Rev.Acad.Canar.Cienc., V (Núm. 1), 71-82 (1993)

EL OPERADOR DE DIFERENCIAS DE DOS ESCALAS Y SU APLICACION A LA RESOLUCION DE CIERTAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Javier Peralta

Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid

ABSTRACT

In the present paper we start out from the notions of difference of scale h - which generalizes the operator of finite differences- and of difference of several scales, in order to study in detail the difference of two scales. Afterwards we particularize the results which are obtained to the case of the sequences, and we show their application to resolve some difference equations.

Key words.- Derivatives of higher order; difference of two scales; difference equations.

RESUMEN

En este artículo partimos de las nociones de diferencia de escala h -que generaliza el operador de diferencias finitas- y de diferencia de varias escalas, para estudiar con detalle las diferencias de dos escalas. Más tarde particularizamos los resultados obtenidos al caso de las sucesiones, y mostramos su aplicación para resolver ciertas ecuaciones en diferencias.

Palabras clave.- Derivadas de orden superior; diferencias de dos escalas; ecuaciones en diferencias.

1. INTRODUCCION

En la búsqueda de una traducción y aplicación a otras ramas de la Matemática de las nociones de derivada de grado n y de extensión graduada de una aplicación aditiva -utilizadas en Geometría Diferencial ([1])-, hemos introducido en [2] el concepto de diferencia de escala h. Dicho concepto generaliza el operador de diferencias finitas, y puede aplicarse para la resolución de ciertas ecuaciones en diferencias y para la determinación del término general de ciertas sucesiones.

Por composición de las diferencias de escalas distintas, se definen las diferencias de varias escalas, de las que nos ocupamos en [3]. Las fórmulas que lográbamos entonces nos parecían de una gran complejidad y de difícil aplicación, en vista de lo cual anunciábamos la conveniencia de continuar dicho estudio con la limitación de considerar solamente dos escalas distintas; objetivo al que ahora nos dedicamos.

2. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS

A lo largo de todo el trabajo, f será una función real de una variable real, y h, k, $h_1, \ldots, h_n$, x, números reales. Cualquiera que sea t real, siempre que escribamos f(t), entenderemos que t pertenece al dominio de definición de f, sin necesidad de mencionarlo explícitamente.

Llamaremos <u>operador de diferencias de escala h de orden uno</u>, al operador d_h que hace corresponder a cada función f la función $d_h f$, definida como $d_h f(x) = f(x+h) - hf(x)$.

Es fácil probar que d_h es un operador $\mathbb{R}$-lineal, que $d_0 f = f$ y que $d_1 f = \Delta f$, siendo Δ el operador de las diferencias finitas.

Se llama <u>operador de diferencias de orden n y escala h</u>, $n \in \mathbb{N}$, o <u>diferencia enésima de escala h</u> a la aplicación $d_h^n = d_h \overset{(n)}{o \ldots o} d_h$, donde $d_h^0 f = f$, $d_h^1 f = d_h f$. Se cumple por ejemplo, que $d_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2hf(x+h) + h^2 f(x)$.

En [2] se dedujeron, entre otras, las siguientes fórmulas:

$$d_h^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} h^{n-i} f(x+ih) \qquad (1),$$

$$f(x+nh) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h^{n-i} d_h^i f(x) \qquad (2),$$

$$d_h^r f = 0 \Rightarrow f(x+nh) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} h^{n-i} d_h^i f(x) \qquad (3),$$

$$d_h^r f = 0 \Rightarrow f(x+nh) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{i=j}^{r-1} (-1)^{i-j} \binom{n}{i}\binom{i}{j} h^{n-j} f(x+jh), n \geq r \quad (4).$$

Se define el operador de diferencias de orden n de escalas $(h_1,\dots,h_n)$, $n \in \mathbb{N}$, como: $d^{(n)}_{(h_1,\dots,h_n)} = d_{h_1} \circ \dots \circ d_{h_n}$, siendo $d^{(0)}$ la identidad, y $d_h^{(1)} = d_h$.

Es sencillo probar que $d^{(n)}_{(h_1,\dots,h_n)}$ es un operador lineal, que es invariante respecto de cualquier permutación de los subíndices de las escalas y que $d^{(n)}_{(h,\dots,h)} = d_h^n$.

