene otro hexágono. Compara el área del hexágono original con la del que has obtenido.	
Probl. 1.1B. La figura está compuesta por 25 cuadrados unitarios. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?	
Probl. 1.2B. ABC es un triángulo cualquiera y D el punto medio del lado BC . ¿Qué relación hay entre las áreas de los triángulos ABD y ADC ?	
Probl. 1.3B. r y s son dos rectas paralelas. ¿Qué relación hay entre las áreas de los triángulos ABC y ABD ?	
Problemas de nivel 2	
Probl. 2.1. ABC es un triángulo rectángulo y E y F son los puntos medios de los lados BC y AC , respectivamente. Si D es un punto cualquiera del lado AB , ¿qué relación hay entre el área del cuadrilátero $DECF$ y la suma de las áreas de los triángulos DBE y ADF ?	
Probl. 2.2. La zona sombreada de la figura tiene una unidad cuadrada de área. Calcula en unidades cuadradas el área del triángulo.	
Probl. 2.3. Si $ABCD$ es un cuadrado de lado unidad, encontrar el área de la región sombreada.	
Problemas de nivel 3	
Probl. 3.2. Una de las diagonales grandes de un hexágono regular lo divide en dos trapezios iguales. Si consideramos uno de ellos y trazamos una de sus diagonales, obtenemos dos triángulos. Busca la relación entre las áreas de dichos triángulos.	
Probl. 3.3. Si dividimos por la mitad un hexágono regular obtenemos el trapecio $ABCD$ de la figura. Si E y F son los puntos medios de los segmentos AD y BC , respectivamente, busca la relación que hay entre las áreas de los trapecios $ABFE$ y $FCDE$.	
Problemas de nivel 4	
Probl. 4.1. Si $ABCD$ es un paralelogramo y M es el punto medio del lado AB , ¿qué relación hay entre las áreas de las figuras I, II, III y IV?	
Probl. 4.2. Doblando de igual forma las cuatro esquinas de un cuadrado, como se indica en la figura, se obtiene en el centro otro cuadrado -cuadrado rayado-. Busca la relación entre los lados AB y BC de los triángulos doblados de tal forma que la relación entre las áreas del cuadrado rayado y del original sea $1/n$.	
Probl. 4.3. Justifica que al unir los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera siempre se obtiene un paralelogramo. ¿Qué relación hay entre las áreas de esas dos figuras?	

Tabla1. Árbol de problemas asociado al problema de los triángulos.

Los problemas que hemos denominado de nivel 1 del tipo *A* son los que involucran en su resolución sólo la estrategia de descomposición de una figura, y pueden ser particularizaciones muy simples del problema 3.1 (problema de los triángulos, Figura 3) inicialmente propuesto, o problemas de descomposición sobre mallas cuadradas o triangulares, etc. (ver Tabla 1).

Los problemas que hemos denominado de nivel 1 del tipo *B* son los que involucran en su resolución sólo la estrategia de comparación de bases y alturas de triángulos, y como los del tipo *A* pueden ser otras particularizaciones del problema de los triángulos, o problemas de descomposición sobre mallas cuadradas o triangulares en los que es muy fácil visualizar la comparación de bases y alturas para comparar sus áreas, o problemas de comparación con medidas concretas de los lados y alturas. (ver Tabla 1).

Los problemas que hemos denominado de nivel 2 son los que involucran en su resolución las dos acciones básicas de la línea 1 del espacio básico del problema 3.1, pero sobre figuras más sencillas, por ejemplo: considerando que el triángulo inicial *ABC* es rectángulo en el que es más fácil hacer las descomposiciones y visualizar las relaciones entre sus elementos, u otras particularizaciones como las de situar el punto *D* en el centro del lado *AB*, o presentar figuras en las que se explicita la relación entre sus lados, etc. (ver Tabla 1).

Los problemas de nivel 4 son comunes a todas las líneas del espacio básico del problema de los triángulos, y se caracterizan porque, aún siendo del mismo tipo (problemas que comparan áreas de superficies planas), e involucrar las mismas estrategias (descomposición y comparación, utilización de fórmulas y del lenguaje algebraico, consideración de problemas equivalentes, etc.), el desarrollo que conlleva es de una dificultad superior a las de nivel 3 (ver Tabla 1).

