NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 83, julio de 2013, páginas 123-130

Isaac Barrow y su versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo

Juan Carlos Ponce Campuzano (Universidad de Colima. México)

Fecha de recepción: 22 de octubre de 2012
Fecha de aceptación: 17 de mayo de 2013

Resumen El Teorema Fundamental del Cálculo tal y como lo conocemos actualmente es el resultado de una larga evolución de ideas. Su origen se remonta al siglo XVII con la observación de la relación que existe entre los problemas de cuadraturas y tangentes. Entre los personajes que se percataron de dicha relación destaca el matemático inglés Isaac Barrow. En el presente artículo se discute uno de los resultados de Barrow que puede considerarse como una versión preliminar del Teorema Fundamental en un contexto geométrico.

Palabras clave Cálculo, tangentes, cuadraturas, historia, teorema fundamental del cálculo.

Abstract The Fundamental Theorem of Calculus, as we know it today, is the result of a long evolution of ideas. It dates back to the seventeenth century with the observation of the relationship between problems of quadratures and tangents. Among the characters who noticed this relationship highlights the English mathematician Isaac Barrow. In this article we discuss one of the results of Barrow which can be considered as a preliminary version of the Fundamental Theorem in a geometric context.

Keywords Calculus, tangents, quadratures, history, fundamental theorem of calculus.

1. Introducción

El Cálculo es considerado, junto con la Geometría, una de las creaciones más importantes dentro de las matemáticas (Kline, 1972, p.342). Fue creado, básicamente, para tratar los cuatro principales problemas planteados durante los siglos XV al XVII, algunos de los cuales ya habían sido abordados por los griegos en la antigüedad. El primero de estos problemas era, dada la fórmula para la distancia recorrida por un cuerpo como función del tiempo, encontrar la velocidad y aceleración instantánea; inversamente, dada la fórmula para la aceleración como una función del tiempo, encontrar la velocidad y la distancia recorrida. En el segundo problema se buscaba la tangente a una curva dada en un punto dado (*problema de las tangentes)* y en el tercero los valores máximos y mínimos de una función. Por último, el cuarto problema era encontrar el área y el volumen acotados por curvas y superficies, respectivamente (*problema de las cuadraturas*).

Los problemas antes mencionados fueron abordados, generalmente, como casos aislados por muchos científicos y matemáticos entre los siglos XV y XVII. Todas sus contribuciones fueron la base para el trabajo que posteriormente desarrollarían, de manera independiente, dos grandes personajes: el físico, astrónomo y matemático inglés Sir Isaac Newton (1642-1727) y el abogado, filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Newton y Leibniz abordaron los cuatro principales problemas pero basados en dos conceptos generales, conocidos actualmente como Derivada e Integral (Grabiner, 1983, p. 199). Su mayor contribución dentro del Cálculo fue el hecho de haber reconocido con claridad la relación que existe entre los problemas de cuadraturas y tangentes, pues por ejemplo un problema de cuadraturas se podía reducir a un problema de encontrar una curva que tenía una cierta regla de tangencia y también el trazo de una tangente a curva en un punto se podía reducir al problema de una cuadratura. Posteriormente, lo anterior se tradujo en lo que conocemos actualmente como relaciones de reciprocidad entre los procesos de Integración y Diferenciación, lo cual establece el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Es por esta razón que este teorema suele atribuirse a estos dos grandes matemáticos. Sin embargo, ellos no fueron los primeros ni los únicos en percatarse de la relación entre los problemas de cuadraturas y tangentes, tampoco enunciaron ni establecieron el TFC tal y como lo conocemos actualmente.

Entre los científicos que se percataron de la relación entre los problemas de cuadraturas y tangentes, previo a Newton y Leibniz, podemos destacar al matemático inglés Isaac Barrow (1630-1677). En este artículo, se presenta un resultado de Barrow el cual puede interpretarse como una versión preliminar del TFC en un contexto geométrico.

2. Versión geométrica del TFC de Isaac Barrow

Isaac Barrow fue un teólogo y matemático inglés quien destaca por sus contribuciones para el desarrollo del Cálculo moderno. Además, Barrow es bien conocido por ser uno de los primeros en reconocer la relación que existe entre los problemas de cuadraturas y tangentes (que en términos modernos se refiere a la integración y diferenciación como procesos inversos), pero sobre todo por ser de los primeros en dar una demostración rigurosa (Child, 1916, p. 124).

