Recibido: lunes, 12 de marzo de 2007; revisado: lunes, 28 de enero de 2008

economía ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 4, no. 1 (feb. 2008)

Modelos de Lévy y la dinámica de precios en mercados latinoamericanos

María Cristina Mariani
Department of Mathematical Sciences
New Mexico State University (USA)
e-mail: mmariani@nmsu.edu
página web: http://www.math.nmsu.edu/~mmariani

1. Introducción

En las últimas décadas los fenómenos económicos y financieros han comenzado a ser estudiados a través de modelos matemáticos rigurosos, destacándose los modelos para saltos y colapsos financieros o "*crashes*". Simultáneamente se produjo el nacimiento de una nueva disciplina llamada "Econofísica" [1]. Los físicos han ampliado el campo de su interés incluyendo en sus investigaciones temas relacionados con la economía y las finanzas [1-5].

Las propiedades estadísticas de las series temporales que reflejan la evolución de los precios cumplen con un papel fundamental en la elaboración de modelos de los mercados financieros. En este contexto, uno de los problemas fundamentales que se ha estudiado es el de la existencia de correlaciones de corto, medio y largo rango en los mercados financieros.

La caracterización empírica de los procesos estocásticos requiere usualmente del estudio de las correlaciones temporales y de la determinación de las densidades de distribución de probabilidad (PDF) asintóticas. El modelo más simple propuesto para describir la evolución del mercado de acciones, conocido como *movimiento browniano geométrico*, considera que el incremento del logaritmo de los precios es un proceso difusivo con distribución de Gauss [6]. Sin embargo, el estudio empírico de las series reales de precios de algunos de los índices más importantes muestra que a escalas temporales cortas, como las que se utilizan para estudiar la evolución de índices bursátiles cerca de un colapso financiero o *crash*, las densidades de distribución de probabilidad de estas series tienen mayor curtosis que la de una distribución de Gauss [5]. El primer intento de explicar este comportamiento fue hecho en 1963 por Mandelbrot [7], quien propuso modelizar el incremento del logaritmo del precio del algodón con un proceso estocástico estable de Lévy no gaussiano [8].

Desde entonces, las distribuciones de Lévy han tenido múltiples aplicaciones en diversas disciplinas: Economía, Física, Astrofísica, por mencionar solamente algunas. Existe una abundante bibliografía sobre las distribuciones de Lévy; recomendamos consultar [1], [9-12] y las referencias que se encuentran allí.

Esta clase de distribuciones obedecen a relaciones de escala, es decir, que existe un parámetro cuyo valor determina la escala de la distribución. En general, si el parámetro es grande la distribución es más dispersa, y si es pequeño, es más concentrada. Por otro lado, estas distribuciones carecen de varianza finita y no describen la transición a la estadística gaussiana observada en las escalas temporales largas. Estas dos dificultades pueden salvarse proponiendo que la evolución temporal de los mercados financieros esté descrita por una distribución llamada *vuelo de Lévy truncado* (TLF) [13]. El vuelo de Lévy truncado se construye sumando variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas descritas por una *distribución truncada de Lévy* (TLD).

La distribución truncada de Lévy consiste en una distribución de Lévy en la parte central pero con colas que decrecen más rápido. Esta distribución tiene varianza finita, y por lo tanto el teorema del límite central asegura que será convergente a la distribución de Gauss. Proponiendo un corte exponencial en las colas de la distribución, Koponen [14] derivó una expresión analítica para la función característica de una distribución truncada de Lévy.

En lo que respecta a la presencia de correlaciones en los índices, se ha podido observar que los incrementos de los precios sólo presentan correlaciones débiles en escalas temporales cortas (menores a diez minutos). Por otra parte, en el caso de la volatilidad, la memoria temporal es mucho más larga.

Estos resultados teóricos han sido aplicados al estudio empírico de los mercados financieros, pero la mayoría de los trabajos se elaboraron a partir de los índices de mercados bien desarrollados, con gran volumen de transacciones, habiendo muy pocos trabajos publicados acerca de lo que sucede con mercados más pequeños [15-18]. Al estudiar mercados financieros emergentes se encontraron algunas diferencias, que no permitían describir la evolución de los índices financieros por una distribución de Lévy truncada.