Una vez establecido el concepto de árbol de problemas asociado a un problema propuesto, sólo nos falta establecer los criterios que el *AGENTGEOM* seguirá para asignar dichos problemas al alumno según se vaya desarrollando el proceso de resolución del problema inicialmente propuesto. El esquema de la Figura 5 ilustra este proceso de asignación para la línea 1 del espacio básico del problema de los triángulos.

Para otras líneas del espacio básico del problema de los triángulos y para otros problemas del mismo nivel 3, el “árbol de problemas asociado” sería muy similar; incluso en muchos casos pueden valer los mismos problemas de otros niveles, ya que los problemas serían de la misma naturaleza: problemas que comparan áreas de superficies planas.

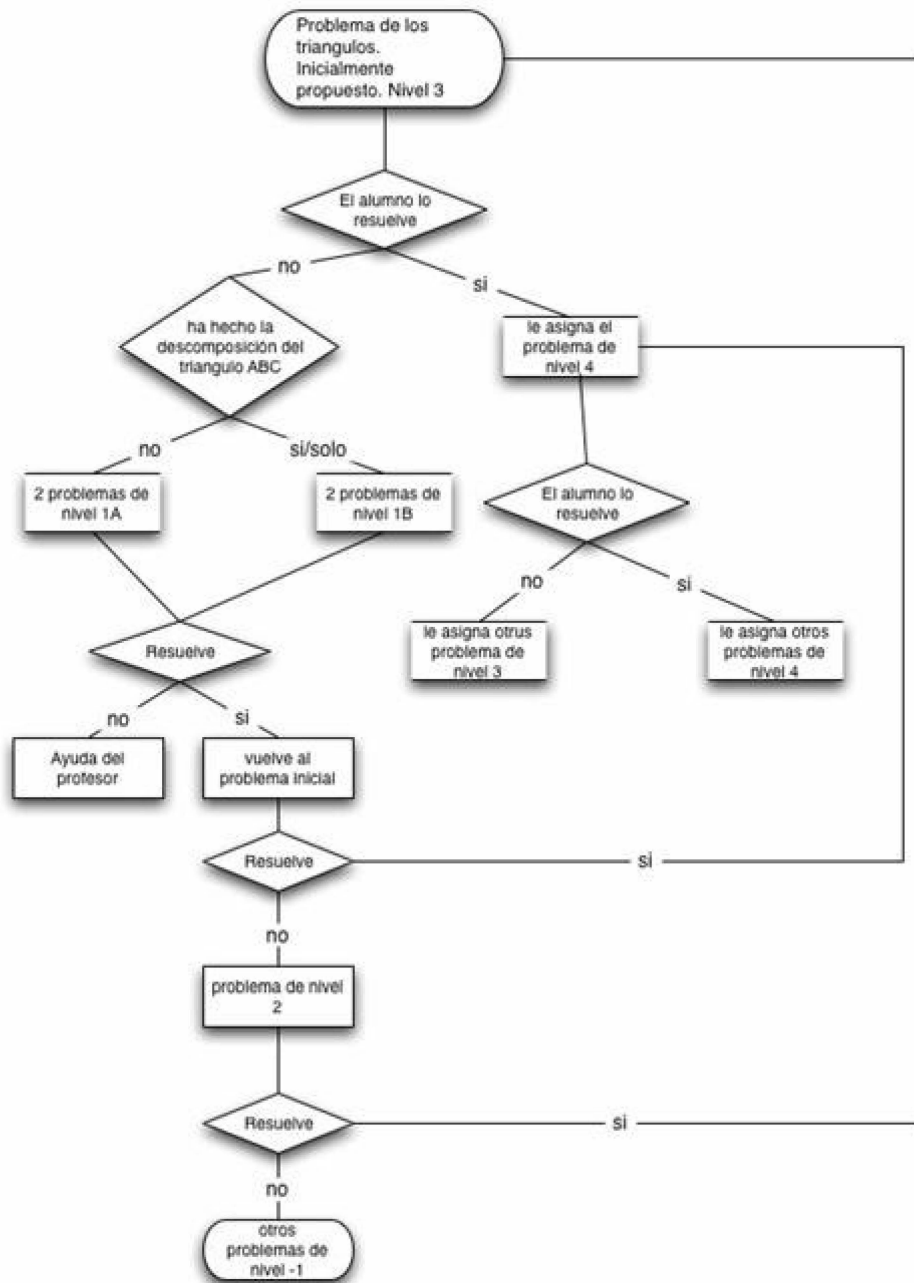


Figura 5. Esquema gráfico de la asignación de problemas del AGENTGEOM.