Merece la pena tener presentes dos resultados cuyas demostraciones pueden verse en [3]:

$$d^{(n)}_{(h_1,\dots,h_n)} f(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{s \in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h_{s(i+1)} \cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(i)}) \quad (5),$$

$$f(x+h_1+\dots+h_n) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} h_1 \dots \hat{h}_{i_1} \dots \hat{h}_{i_j} \dots h_n \, d^{(j)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_j})} f(x) \quad (6).$$

3. EXPRESIONES QUE RELACIONAN LAS DIFERENCIAS DE DOS ESCALAS DE UNA FUNCION CON DICHA FUNCION

La expresión de la diferencia enésima de una función en términos de la misma viene dada por (1), si se trata de una escala y por (5) si hay n escalas. Esta última fórmula es, sin embargo, muy difícil de manejar, por lo que se rehace de nuevo para el caso de dos escalas.

<u>Proposición 1.-</u> $d^{(n+m)}_{(h,\overset{(n)}{\dots},h,k,\overset{(m)}{\dots},k)} f(x) =$

$$= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} k^{m-i} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+m-i-j} \binom{n}{j} h^{n-j} f(x+jh+ik) \qquad (7).$$

Demostración.- $d^{(n+m)}_{(h,\overset{(n)}{\dots},h,k,\overset{(m)}{\dots},k)} f(x) = d_h \circ \overset{(n)}{\dots} \circ d_h \circ d_k \circ \overset{(m)}{\dots} \circ d_k f(x) =$

$= d_h^n(d_k^m f(x))$, y en virtud de (1) y de la linealidad de d_h:

$$d^{(n+m)}_{(h,\overset{(n)}{\dots},h,k,\overset{(m)}{\dots},k)} f(x) = d_h^n \left[\sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} k^{m-i} f(x+ik) \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} k^{m-i} d_n^h f(x+ik) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} k^{m-i} . \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} h^{n-j} f(x+ik+jh) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} k^{m-i} . \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+m-i-j} \binom{n}{j} h^{n-j} f(x+jh+ik). \ \square$$

El problema recíproco del anterior - obtener la función en términos de sus diferencias - queda resuelto en (2), si hay una sola escala, y en (6) si se trata de n escalas. Por la misma razón esgrimida anteriormente, nos planteamos de nuevo esta cuestión para el caso de dos escalas.

La Prop. 2 sirve para reducir (5) al caso de dos escalas, y la Prop. 3 se utilizará para poder proceder por inducción en la Prop. 4.

Proposición 2.- Si $h_1=\dots=h_n=h$, $h_{n+1}=k$, se tiene:

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le n+1} h_1\dots\hat{h}_{i_1}\dots\hat{h}_{i_j}\dots h_{n+1}\, d^{(j)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_j})} f(x) =$$

$$= \begin{cases} h^n k f(x), \text{ si } j=0. \\ \binom{n}{j} h^{n-j} k\, d^{(j)}_{(h,\dots,k)} f(x) + \binom{n}{j-1} h^{n-j+1} d^{(j)}_{(h,\overset{(j-1)}{\dots},h,k)} f(x), \text{ si } 1\le j\le n. \\ d^{(n+1)}_{(h,\dots,h,k)} f(x), \text{ si } j=n+1. \end{cases}$$

Demostración.- Si j=0, no hay que suprimir ningún factor del primer miembro, por lo que el producto de las h_i será $h_1\dots h_{n+1} = h^n k$. Por otro lado, la diferencia de la función f es respecto de los factores eliminados, luego será de orden cero; esto es, f.

Nos encontramos en el otro extremo, si $j=n+1$. Entonces se suprimen todas las h_i y solo queda $d^{(n+1)}_{(h,\dots,h,k)}f(x)$.