Para salvar estas diferencias al estudiar mercados desarrollados y emergentes, muy recientemente han sido introducidos los *modelos de Lévy truncados normalizados* [18], que presentan dos notables ventajas. La primera es que, como es aceptado, el hecho del valor de un índice bursátil es fuertemente proporcional a la escala de tiempo. Al normalizar con respecto a la varianza pueden compararse las propiedades estadísticas en escalas de tiempo diferentes. En segundo término, diferentes mercados financieros tienen, en general, diferentes riesgos. Esto es particularmente notable cuando se comparan índices de mercados desarrollados con índices de mercados emergentes.

La normalización esencialmente implementa un ajuste al riesgo, que permite entonces comparar los comportamientos de índices de mercados desarrollados con índices de mercados emergentes.

A continuación se realiza una breve introducción a las distribuciones de Lévy, y luego se describen aplicaciones de los modelos normalizados de Lévy al análisis de los principales índices bursátiles de países con economías emergentes y se los compara con el comportamiento de índices bursátiles de países con economías desarrolladas.

2. Marco teórico y desarrollo de los modelos de Lévy para índices financieros

Lévy y Khintchine [19, 20] resolvieron el problema de determinar la forma funcional que adoptan todas las distribuciones estables, es decir, que verifican una ley de los grandes números. Encontraron que la manera más general de representarlas analíticamente está dada a través de sus *funciones características* o *transformadas de Fourier*.

La forma analítica para una distribución de Lévy estable que verifica la ley fuerte de los grandes números sólo se conoce en los siguientes casos: distribución de Lévy-Smirnov, distribución de Lorentz, distribución gaussiana.

Estas distribuciones fueron utilizadas por Mandelbrot [7] para modelizar la evolución del precio del algodón.

A partir de la determinación de las distribuciones de Lévy se han realizado numerosos estudios de sus propiedades. Una de las más notables es el hecho de que el comportamiento asintótico para grandes valores de x es una ley de potencias. Este descubrimiento tiene como consecuencia el que los procesos estables de Lévy posean varianza infinita.

Para evitar los problemas del segundo momento infinito, Mantegna y Stanley han propuesto un proceso estocástico con varianza finita y que además obedece a relaciones de escala, llamado *vuelo de Lévy truncado* (TLF) [13]. Este modelo consiste básicamente en cortar una distribución de Lévy, haciéndola nula fuera de un intervalo fijo.

Como las únicas distribuciones estables son las de Lévy, la distribución truncada de Lévy no lo es, pero al tener varianza finita converge a la distribución de Gauss aunque, a diferencia de otras distribuciones, lo hace muy lentamente. Otra característica del vuelo de Lévy truncado es el no ser una suma infinitamente divisible de procesos estocásticos idénticamente distribuidos, debido a que el corte que presenta en sus colas es abrupto. Para evitar este corte abrupto en la distribución, Koponen [14] propuso un vuelo de Lévy truncado en el que la función de corte es una exponencial decreciente caracterizada por un parámetro l. El vuelo de Lévy truncado ha sido aplicado para analizar el comportamiento de mercados financieros, especialmente durante un colapso o *crash* de la economía. Sin embargo, los modelos no normalizados arrojaban resultados muy diferentes al analizar índices financieros de mercados desarrollados, con un volumen de transacciones muy grande, de los obtenidos al analizar (en periodos de tiempo similares) índices bursátiles de mercados emergentes [15-17]. Las distribuciones de probabilidad acumulada de los retornos correspondientes a índices latinoamericanos mostraban un comportamiento asintótico de ley de potencias y no era posible concluir que la distribución truncada de Lévy modelizaba adecuadamente la evolución de índices bursátiles de países emergentes. Según Weron [21] esto no significaba que la evolución de los índices no estuviera gobernada por una estadística de este tipo, sino que era una consecuencia de la utilización de muestras finitas.

Al implementar los modelos de Lévy normalizados [18] estas diferencias han quedado eliminadas, habiendo quedado comprobado que estos modelos explican muy adecuadamente la evolución tanto de mercados desarrollados como de mercados emergentes. Básicamente, los modelos de Lévy normalizados consisten en modelos de Lévy truncados, que también han sido normalizados con respecto a la escala de tiempo y al riesgo; ello permite estudiar el comportamiento de índices financieros en distintas escalas de tiempo, lo que es necesario cuando se estudian colapsos económicos. La normalización con respecto al riesgo es esencial para el estudio de mercados financieros con riesgos muy diferentes, es decir, índices de mercados desarrollados, con un volumen de transacciones muy grande, en los que no hay prácticamente posibilidades de arbitraje, simultáneamente con índices de mercados emergentes, en los que el volumen de transacciones muchas veces es pequeño, y existen posibilidades de arbitraje.