4.2. Modelo de discurso. Categorías de mensajes.

En el aprendizaje de las matemáticas tiene especial importancia la consideración de diferentes sistemas de representación de los conceptos matemáticos que se estudian, ya que cada uno de ellos tiene propiedades específicas que limitan intrínsecamente sus posibilidades y su uso. Así, el debate social debe considerar la coordinación de varios sistemas de representación durante la progresión de un razonamiento o de una argumentación. En la interacción alumno-AGENTGEOM se complementan la utilización de signos figurales (*expansión gráfica*, Richard 2004) con la de símbolos algebraicos y con el lenguaje natural (*expansión discursiva*, Richard 2004). En el AGENTGEOM el área gráfica facilita la utilización de la representación figural; el área deductiva posibilita la representación mediante símbolos algebraicos; y el lenguaje natural se potencia en los mensajes implementados en el sistema tutorial y en la posibilidad que tienen los alumnos de participar en foros de debate virtual durante o al final de los procesos de resolución.

En este contexto de interacción entre el alumno y el AGENTGEOM en el que consideramos importante el hecho de tener en cuenta tanto los sistemas de representación semiótica como el hecho de proporcionar al alumno la ayuda justa en cada momento de proceso de resolución es cuando introducimos el concepto de espacio básico de la acción tutorial, entendido como el espacio básico del problema al que hemos adjuntado los mensajes que queremos que el AGENTGEOM muestre al alumno en los momentos clave del proceso de resolución. En Cobo (2004) se muestran ejemplos de la construcción de espacios básico de la acción tutorial, y en Cobo y otros (2007) el algoritmo de selección de mensajes por parte del agente tutor.

En los párrafos siguientes hacemos un resumen de las categorías de mensajes que hemos considerado (Reverter y otros, 2007) después de analizar los procesos comunicativos que tienen lugar entre el profesor y los alumnos en los procesos de enseñanza de la resolución de problemas en el aula.

Hemos clasificado los mensajes que el agente tutor del *AGENTGEOM* envía al alumno teniendo en cuenta dos dimensiones: cognitiva y contextual.

a) Mensajes de tipo cognitivo

En los mensajes de contenido cognitivo, entendemos el conocimiento en un sentido amplio del término para que abarque tanto conocimientos conceptuales, heurísticos, metacognitivos, o sistemas de representación semiótica. Cuando hablamos de mensajes cognitivos de tipo conceptual estamos pensando no sólo en aquellos que hacen referencia a conceptos que aparecen en la resolución del problema, sino también a los que llamamos procedimientos algorítmicos y rutinarios, asociados a contenidos matemáticos específicos (identificación y representación de las alturas de un triángulo, aplicación de fórmulas, aplicación de criterios de congruencia de polígonos, etc.). Los mensajes heurísticos tienen que ver con la orientación a los alumnos sobre las diferentes formas de resolver el problema propuesto, es decir, los asociamos con cada una de las líneas del espacio básico del problema propuesto. En los mensajes del tipo metacognitivo consideramos tanto los relacionados con la gestión de los procesos de resolución, como con la reflexión que se les sugiera a los alumnos en determinados momentos sobre el proceso que están siguiendo o han seguido para resolver el problema.

A pesar de que el agente mediador no considera construido un objeto gráfico hasta que no le demos un nombre, podemos constatar en nuestras aulas y en las experimentaciones con el *AGENTGEOM* que los alumnos de ESO y Bachillerato echan en falta la utilización de datos concretos para resolver los tipos de problemas que consideramos. En estos momentos es muy importante tratar de conseguir que los alumnos tomen conciencia del uso de diferentes sistemas de representación semiótica implicados en una resolución. En esta línea van los mensajes sobre el uso de diferentes sistemas de representación.