Si $1\le j\le n$, se eliminan j de las $n+1$ h_i. Como las n primeras h_i son iguales a h, si las j suprimidas se encuentran entre estas, habrá $\binom{n}{j}$ maneras de elegirlas; y la suma de los $\binom{n}{j}$ sumandos correspondientes, todos ellos iguales, es $\binom{n}{j}h^{n-j}kd^{(j)}_{(h,\dots,h)}f(x)$. En cambio, si se eliminan $j-1$ de entre las n primeras y la última: $h_{n+1}=k$, habrá $\binom{n}{j-1}$ posibilidades de elección. La suma de los términos correspondientes es entonces $\binom{n}{j-1}h^{n-(j-1)}d^{(j)}_{(h,\overset{(j-1)}{\dots},h,k)}f(x)$. □

<u>Proposición 3.-</u> $$f(x+nh+k) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j}h^{j}\sum_{i=0}^{1}k^{i}d^{(n+1-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},h,k,\overset{(1-i)}{\dots},k)}f(x) \quad (8).$$

<u>Demostración.-</u> En virtud de (6), $f(x+h_1+\dots+h_{n+1}) =$

$$= \sum_{j=0}^{n+1}\ \sum_{1\le i_1<\dots<i_j\le n+1} h_1\dots\widehat{h}_{i_1}\dots\widehat{h}_{i_j}\dots h_{n+1}\,d^{(j)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_j})}f(x),$$

y según la Prop. 2:

$$f(x+h_1+\dots+h_{n+1}) = h^{n}kf(x) + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}h^{n-j}kd^{(j)}_{(h,\overset{(j)}{\dots},h)}f(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}h^{n-j+1}d^{(j)}_{(h,\overset{(j-1)}{\dots},h,k)}f(x) + d^{(n+1)}_{(h,\overset{(n)}{\dots},k)}f(x) \qquad (9).$$

Llamando $l=n+1-j$, se tiene:

$$\sum_{j-1}^{n}\binom{n}{j-1}h^{n-j+1}d^{(j)}_{(h,\overset{(j-1)}{\dots},h,k)}f(x) = \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{n-l}h^{l}d^{(n+1-l)}_{(h,\overset{(n-l)}{\dots},h,k)}f(x),$$

y haciendo $l=n-j$:

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}h^{n-j}kd^{(j)}_{(h,\dots,h)}f(x) = \sum_{l=0}^{n-1}\binom{n}{n-l}h^{l}kd^{(n-l)}_{(h,\overset{(n-l)}{\dots},h)}f(x).$$

Sustituyendo en la expresión (9), reordenando los sumandos y operando, se tiene:

$$f(x+h_1+\dots+h_{n+1}) = d^{(n+1)}_{(h,\overset{(n)}{\dots},h,k)}f(x) + \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{n-l}h^{l}d^{(n+1-l)}_{(h,\overset{(n-l)}{\dots},h,k)}f(x) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-1}\binom{n}{n-l}h^{l}kd^{(n-l)}_{(h,\overset{(n-l)}{\dots},h)}f(x) + h^{n}kf(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{n-l}h^{l}\,d^{(n+1-l)}_{(h,\overset{(n-l)}{\dots},h,k)}f(x) + \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{n-l}h^{l}kd^{(n-l)}_{(h,\overset{(n-l)}{\dots},h)}f(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{n-l} h^{l} \sum_{i=0}^{1} k^{i} d^{(n+1-i-l)}_{(h,\overset{(n-l)}{\dots},k,\overset{(1-i)}{\dots},k)} f(x). \; \square$$

<u>Proposición 4.-</u> $f(x+nh+mk) =$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^{j} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{m-i} k^{i} d^{(n+m-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},h,k,\overset{(m-i)}{\dots},k)} f(x) \qquad (10).$$

<u>Demostración.-</u> Haremos la demostración por inducción sobre m.

Es obvio que (8) puede escribirse:

$$f(x+nh+k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^{j} \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{1-i} k^{i} d^{(n+1-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},h,k,\overset{(1-i)}{\dots},k)} f(x),$$

por lo que (10) se cumple para m=1.

Admitamos que (10) es cierta para m, y vamos a probarla para m+1.