3. Aplicaciones al estudio de distintos mercados financieros

A continuación se describe una aplicación de las distribuciones de Lévy normalizadas al estudio de mercados de países con diferentes economías: presentamos un análisis de índices financieros de Latinoamérica, simultáneamente con el análisis del índice financiero de Hong Kong, y el de uno de los índices más importantes de Estados Unidos. El siguiente análisis se realizó utilizando datos de los cierres diarios de índices bursátiles de cinco países: Argentina (MERVAL), desde el 8 de octubre de 1996 hasta el 24 de julio de 2005; México (MXX), desde el 8 de noviembre de 1991 hasta el 22 de octubre de 2001; Brasil (BOVESPA), desde el 27 de abril de 1993 hasta el 24 de junio de 2005. El número de datos del MERVAL es de 2.151, el del MXX es de 2.476, el del BOVESPA es de 3.009, el de HSI es de 3.583. También se presenta un análisis de datos del índice SP500 (este es un índice bursátil del New York Stock Exchange), correspondiente al período comprendido entre el 3 de enero de 1950 hasta el 23 de junio de 2005 (13.951 datos), con el objeto de poder comparar los demás resultados con los de uno de los mercados más grandes del mundo.

En las Figuras 1, 2, 3, 4 y 5 se muestran las distribuciones de probabilidad acumulada del retorno normalizado de los índices SP500, MXX, BOVESPA, MERVAL y HSI, respectivamente.