Además, para tratar de ayudar a los alumnos durante los procesos de resolución sólo en la justa medida, hemos propuesto mensajes cognitivos diferenciados en tres niveles, según el grado de información que contengan. Así, los mensajes cognitivos de nivel 1 sólo nombran el concepto, la heurística, etc. sobre el que quieren llamar la atención al alumno. Los mensajes cognitivos de nivel 2 contienen información poco relevante sobre los conceptos, heurísticas, etc. En cambio, los de nivel 3 contienen una información más detallada, pero siempre procurando no dar nunca la información completa para que el problema no se convierta en un simple ejercicio. Nuestro objetivo es que incluso proporcionando a los alumnos mensajes de nivel 3 tengan dificultad para resolver el problema, como hemos constatado en las experimentaciones realizadas (Cobo, 2004). Además de los niveles de los mensajes que hemos citado, hemos diferenciado también los mensajes cognitivos según la fase del proceso de resolución en el que se encuentren los alumnos: familiarización, planificación/ejecución y verificación.

En la **Tabla 2** mostramos ejemplos de mensajes cognitivos de diferentes niveles y correspondientes a diferentes fases del proceso de resolución de un problema. Por ejemplo, los mensajes semióticos corresponden a las primeras fases de la resolución, los metacognitivos están relacionados con la fase de verificación del proceso, los cognitivos con la fase de ejecución, concretamente después de que el alumno haya descompuesto el triángulo *ABC* uniendo los puntos *E* y *F* (ver Figura 3), y los metacognitivos sobre la planificación.

Tipos de mensajes cognitivos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Conceptual	“Busca relaciones entre los segmentos que has obtenido”	“Puedes encontrar la relación entre los segmentos <i>EF</i> y <i>AB</i> ”	“¿Cómo justificarías que $AB = 2EF$? ¿Pensas que esa relación te puede servir?”
Heurístico	“Si te parece puedes intentar descomponer la figura en otras”	“Puedes descomponer el triángulo <i>ABC</i> en otros triángulos”	“Intenta descomponer el triángulo <i>ABC</i> en otros triángulos uniendo vértices o trazando paralelas”
Metacognitivo	“Reflexiona sobre la posibilidad de revisar la solución que has obtenido. Piensa cómo harías esta revisión”	“Repasa todo lo que has hecho para obtener la solución y escribe las deducciones más importantes en el área de deducciones”	“Los puntos que te han parecido clave en la resolución podrían ser: las descomposiciones, la aplicación de fórmulas...”
Semiótico	“Crees que para resolver el problema necesitas datos concretos”	“Piensa en alguna forma de representar los segmentos de la figura”	“Intenta expresar la relación que existe entre los segmentos de la figura utilizando una representación simbólica.”

Tabla 2. Mensajes cognitivos correspondientes a diferentes fases del proceso de resolución del problema de los triángulos.

b) Mensajes de tipo contextual

Con la construcción del *AGENTGEOM* queremos valorar la utilización de los entornos informáticos en el aprendizaje de las matemáticas. Así, desde nuestro sistema tutorial pretendemos que el alumno optimice no sólo su uso sino también la potencialidad de dichos entornos por lo que se refiere a la posibilidad de hacer consultas a bases de datos relacionadas con las matemáticas y a la posibilidad de que durante o al final del proceso de resolución los alumnos puedan establecer comunicaciones virtuales con su profesor o con sus compañeros, opción que el *AGENTGEOM* tiene incorporada. En este sentido, el agente tutor puede enviar a los alumnos mensajes de tipo contextual, como los que pretenden que el alumno optimice el uso del sistema: mensajes situacionales (“Puedes cargar una construcción de la figura del enunciado clicando en “*cargar figura*””); o como los que le instan a consultar redes de información multimedia, mensajes de utilización de recursos (“Puede que necesites leer la siguiente información sobre “*El cálculo del área*””); o mensajes que le animan a ponerse en contacto con algún compañero, mensajes de ayuda externa (“Si no puedes conseguirlo, puedes consultar a un compañero o al profesor”).

5. Conclusiones generales

Con esta experiencia hemos puesto de manifiesto que el *AGENTGEOM* puede ser una herramienta auxiliar del profesor, que le puede ayudar en sus necesidades de atender a la diversificación de alumnos con la que se encuentra cada día. A ello contribuye la capacidad que tiene el profesor, a través del *AGENTGEOM*, de adaptar los problemas y los mensajes a las características cognitivas de cada uno de sus alumnos.