Por definición de diferencia de escala k, y en virtud de la hipótesis de inducción y de que las diferencias son $\mathbb{R}$-lineales, tenemos:

$$f(x+nh+(m+1)k) = f((x+nh+mk)+k) = d_{k} f(x+nh+mk) + kf(x+nh+mk) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^{j} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{m-i} k^{i} d^{(n+m+1-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},h,k,\overset{(m+1-i)}{\dots},k)} f(x) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^{j} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{m-i} k^{i+1} d^{(n+m-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},k,\overset{(m-i)}{\dots},k)} f(x).$$

Haciendo l=i+1, se tiene:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^{j} \sum_{l=1}^{m+1} \binom{m}{m+1-l} k^{l} d^{(n+m+1-l-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},h,k,\overset{(m+1-l)}{\dots},k)} f(x), \text{ por lo que:}$$

$$f(x+nh+(m+1)k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^{j} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{m-i} k^{i} d^{(n+m+1-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},h,k,\overset{(m+1-i)}{\dots},k)} f(x) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^{j} \sum_{l=1}^{m+1} \binom{m}{m+1-l} k^{l} d^{(n+m+1-l-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},h,k,\overset{(m+1-l)}{\dots},k)} f(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^{j} \binom{m}{m} d^{(n+m+1-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},h,k,\overset{(m+1)}{\dots},k)} f(x) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^{j} \sum_{i=1}^{m} \left[\binom{m}{m-i} + \binom{m}{m+1-i}\right] k^{i} d^{(n+m+1-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},h,k,\overset{(m+1-i)}{\dots},k)} f(x) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^{j} \binom{m}{0} k^{m+1} d^{(n-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\dots},h)} f(x);$$

y teniendo en cuenta que $\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$, $\binom{m}{m-i} + \binom{m}{m+1-i} = \binom{m+1}{m+1-i}$, $\binom{m}{0} =$ $= \binom{m+1}{0}$, se tiene:

$$f(x+nh+(m+1)k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^j \binom{m+1}{m+1} d^{(n+m+1-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\ldots},h,k,\overset{(m+1)}{\ldots},k)} f(x) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^j \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{m+1-i} k^i d^{(n+m+1-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\ldots},h,k,\overset{(m+1-i)}{\ldots},k)} f(x) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^j \binom{m+1}{0} k^{m+1} d^{(n-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\ldots},h)} f(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} h^j \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{m+1-i} k^i d^{(n+m+1-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\ldots},h,k,\overset{(m+1-i)}{\ldots},k)} f(x). \square$$

4. RELACIONES A LAS QUE SE LLEGA SI SE ANULAN LAS DIFERENCIAS

Vamos a ver cómo quedan modificados los últimos resultados obtenidos si se anulan las diferencias primeras o las diferencias segundas de dos escalas.

<u>Proposición 5.-</u> Si $d_h f = 0$, entonces $f(x+nh+mk) = h^n f(x+mk)$ (11).

<u>Demostración.-</u> Evidentemente,

$$d^{(r+s)}_{(h,\overset{(r)}{\ldots},h,k,\overset{(s)}{\ldots},k)} f(x) = d^{(r+s-1)}_{(h,\overset{(r-1)}{\ldots},k,\overset{(s)}{\ldots},k)} (d_h f(x)),$$

luego si $d_h f(x) = 0$, también $d^{(r+s)}_{(h,\overset{(r)}{\ldots},h,k,\overset{(s)}{\ldots},k)} f(x) = 0$, $r \geq 1$, $s \geq 0$.

Así pues, $d^{(n+m-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\ldots},h,k,\overset{(m-i)}{\ldots},k)} f(x) = 0$ si $n-j \geq 1$, esto es, si $j \leq n-1$; luego , de los n+1 sumandos correspondientes a $j=0,1,\ldots,n$ de la expresión (10), sólo quedaría el correspondiente a $j=n$. Por lo tanto:

$$f(x+nh+mk) = \binom{n}{0} h^n \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{m-i} k^i d^{(m-i)}_{(k,\overset{(m-i)}{\ldots},k)} f(x) = h^n \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{m-i} k^i d_k^{m-i} f(x),$$

y este último miembro coincide con $h^n f(x+mk)$, en virtud de (2).$\square$

<u>Proposición 6.-</u> Si $d^{(2)}_{(h,k)} f(x) = 0$, entonces:

$$f(x+nh+k) = h^n f(x+k) + kf(x+nh) - h^n kf(x) \qquad (12).$$

<u>Demostración.-</u> Como $d^{(2)}_{(h,k)} f(x) = d_h(d_k f(x))) = d_h g(x)$, siendo $g(x) = = d_k f(x) = f(x+k) - kf(x)$, se tiene: $d_h g(x) = 0$; y por (4):

$$g(x+nh) = \sum_{j=0}^{0} \sum_{i=j}^{0} \binom{n}{i} h^{n-j} g(x+jh) = h^n g(x).$$