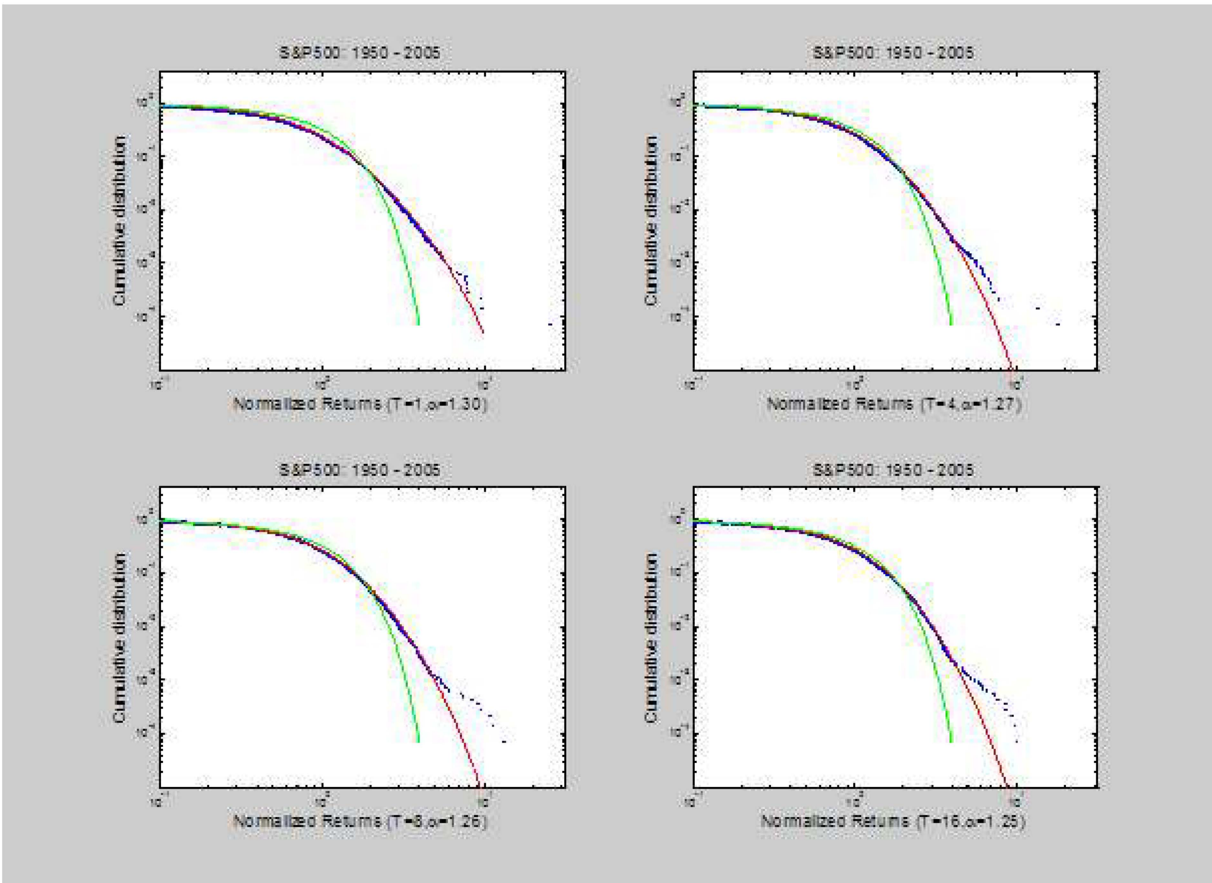

Figura 1. Gráfico de la distribución de probabilidad acumulada para valores del índice financiero SP500 para cuatro escalas de tiempo diferentes. La línea verde indica la curva de Gauss, y la línea roja la mejor interpolación numérica con la distribución de Lévy. Se han utilizado datos desde 1950 a 2005. La cantidad representada en el eje horizontal del gráfico es el retorno normalizado del índice SP500, y la cantidad representada en el eje vertical del gráfico es la distribución de probabilidad acumulada del retorno normalizado del índice SP500. El parámetro T representa la escala de tiempo. El parámetro α es propio de la distribución de Lévy, y toma valores entre 1 y 2.

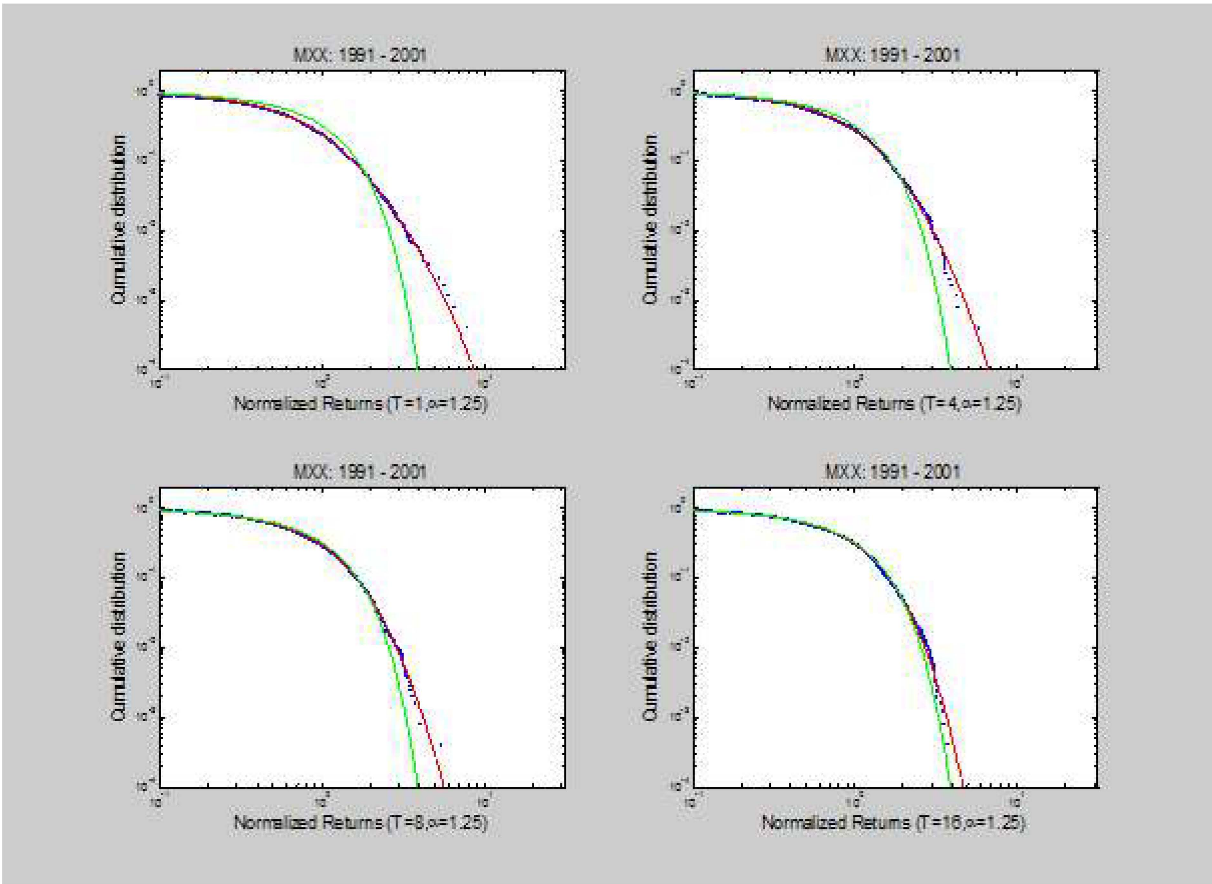

Figura 2. Gráfico de la distribución de probabilidad acumulada para valores del índice financiero de México MXX para cuatro escalas de tiempo diferentes. La línea verde indica la curva de Gauss, y la línea roja la mejor interpolación numérica con la distribución de Lévy. Se han utilizado datos desde 1991 a 2001.