En 1669 Barrow publicó sus *Lectiones Geometricae* (Lecciones Geométricas) en donde estableció, entre otras cosas, métodos para trazar tangentes a curvas. En la Lección X, se puede encontrar la siguiente proposición:

> 11. Sea ZGE una curva cuyo eje es VD y consideremos las ordenadas (VZ, PG y DE) perpendiculares a este eje y continuamente creciendo desde la ordenada inicial VZ (Figura 1); también sea VIF una curva tal que si una línea recta EDF es trazada perpendicular al eje VD, cortando a las curvas en los puntos E, F y VD en D, el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio V DEZ; también sea DE : DF = R : DT, y unimos [T y F]. Entonces TF cortará a la curva VIF.
>
> Tomemos un punto I en la curva VIF (primero del lado F hacia V) y, a través de él, tracemos IG paralelo a VZ y IL paralelo a V D, cortando a las líneas dadas como se muestra en la figura; entonces, LF : LK = DF : DT = DE : R, es decir R × LF = LK × DE. Pero de la naturaleza de las líneas DF y LK se tiene R × LF = área(P DEG) por tanto se tiene que LK × DE = área(PDEG) < DP × DE, por lo tanto se tiene LK < DP < LI. De forma análoga, si el punto I se toma del otro lado de F, se haría la misma construcción de antes y se puede fácilmente demostrar LK > DP > LI. De donde es completamente claro que toda línea TKF permanece en o debajo de la curva VIF. Resultados análogos se obtienen si las ordenadas VZ, PG y DE decrecen en forma continua, la misma conclusión se obtiene mediante un argumento similar; sólo una particularidad ocurre, a saber; en este caso, al contrario que en el otro, la curva VIF es cóncava respecto al eje VD (Barrow, 1735, p. 167).

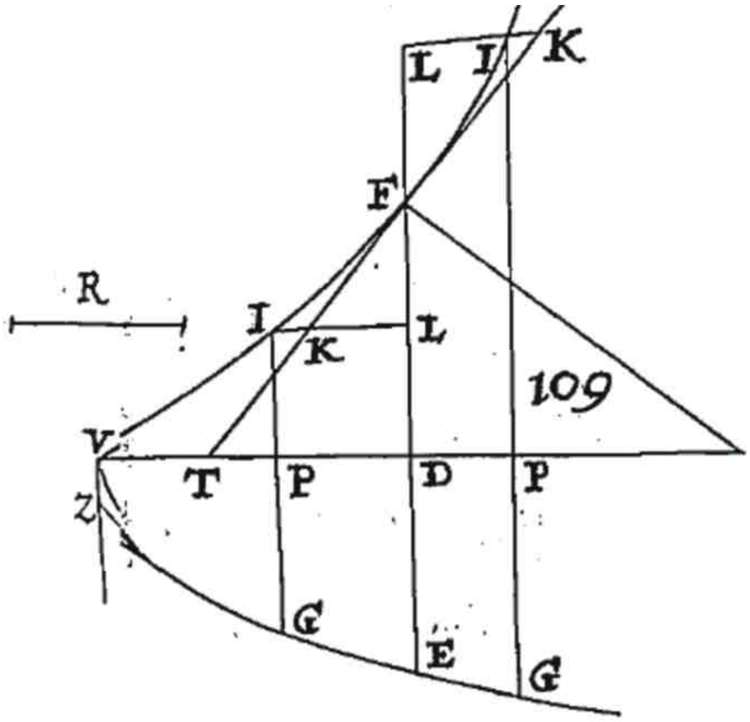

Figura 1. Diagrama de Barrow

La proposición anterior establece que para trazar una recta tangente a una curva, ésta última debe estar relacionada con la cuadratura de otra curva. Este resultado ha sido reconocido por diversos historiadores de las matemáticas como una versión preliminar del Teorema Fundamental del Cálculo. Más adelante se hablará con más detalle al respecto. Por el momento, continuemos analizando la proposición de Barrow y su demostración considerando el contexto matemático del siglo XVII. Por tal motivo, a continuación se presenta una construcción geométrica para trazar una recta tangente a una curva con ayuda del software Geogebra.

Construcción geométrica: Trazo de una tangente a una curva según Barrow

Sea el eje horizontal la recta que pasa por los puntos A y B (Figura 2). Sea *m* una curva continua y creciente[1] definida sobre el segmento AB. Sea C un punto en el segmento AB y tracemos las rectas perpendiculares que pasan por los puntos A y C, las cuales cortan a la curva *m* en los puntos E y D, respectivamente.