Pero $g(x+nh) = d_k f(x+nh) = f(x+nh+k) - kf(x+nh)$, luego:

$f(x+nh+k) - kf(x+nh) = h^n(f(x+k) - kf(x))$. □

Proposición 7.- Si $d^{(2)}_{(h,k)}f(x) = 0$, entonces $f(x+nh+mk) = h^n f(x+mk) + $
$+ k^m f(x+nh) - h^n k^m f(x)$ (13).

Demostración.- Lo probaremos por inducción sobre m.

La relación (12) asegura que se cumple para m=1. En la hipótesis de que se cumple para m, vamos a demostrarlo para m+1.

Como $d^{(2)}_{(h,k)}f(x) = 0$, cualquiera que sea x del dominio de definición de la función f, también será $d^{(2)}_{(h,k)}f(x+mk) = 0$.

Pero $d^{(2)}_{(h,k)}f(x+mk) = d_h(d_k f(x+mk)) = d_h g(x)$, siendo $g(x) =$ $= d_k f(x+mk)$.

De (4) se deduce que la solución de $d_h g(x) = 0$, es $g(x+nh)=h^n g(x)$, y como $g(x) = d_k f(x+mk) = f(x+(m+1)k) - kf(x+mk)$, $g(x+nh) =$ $= d_k f(x+nh+mk) = f(x+nh+(m+1)k) - kf(x+nh+mk)$, resulta:

$f(x+nh+(m+1)k) - kf(x+nh+mK) = h^n(f(x+(m+1)k) - kf(x+mk))$; esto es,

$f(x+nh+(m+1)k) = h^n f(x+(m+1)k) + kf(x+nh+mk) - h^n kf(x+mk)$.

Por último, en virtud de la hipótesis de inducción:

$f(x+nh+(m+1)k) = h^n f(x+(m+1)k) + k(h^n f(x+mk) + k^m f(x+nh) - h^n k^m f(x))-$
$- h^n kf(x+mk) = h^n f(x+(m+1)k) + k^{m+1} f(x+nh) - h^n k^{m+1} f(x)$. □

Proposición 8.- Si $d^r_h f = 0$ y $d^s_k f = 0$, entonces $d^{(n+m)}_{(h,\overset{(n)}{\dots},h,k,\overset{(m)}{\dots},k)} f = 0$, si $n \geqslant r$ ó $m \geqslant s$.

Demostración.- Sean $n=r+p$, $m=s+q$; $p,q \geqslant 0$. Se tiene:

$$d^{(n+m)}_{(h,\overset{(n)}{\dots},k,\overset{(m)}{\dots},k)} f(x) = d^{(p+m)}_{(h,\overset{(p)}{\dots},k,\overset{(q)}{\dots},k)}(d^r_h f(x)) = 0,$$

$$d^{(n+m)}_{(h,\overset{(n)}{\dots},k,\overset{(m)}{\dots},k)} f(x) = d^{(n+q)}_{(h,\overset{(n)}{\dots},h,k,\overset{(q)}{\dots},k)}(d^s_k f(x)) = 0. \ \square$$

5. CASO PARTICULAR DE LAS SUCESIONES. APLICACIONES

Si $h,k \in \mathbb{N}$ y f es una función real de variable natural, escribiremos $f(p) = y_p$, con lo que se tendrá la sucesión $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Entonces, las diferencias se definirán: $d_h y_p = y_{p+h} - hy_p$, $d_h^2 y_p = d_h(d_h y_p) = y_{p+2h} - 2hy_{p+h} + h^2 y_p$, $d^{(2)}_{(h,k)} y_p = d_h(d_k y_p) = y_{p+h+k} - hy_{p+k} - ky_{p+h} + hky_p$, etc.