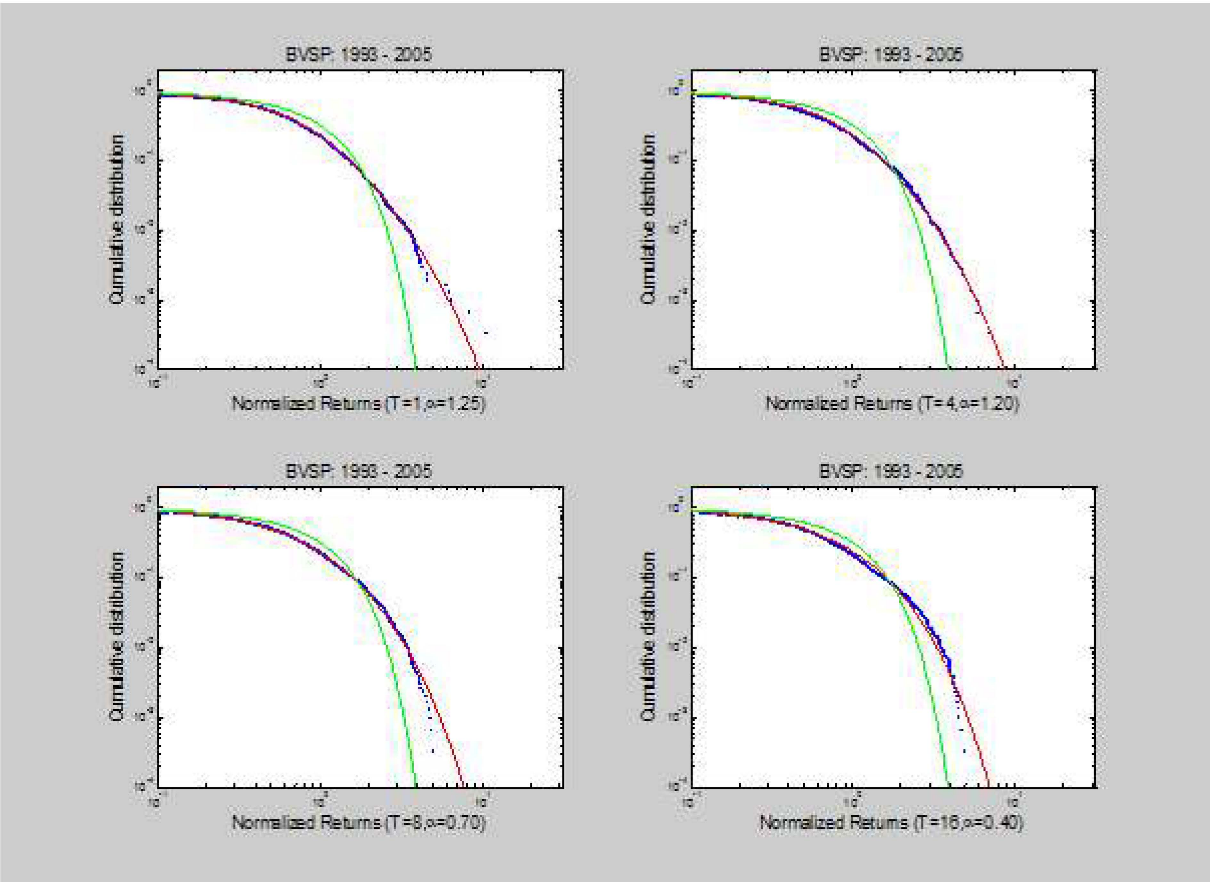

Figura 3. Gráfico de la distribución de probabilidad acumulada para valores del índice financiero de Brasil BVSP para cuatro escalas de tiempo diferentes. La línea verde indica la curva de Gauss, y la línea roja la mejor interpolación numérica con la distribución de Lévy. Se han utilizado datos desde 1993 a 2005.