Ahora, sea F el punto sobre la recta CD que cumple lo siguiente: El área ACDE es igual al rectángulo determinado por el segmento CF y una longitud constante *h*[2]. Es decir,

$$\text{Área(ACDE)} = \text{CF} \times h$$

[1] Barrow considera una curva continua y creciente como se muestra en la Figura 2, debido a que en el siglo XVII no se consideraban aún magnitudes negativas bajo el eje.

[2] Barrow utiliza la longitud constante *h* para poder igualar el área ACDE a la del rectángulo determinado por CF y *h*. En el siglo XVII, se buscaba igualar el área de una figura geométrica al área de una figura más fácil de calcular como un cuadrado. En este caso Barrow utiliza un rectángulo.

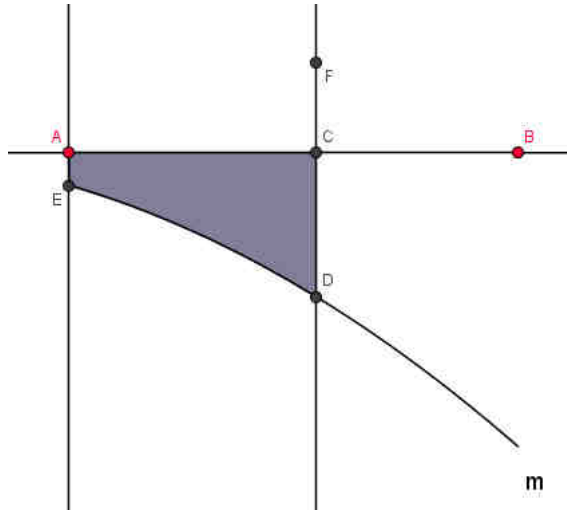

Figura 2. Curva continua y creciente *m* definida en el segmento AB.

Si movemos el punto C, podemos observar que el lugar geométrico del punto F determina una nueva curva *n*, definida en el segmento AB (Figuras 3).

Ahora, sea G un punto entre A y C tal que: DC/CF = *h*/GC[3] (Figura 3).

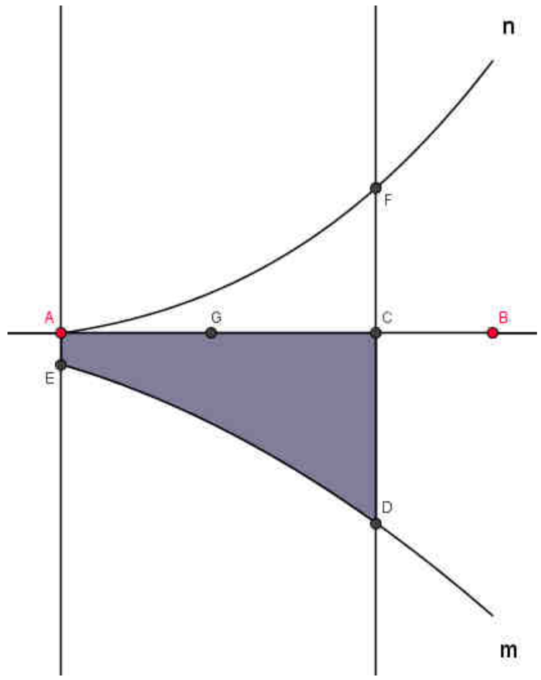

Figura 3. Curva *n* definida por el punto C / Punto G definido entre los puntos A y C.

Entonces, la recta que pasa por los puntos F y G es tangente a la curva *n* en F (Figura 4).

[3] En este punto Barrow utiliza la longitud constante *h* para poder establecer la igualdad entre las razones DC/CF y *h*/GC, ya que en su época una razón *a*/*b* debía ser igualada a otra razón.