Y en concreto, las relaciones (1), (2), (3), (4), (7), (10), (11) y (13) se escribirán, respectivamente:

$$d_h^n y_p = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i} h^{n-i} y_{p+ih} \qquad (1'),$$

$$y_{p+nh} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} h^{n-i} d_h^i y_p \qquad (2'),$$

$$d_h^r y_p = 0 \Rightarrow y_{p+nh} = \sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i} h^{n-i} d_h^i y_p \qquad (3'),$$

$$d_h^r y_p = 0 \Rightarrow y_{p+nh} = \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=j}^{r-1} (-1)^{i-j}\binom{n}{i}\binom{i}{j} h^{n-j} y_{p+jh}, \quad n \geq r \qquad (4'),$$

$$d^{(n+m)}_{(h,\overset{(n)}{\ldots},h,k,\overset{(m)}{\ldots},k)} y_p = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} k^{m-i}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+m-i-j}\binom{n}{j} h^{n-j} y_{p+jh+ik} \qquad (7'),$$

$$y_{p+nh+mk} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j} h^j \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{m-i} k^i d^{(n+m-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\ldots},h,k,\overset{(m-i)}{\ldots},k)} y_p \qquad (10'),$$

$$d_h y_p = 0 \Rightarrow y_{p+nh+mk} = h^n y_{p+mk} \qquad (11'),$$

$$d^{(2)}_{(h,k)} y_p = 0 \Rightarrow y_{p+nh+mk} = h^n y_{p+mk} + k^m y_{p+nh} - h^n k^m y_p \qquad (13').$$

Aplicaciones.- La teoría de las diferencias de dos escalas sirve para resolver ciertos pares de ecuaciones en diferencias, así como el estudio de las diferencias de n escalas es útil para la resolución de n ecuaciones en diferencias de un determinado tipo. Como al aumentar el número de escalas se complica considerablemente la notación y el manejo de las diferencias, nos limitaremos a las primeras, a las que hemos dedicado este trabajo.

Se pueden resolver conjuntamente las dos ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}h^{r-i}y_{p+ih}=0,\quad \sum_{i=0}^{s}(-1)^{s-i}\binom{s}{i}k^{s-i}y_{p+ik}=0.$$

En efecto, de (1´) se llega a que las ecuaciones anteriores pueden escribirse, respectivamente, $d_h^r y_p = 0$, $d_k^s y_p = 0$.

Ahora bien, de ello se deduce que en la expresión (10´) las diferencias que aparecen en el segundo miembro serán nulas si $n-j\geq r$, $m-i\geq s$; por lo que sólo habrá que considerar los sumandos correspondientes a $j>n-r$, $i>m-s$. Se tiene, por tanto:

$$y_{p+nh+mk}=\sum_{j=n-r+1}^{n}\binom{n}{n-j}h^j\sum_{i=m-s+1}^{m}\binom{m}{m-i}k^i d^{(n+m-i-j)}_{(h,\overset{(n-j)}{\ldots},h,k,\overset{(m-i)}{\ldots},k)}y_p,$$

que nos proporciona las soluciones de las dos ecuaciones de partida.

En efecto, si m=0, resulta:

$$y_{p+nh}=\sum_{j=n-r+1}^{n}\binom{n}{n-j}h^j d_h^{n-j}y_p,$$

que en virtud de (3´) coincide con la solución de la primera ecuación, sin más que hacer $i=n-j$.

Análogamente, si n=0,

$$y_{p+mk}=\sum_{i=m-s+1}^{m}\binom{m}{m-i}k^i d_k^{m-i}y_p=\sum_{j=0}^{s-1}\binom{m}{j}k^{m-j}d_k^i y_p,$$

que es la solución de la segunda ecuación.

<u>Ejemplo.-</u> Resolver las dos ecuaciones en diferencias:

$$y_{p+3}-3y_{p+2}+3y_{p+1}-y_p=0,\quad y_{p+4}-4y_{p+2}+4y_p=0.$$

Es obvio que pueden escribirse: $d_1^3 y_p=0$, $d_2^2 y_p=0$, con lo que estamos en el caso particular: h=1, k=2, r=3, s=2. Será:

$$y_{p+n+2m}=\sum_{j=n-2}^{n}\binom{n}{n-j}\sum_{i=m-1}^{m}\binom{m}{m-i}2^i d^{(n+m-i-j)}_{(1,\overset{(n-j)}{\ldots},1,2,\overset{(m-i)}{\ldots},2)}y_p=$$