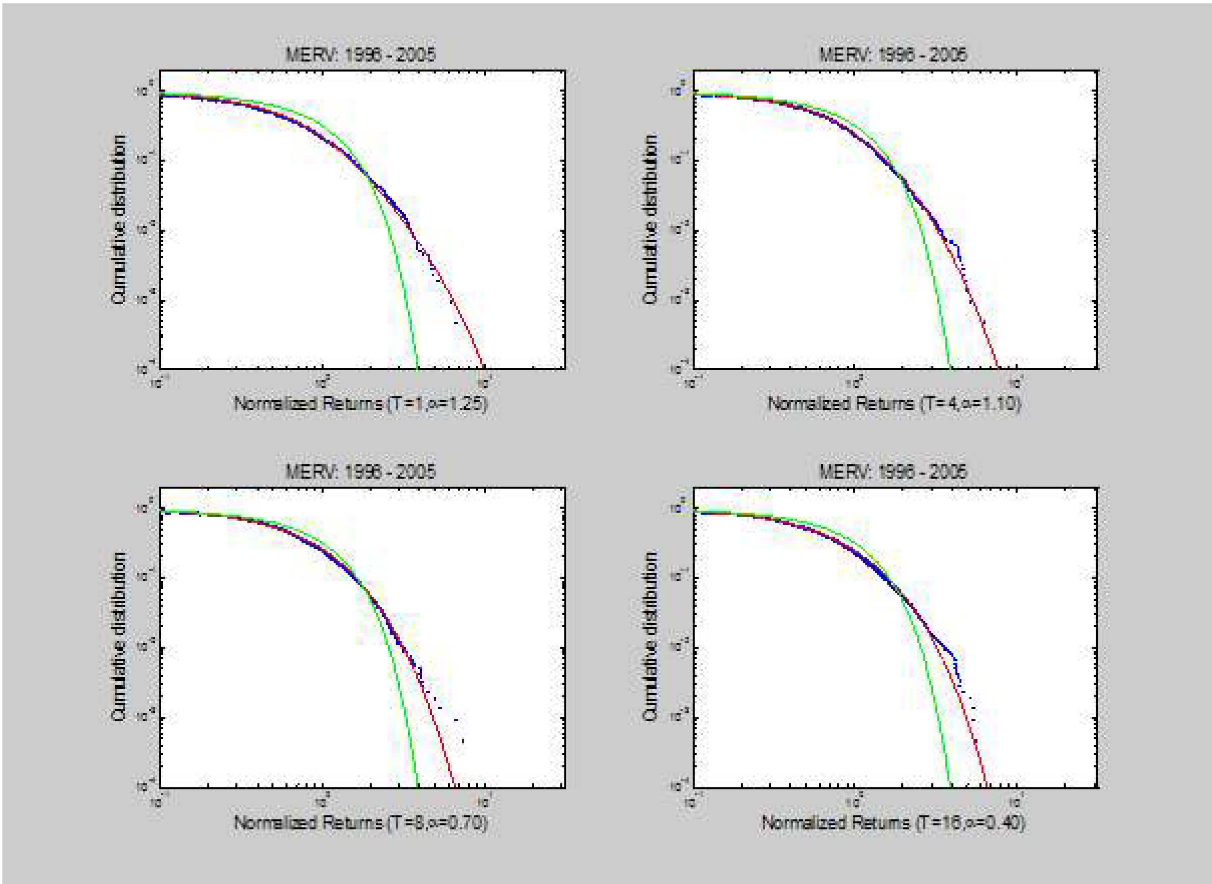

Figura 4. Gráfico de la distribución de probabilidad acumulada para valores del índice financiero de Argentina MERV para cuatro escalas de tiempo diferentes. La línea verde indica la curva de Gauss, y la línea roja la mejor interpolación numérica con la distribución de Lévy. Se han utilizado datos desde 1996 a 2005.