El *AGENTGEOM* colabora, creando las condiciones necesarias de manera casi autónoma, en el desarrollo de las competencias de los alumnos, relacionadas con los procesos de resolución de problemas, con el desarrollo del razonamiento geométrico, y con la utilización del lenguaje matemático en los procesos comunicativos. Para ello, hemos diseñado el *AGENTGEOM* de forma que tiene dos áreas -gráfica y deductiva-, cuya utilización conjunta permite a los alumnos crear objetos matemáticos genéricos, es decir, desvinculados de las medidas concretas de sus elementos, para utilizarlos en las sentencias deductivas, que han de ser escritas siguiendo las normas propias del lenguaje matemático. Así pues, los alumnos desarrollan su capacidad de abstracción y se apropian de la idea de demostración matemática, gracias a la desvinculación de los objetos gráficos de sus medidas concretas, a la construcción de las sentencias deductivas tomando como referentes dichos objetos, y a la necesidad, que impone el *AGENTGEOM*, de no dar por válida una argumentación hasta que no haya habido un número mínimo de acciones reconocidas.

Además, hemos implementado la base de conocimientos del *AGENTGEOM* basándonos en el concepto de espacio básico de un problema, a partir del cual hemos generado el árbol de problemas asociado y el espacio básico de la acción tutorial. La implementación de la base de conocimientos a estos tres conceptos hace del *AGENTGEOM* un sistema tutorial que se adapta a las características cognitivas de cada alumno, orientando el desarrollo de las resoluciones de los problemas mediante el establecimiento de procesos comunicativos con los alumnos en base a oportunos mensajes textuales que hemos clasificado como cognitivos y contextuales, procurando proporcionarles las ayudas estrictamente necesarias.

6. Referencias

- P. Cobo (2004): *Disseny d'agents pedagògics intel·ligents per millorar les competències estratègiques de l'alumnat en la resolució de problemes de matemàtiques*. Memoria inédita de la licencia de estudios concedida por el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (DOGC núm. 3926, de 16/07/2003) [Disponible en <http://www.xtec.es/sgfp/llicencies/200304/memories/868m.pdf>].
- P. Cobo, J.M. Fortuny (2000): Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics* 42, 115-140.
- P. Cobo, J.M. Fortuny, E. Puertas, P. Richard (2007): *AGENTGEOM*: a multiagent system for pedagogical support in a geometric proof problem. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 12, 57-79.
- C. Coll, T. Mauri, J. Onrubia (2006): *Análisis y resolución de casos-problema mediante el aprendizaje colaborativo*. En Antoni Badia (coord.): *Enseñanza y aprendizaje con TIC en la educación superior [monográfico en línea]*. *Revista de Universitat y Societat del Conocimiento (RUSC)*, vol. 3, n.º 2 (UOC). [Disponible en http://www.uoc.edu/rusc/3/2/dt/esp/coll_mauri_onrubia.pdf. Fecha de consulta: 14/05/2007].
- Laboratoire Leibniz (2003): Baghera Assessment Project: designing an hybrid and emergent educational society. En S. Soury-Lavergne (ed.): *Rapport pour la commission européenne, Programme IST*. Grenoble: Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, nº, 81.
- V. Luengo (1999): Cooperative Agents to Learn Mathematical Proof. En P. Kommers, G. Richards (eds.): *Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications 1999*, Chesapeake, VA: AACE, p. 1632.
- F. Reverter, J.M. Fortuny, P. Cobo, P. Richard, E. Puertas (2007): *Indications for Evaluation for an Intelligent Tutorial System: AGENTGEOM*. En N. Guimaraes, P. Isaías (eds.): *Applied Computing-2007*, IADIS Press, pp. 599-603.
- P.R. Richard (2004): *Modélisation du comportement en situation de validation*. Peter Lang, Berne.
- K. Stacey, S. Groves (1999): *Resolver problemas: estrategias. Unidades para desarrollar el razonamiento matemático*. Nancea, Madrid.

[1] <http://antalya.uab.es/edumat/agentgeom>.

Sobre los autores



Pedro Cobo Lozano (i) es catedrático de Matemáticas del IES Pius Font i Quer de Manresa, doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB), profesor visitante de la UAB y profesor formador del ICE de la UAB. Ha participado y participa en proyectos de investigación relacionados con el uso de las nuevas tecnologías, subvencionados por el MEC y por la Generalitat de Catalunya. Como miembro del Grupo Vilatzara se dedica a la elaboración de material didáctico para la enseñanza secundaria.



Josep M. Fortuny Aymemí es doctor en Ciencias Matemáticas y catedrático del Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona. Sus líneas de investigación se enmarcan en la didáctica de la matemática, el aprendizaje y las interacciones sociales, y la tutorización.