$$=\binom{n}{2}\sum_{i=m-1}^{m}\binom{m}{m-i}2^i d^{(m+2-i)}_{(1,1,2,\overset{(m-i)}{\ldots},2)}y_p+\binom{n}{1}\sum_{i=m-1}^{m}2^i d^{(m+1-i)}_{(1,2,\overset{(m-i)}{\ldots},2)}y_p+$$

$$+\binom{n}{0}\sum_{i=m-1}^{m}\binom{m}{m-i}2^i d_2^{m-i}y_p=\binom{n}{2}\left[\binom{m}{1}2^{m-1}d^{(3)}_{(1,1,2)}y_p+\binom{m}{0}2^m d_1^2 y_p\right]+$$

$$+\binom{n}{1}\left[\binom{m}{1}2^{m-1}d^{(2)}_{(1,2)}y_p+\binom{m}{0}2^m d_1 y_p\right]+\binom{n}{0}\left[\binom{m}{1}2^{m-1}d_2 y_p+\binom{m}{0}2^m y_p\right].$$

Tras cálculos elementales se llega a:

$$y_{p+n+2m}=mn(n-1)2^{m-2}y_{p+4}+mn(2-n)2^{m-1}y_{p+3}+(n(-mn+2n-m-2)+2m)2^{m-2}y_{p+2}+$$
$$+(\frac{3mn}{2}(n-1)-2^{m}n(n-m-2))y_{p+1}+(n(-mn+n-m-3)-2(m-1))2^{m-1}y_{p}.$$

Si hacemos p=m=0, resulta: $y_n=\frac{n^2-n}{2}\,y_2+(2n-n^2)y_1+\frac{n^2-3n+2}{2}\,y_0$ (14).

Si hacemos p=n=0, se tiene: $y_{2m}=2^{m-1}(2(1-m)y_0+my_2)$ (15).

Y haciendo p=1, n=0: $y_{2m+1}=2^{m-1}(2(1-m)y_1+my_3)$ (16).

Por otro lado, para resolver la primera ecuación en diferencias por el método habitual, se hallan las soluciones de la ecuación característica: $r^3-3r^2+3r-1=0$, que resultan ser: r=1 (triple); por lo que la solución de la ecuación es $y_n = A + Bn + Cn^2$.

Para determinar las constantes A, B y C, se dan a n los valores 0, 1 y 2, y se hallan A, B y C en un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, que resuelto tiene por soluciones: $A=y_0$, $B=\frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2}$, $C=\frac{y_0-2y_1+y_2}{2}$. Así pues, $y_n=y_0+\frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2}\,n+\frac{y_0-2y_1+y_2}{2}\,n^2$, es la solución de la primera ecuación resuelta por el método habitual. Ordenada en y_2, y_1, y_0, es inmediato comprobar que coincide con (14).

Asimismo, la ecuación característica de la segunda ecuación es $r^4-4r^2+4=0$, de soluciones $r=\pm\sqrt{2}$, ambas dobles. La solución es, en consecuencia, $y_n=(A+Bn)(\sqrt{2})^n+(C+Dn)(-\sqrt{2})^n=2^{n/2}[(A+Bn)+(-1)^n(C+Dn)]$. Dando a n los valores 0, 1, 2 y 3, se obtiene un sistema que, una vez resuelto nos da: $A=\frac{8y_0+6\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}y_3}{16}$, $B=\frac{-4y_0-2\sqrt{2}y_1+2y_2+\sqrt{2}y_3}{16}$, $C=\frac{8y_0-6\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}y_3}{16}$, $D=\frac{8y_0+6\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}y_3}{16}$.

Así pues, después de operar se llega a que la solución de la segunda ecuación, resuelta por los métodos habituales es:

$$y_n=2^{(n-8)/2}(((8-4n)+(-1)^n(8-4n))y_0+(6\sqrt{2}-2\sqrt{2}n+(-1)^n(-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}n))y_1+$$
$$+(2n+(-1)^n2n)y_2+(-\sqrt{2}+\sqrt{2}n+(-1)^n(\sqrt{2}-\sqrt{2}n))y_3).$$

O bien, haciendo n=2m y operando, se obtienen los términos pares: $y_{2m}=2^{m-1}(2(1-m)y_0+my_2)$, que coincide con (15); y haciendo n=2m+1 y asimismo operando: $y_{2m+1}=2^{m-1}(2(1-m)y_1+my_3)$, que es igual a (16).