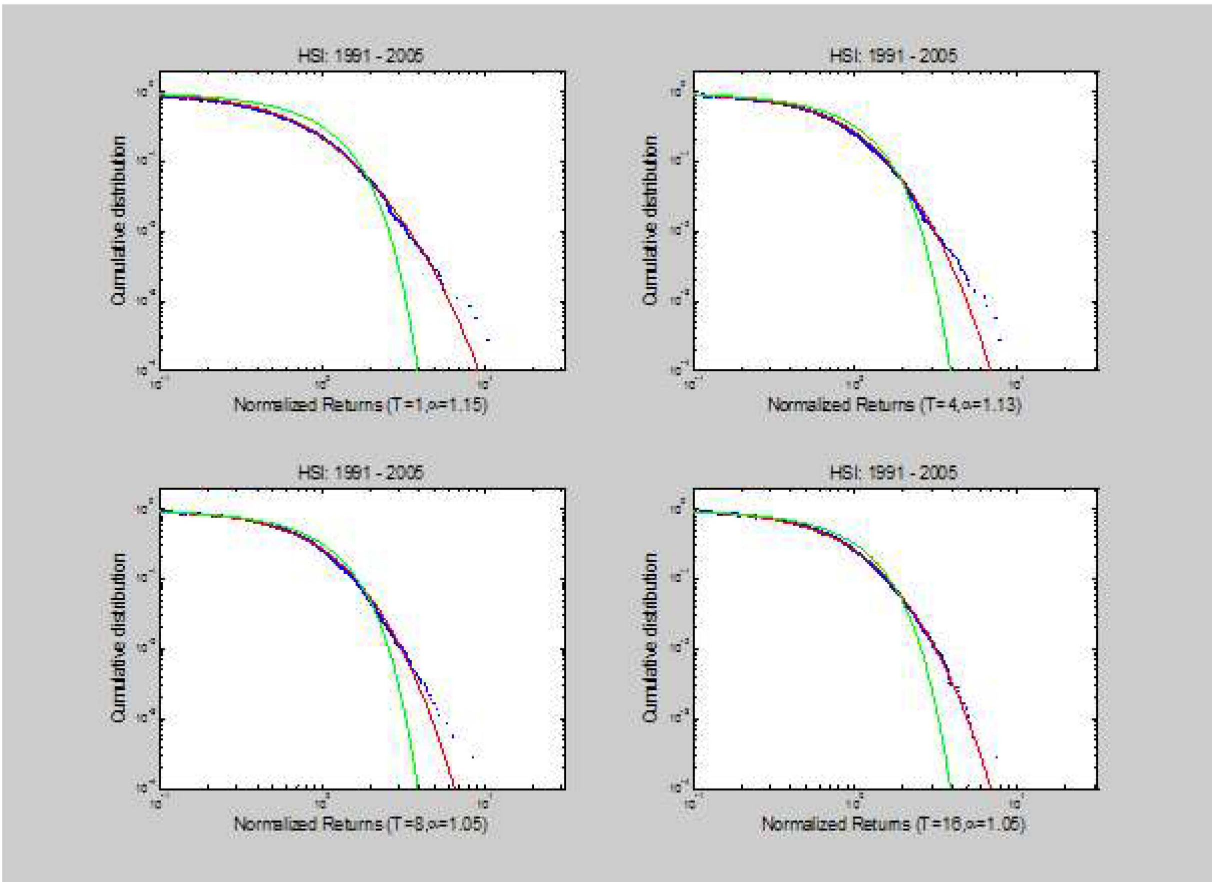

Figura 5. Gráfico de la distribución de probabilidad acumulada para valores del índice financiero de Hong Kong HSI para cuatro escalas de tiempo diferentes. La línea verde indica la curva de Gauss, y la línea roja la mejor interpolación numérica con la distribución de Lévy. Se han utilizado datos desde 1991 a 2005.

Es necesario remarcar que en las curvas de distribución de probabilidad acumulada del retorno normalizado de los correspondientes índices se observan algunos puntos fuera de la curva. Estos puntos corresponden a caídas del valor del índice en periodos de tiempo muy cortos (uno o dos días) que sucedieron a los índices estudiados: octubre de 1987 para el SP500; octubre de 1997 para el MXX, BOVESPA y MERVAL; y septiembre de 1997 para el HSI. Estas fechas corresponden a la caída de 1987 para el índice SP500, y al colapso global de índices provocado por la crisis asiática de 1997, que afectó especialmente a mercados emergentes, según se discute en [22].

Esta es exactamente la forma en que definimos un *crash* o colapso del mercado financiero: *un crash del mercado financiero es un punto fuera de la distribución de probabilidad acumulada del proceso estocástico descrito por el modelo de Lévy.*

Referencias

[1] a b c R.N. Mantegna, H.E. Stanley: *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] ^ H.E. Stanley, V. Afanasev, L.A.N. Amaral, S.V. Buldyrev, A.L. Golderberger, S. Havlin, H. Leschorn, P. Maass, R.N. Mantegna, C.-K. Peng, P.A. Prince, M.A. Salinger, M.H.R. Stanley, G.M. Viswanathan: Anomalous Fluctuations in the Dynamics of Complex Systems: From DNA and Physiology to Econophysics. *Physica A* 224 (1996), 302-321.