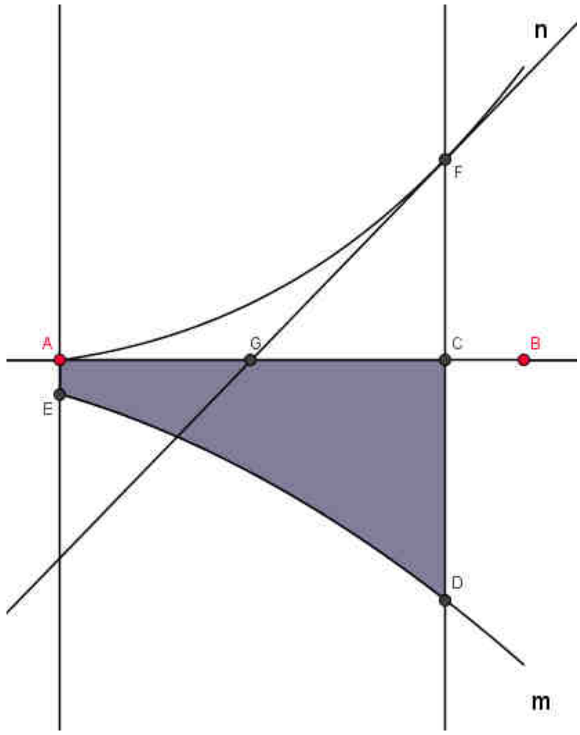

Figura 4. Punto G definido entre los puntos A y C

La construcción anterior se realizó con el programa de geometría dinámica Geogebra, basada en la proposición 11 de Barrow. Con base en esta construcción, se puede inferir que Barrow consideró movimiento del punto C, aunque nunca lo menciona de manera explícita pues, como vimos al inicio de la sección, él presenta dicha proposición en términos de una construcción estática.

Por otra parte, la proposición de Barrow destaca debido a que se relaciona la cuadratura de una curva con el problema de trazar de una tangente a otra curva que cumple con ciertas características. En este caso, la recta tangente se considera en el sentido griego, como una recta que toca a la curva en un solo punto. Barrow demostró esto último en un contexto geométrico.

Demostración geométrica de Barrow

Como se muestra en la Figura 5, sea I un punto en la curva *n* (entre A y F); sean IJ y IL segmentos perpendiculares a CF y AB, respectivamente; y sea C' el punto de intersección de los segmentos IL y AB. Entonces

$$FJ/KJ = CF/GC = DC/h$$

porque DC/CF = *h*/GC (establecido previamente). De la expresión anterior, se obtiene

$$h \times FJ = KJ \times DC.$$

Ahora, considerando que CF × *h* = Área(ACDE) y IC' × h = Área(AC'LE), se puede establecer lo siguiente

$$FJ \times h = (CF\text{-}IC') \times h = CF \times h\text{-}\ IC' \times h = \text{Área}(ACDE) - \text{Área}(AC'LE).$$

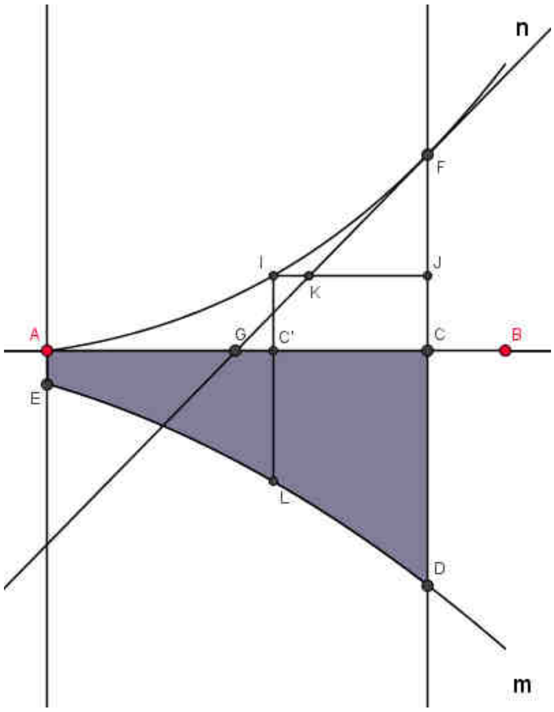

Figura 5. Trazos auxiliares para la demostración geométrica de Barrow.

Por lo tanto, se tiene que FJ × *h* = Área(C’CDL). De esta manera, dado que

$$h \times \mathrm{FJ} = \mathrm{KJ} \times \mathrm{DC} \text{ y } \mathrm{FJ} \times h = \text{Área}(\mathrm{C'CDL}),$$

entonces

$$\mathrm{KJ} \times \mathrm{DC} = \text{Área}(\mathrm{C'CDL}) < \mathrm{C'C} \times \mathrm{DC}.$$

Es decir, KJ < C’C = IJ. De forma análoga, si el punto I se toma del otro lado de F, se puede hacer la misma construcción de antes para demostrar que KJ > C’C = IJ. En cualquier caso, la recta que pasa por los puntos G y F permanece debajo de la curva *n*. Es decir, la recta que pasa por los puntos G y F es tangente a la curva *n* en el punto F.

3. Relación entre el resultado de Barrow y el Teorema Fundamental del Cálculo

El resultado de Barrow, presentado en la sección anterior, resulta de gran relevancia debido al hecho de que relaciona el problema de tangentes con el de cuadraturas. Esto podría interpretarse como una versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo actual.