Nótese que también podrían haberse resuelto las dos ecuaciones por separado según (4´), como se indica a continuación.

La primera es $d_1^3 y_p=0$, luego la solución es:

$$y_{p+n}=\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=j}^{2}(-1)^{i-j}\binom{n}{i}\binom{i}{j}y_{p+j}.$$

Desarrollando el segundo miembro y haciendo p=0, se llega de nuevo a (14).

Análogamente, la segunda ecuación es $d_2^2 y_p=0$, cuya solución es:

$$y_{p+2m}=\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=j}^{1}(-1)^{i-j}\binom{m}{i}\binom{i}{j}2^{m-j}y_{p+2j}.$$

Desarrollando el segundo miembro, se tiene: $y_{p+2m}=2^{m-1}(2(1-m)y_p+ +my_{p+2})$, y haciendo p=0 y p=1 se obtienen de nuevo, respectivamente, (15) y (16).

BIBLIOGRAFIA

[1]. PERALTA, J. (1984). "On the graduated derivatives". Collectanea Mathematica, Barcelona, 35, 189-205.

[2]. PERALTA, J. (1990). "Diferencias de escala h". I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Las Palmas de Gran Canaria, 223-227.

[3]. PERALTA, J. (1991). "Introducción al estudio de las diferencias de varias escalas". Academia Canaria de Ciencias, La Laguna, III, 1 , 9-20.

Recibido: 30 de Noviembre de 1993

Rev.Acad.Canar.Cienc., V (Núm. 1), 83-90 (1993)

SOBRE EL OPERADOR DE HARDY-LITTLEWOOD REITERADO

por

M. Delgado Pineda y P. Jiménez Guerra

Abstract

The iterated Hardy-Littlewood operator is introduced and estudied, characterising the integrability of de maximal function of order $p \in \mathbb{N}$ of real measurable function defined on $\mathbb{R}^n$.

Como es bien sabido, al actuar el operador maximal de Hardy-Littlewood sobre una función medible $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se obtiene una nueva función denominada función maximal, f^*, tal que

$$f^*(x) = \sup \{ \frac{1}{|Q|} \int |f(t)| \, dt \; ; \; Q \in B(x) \}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, siendo Q un elemento de la base de diferenciación B(x), que en este trabajo consideraremos constituida por todos los cubos de lados paralelos a los ejes coordenados de $\mathbb{R}^n$, y $|Q|$ la medida de Lebesgue de Q.

Si esta función maximal f^*es finita para algún $x \in \mathbb{R}^n$ entonces la función f es localmente integrable. Las acotaciones, tanto superior como inferior, de la medida del conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ en los que la función maximal toma un valor mayor que una constante determinada, son de gran utilidad en el desarrollo de la teoría.

En [4] se muestra la existencia de dichas cotas en el caso de considerar funciones integrables, estableciendose en este trabajo un resultado similar para funciones medibles [2] cuya utilidad es patente a lo largo de todo el trabajo, permitiendo entre otras cuestiones probar una caracterización del espacio $L(1+\log^+L)(\mathbb{R}^n)$ mediante el operador maximal, que extiende a la dada en [4].

Posteriormente, se estudia la actuación del operador maximal de Hardy-Littlewood sobre funciones maximales, estudiandose las propiedades integrales de estas funciones, de esta forma se introducen las funciones maximales de orden k de funciones medibles y se prueba la integrabilidad de una función maximal de un cierto orden a partir de la integrabilidad de una función maximal de un orden mayor, y una caracterización de la integrabilidad de la función maximal reiterada de un cierto orden p, a partir de la integrabilidad de la función $|f| \left[\log \frac{|f|}{\delta}\right]^p$. Como consecuencia se obtiene que si una función $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable entonces

$\int_{f^{*p^*}>1} f^{*p^*}(t)dt < \infty$ si, y sólo si $f \in L(1+\log^+L)^p(\mathbb{R}^n)$, que en el caso