[3] ^ H.E. Stanley, L.A.N. Amaral, D. Canning, P. Gopikrishnan, Y. Lee, Y. Liu: Econophysics: Can Physicists Contribute to the Science of Economics? Proc. 1998 Econophysics Workshop, *Physica A* 269 (1999), 156-169.

[4] ^ J.-Ph. Bouchaud, M. Potters: *Théorie des riques financiers*. Alea-Saclay/Eyrolles, Paris, 1997.

[5] a b R.N. Mantegna, H.E. Stanley: Scaling Behaviour in the Dynamics of an Economic Index. *Nature* 376 (1995), 46-49.

[6] ^ P. Willmott, J.N. Dewynne, S.D. Howison: *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press, Oxford, 1993.

[7] a b B.B. Mandelbrot: The variation of certain speculative prices. *J. Business* 36 (1963), 394-419.

[8] ^ P. Lévy: *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires.* Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[9] ^ Wikipedia: *Lévy distribution,* http://en.wikipedia.org/wiki/L%C3%A9vy_distribution.

[10] ^ Wikipedia: *Levy skew alpha-stable distribution*, http://en.wikipedia.org/wiki/Lévy_skew_alpha-stable_distribution.

[11] ^ The Center for Polymer Studies at Boston University: *Econophysics Research: Publications,* http://polymer.bu.edu/~hes/econophysics.

[12] ^ C.R. Gwinn: *Interstellar Levy Flights*, http://www.physics.ucsb.edu/%7Ecgwinn/Lévy/Lévy.html.

[13] a b R.N. Mantegna, H.E. Stanley: Stochastic Process with Ultra-Slow Convergence to a Gaussian: The Truncated Lévy Flight. *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994), 2946-2949.

[14] a b I. Koponen: Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process. *Phys. Rev. E* 52 (1995), 1197-1199.

[15] a b S. Jaroszewicz, M.C. Mariani, M. Ferraro: Long correlations and truncated Lévy walks applied to the study of Latin American market indices. *Physica A* 355 (2005), 461-474.

[16] a b K. Matia, M. Pal, H. Salunkay, H.E. Stanley: Scale-Dependent Price Fluctuation: Analysis of the Indian Stock Market. *Europhys. Lett.* 66 (2004), 909-914.

[17] a b M.P. Beccar Varela, M. Ferraro, S. Jaroszewicz, M.C. Mariani: *Truncated Lévy walks applied to the study of the behavior of market indices*. Proceedings of the South Central SAS Users Group, 15th Conference, San Antonio, Texas, 2005.

[18] a b c M.C. Mariani, Y. Liu: Normalized truncated Lévy walks applied to the study of financial indices. *Physica A* 377 (2007), 590-598.

[19] ^ P. Lévy: *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1925.

[20] ^ A.Ya. Khintchine, P. Lévy: Sur les lois stables. *C.R. Acad. Sci. Paris* 202 (1936), 374-376.

[21] ^ R. Weron: Lévy-stable distributions revisited: tail index >2 does not exclude the Lévy-stable regime. *Intern. J. Modern Phys. C* 12 (2001), 209-223.

[22] ^ M.C. Mariani: La matemática financiera y el nacimiento de una nueva disciplina. *Matematicalia*, Economía, Vol. 2.2 (abril 2006).

Sobre la autora

María Cristina Mariani es licenciada en Ciencias Matemáticas, licenciada en Ciencias Físicas y doctora en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires. Ha sido investigadora y profesora en la Universidad de Buenos Aires, la Comisión de Energía Atómica y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas en Argentina; en Purdue University, Estados Unidos; y en la actualidad en New Mexico State University, Estados Unidos. Ha dirigido numerosos proyectos de investigación financiados por agencias de Estados Unidos, Europa y Argentina. Es autora de más de noventa artículos científicos de investigación en revistas como *Forum Mathematicum*, *Physica A*, *Nonlinear Analysis* y *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, en temas de matemática pura y aplicada a la física y las finanzas. Profesora visitante de las siguientes universidades: Université Libre de Bruxelles; Université Catholique de Louvain; Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University; University of Texas at Austin; Universität Konstanz; Universidad de Chile, Santiago; Technische Universität Berlin, ha dictado conferencias invitadas en dichas instituciones y en otras de reconocido prestigio.