Para precisar lo anterior, sea f una función continua y creciente definida en un intervalo $[a,b]$. Definamos la curva continua que describe el área acumulada con la expresión

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Consideremos los puntos $\mathrm{D}=(x,F(x))$ y $\mathrm{E}=(x,f(x))$ y sea $\mathrm{F}=(0,x-\mathrm{XF})$ el punto en el intervalo $[a,x]$ tal que:

$$\frac{\mathrm{XD}}{\mathrm{XE}}=\mathrm{XF} \tag{2}$$

donde XD y XE son iguales a $F(x)$ y $f(x)$, respectivamente (ver Figura 6). Entonces, la recta que pasa por los puntos D y F es tangente a la curva F.

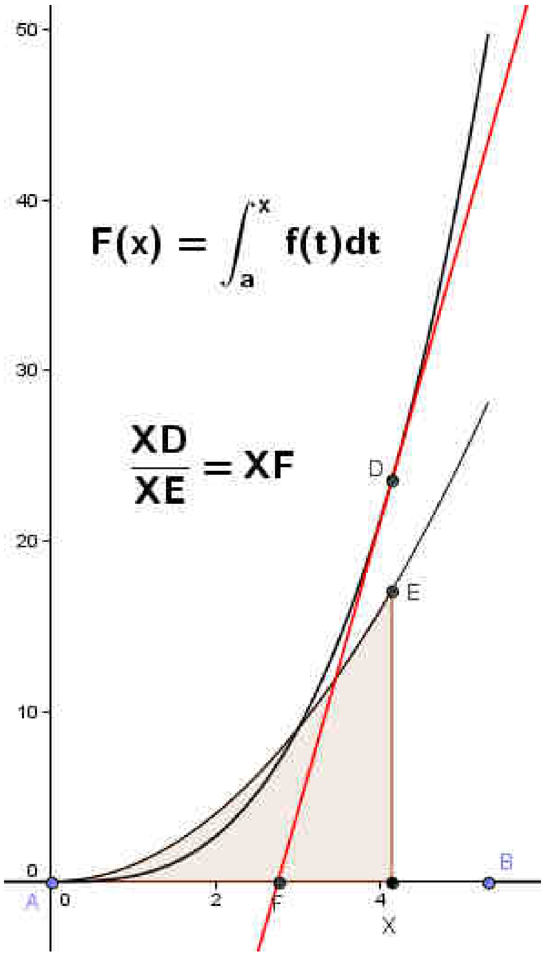

Figura 6. Versión moderna del resultado de Barrow.

De esta forma, la relación con el Teorema Fundamental del Cálculo es clara ya que se ve fácilmente que la pendiente de la recta tangente construida es $m=XD/XF$, esto es, $m=f(x)$ por la expresión (2). Escribiendo entonces que

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

y teniendo en cuenta que $m=F'(x)$, la proposición de Barrow nos dice que $F'(x)=f(x)$, esto es

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

lo cual sitúa el resultado original de Barrow como un precedente del Teorema Fundamental del Cálculo.

Es importante resaltar el hecho de que Barrow realizó una demostración geométrica y no analítica, sin embargo esto no es un demérito en absoluto de su trabajo, la demostración que presenta es válida y rigurosa en el sentido de la geometría Euclidiana. Es aquí donde destaca su contribución al respecto del Teorema Fundamental, por la claridad y extensión de su pensamiento.

4. Comentarios finales

El Teorema Fundamental del Cálculo tal y como lo conocemos actualmente es el resultado de una larga evolución de ideas. Ha sido refinado y pulido de tal manera que se puede considerar en el contexto de funciones generales. Asimismo, prácticamente se ha divorciado de contexto original, es decir, como una relación entre problemas de cuadraturas y tangentes (Bressoud, 2011, p. 109). Desde un punto de vista didáctico, no es necesario presentar el Teorema Fundamental en los cursos de Cálculo tal y como se dio originalmente, pero una discusión acerca de su origen y desarrollo puede ser provechosa para comprender las relaciones que establece dicho teorema.

Bibliografía

Barrow, I. (1735). *Geometrical Lectures.* (Translated from the Latin Edition by Edmund Stone). London: Cambridge University.

Bressoud, D. M (2011). Historical reflections on teaching the Fundamental Theorem of Calculus. *American Mathematical Monthly.* 118, (2), 99-115.

Child, J. M. (1916). *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow.* London: The Open Court Publishing Company.

Grabiner, J. V. (1983). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine.* 56, (4), 195-206.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press.

Juan Carlos Ponce Campuzano. Estudiante de Doctorado en la especialidad de Matemática Educativa en el Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN (Cinvestav-IPN), México. Profesor Investigador de Tiempo Completo, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima, México. jcponce@cinvestav.mx