LA DEMOSTRACIÓN ELEMENTAL DEL TEOREMA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Javier Cilleruelo Mateo

En 1949 Paul Erdös y Atle Selberg sorprendieron a la comunidad matemática con una nueva demostración del teorema de los números primos en la que, por primera vez, sólo se habían utilizado argumentos de naturaleza elemental.

TEOREMA (números primos). *El número de primos menores o iguales que x, $\pi(x)$, satisface la relación asintótica*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

El teorema había sido probado 50 años antes por J. Hadamard y C. De la Vallée Poussin. Pero aquella demostración, y otras simplificaciones posteriores se habían apoyado en la poderosa maquinaria de la teoría de funciones de variable compleja que se había estado desarrollando durante la segunda mitad del Siglo XIX. Debemos remontarnos a los albores de las matemáticas y recorrer la historia de los números primos para saborear el gran acontecimiento que supuso esta nueva demostración, de carácter elemental, que evitaba la utilización de todo tipo de técnicas analíticas.

Los orígenes

El teorema fundamental de la aritmética afirma que todos los enteros mayores que 1, se pueden expresar como producto de números primos y de manera única, salvo por el orden de los factores. Son, por lo tanto, los objetos más relevantes de los números enteros, siendo además los responsables de las propiedades aritméticas de éstos. La prueba de este resultado, que ya era conocido por los pitagóricos, aparece en el libro IX de los *Elementos* de Euclides.

¿Cuándo se acaba la lista de los números primos, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...? Euclides argumentó que si hubiera un número finito de números primos, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ entonces el número $N = p_1, p_2, \ldots, p_k + 1$, no podría ser divisible por ninguno de estos primos; es decir por ningún primo, contradiciendo por tanto el teorema fundamental de la aritmética.

TEOREMA (Euclides). *Existen infinitos números primos.*

Los números primos van apareciendo de una manera muy errática, pero cada vez con menor frecuencia, en la sucesión de los números enteros. El teorema de Euclides nos asegura que hay infinitos números primos. Pero, ¿cómo de numerosos son?, ¿cuántos números primos hay menores que x?

El gran matemático Leonhard Euler (1707-1783) encontró una identidad maravillosa que relacionaba los números primos con los números enteros:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}, \text{ para todo } s > 1.$$

Es fácil convencerse de la validez de esta identidad. Cada uno de los factores del producto es igual a

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots,$$

y al multiplicar en todos los primos obtenemos una suma infinita de fracciones donde los denominadores son producto de primos o potencias de primos elevados a s. El teorema fundamental de la aritmética nos asegura que aparecen todos los números naturales y solamente una vez cada uno.

Si se toman logaritmos en la identidad y hacemos tender $s \to 1$, la parte de la izquierda tiende a infinito y la parte de la derecha tiende, salvo por un término finito, a la suma de los inversos de los primos. De esta manera, Euler demostró uno de los muchos teorema que llevan su nombre.

Teorema (Euler).

La suma de los inversos de los primos es infinita.

En particular, como ya se sabía desde Euclides, el teorema de Euler implica la existencia de infinitos números primos. Pero también implicaba algo más: los primos tienen que ser bastante numerosos para que la suma diverja. Legendre, en 1798, fue el primero en conjeturar que $\pi(x)$, el número de primos menores que x, debía aproximarse asintóticamente a $\frac{x}{\log x}$. Por las mismas fechas, K. F.
49 Gauss, utilizando una inmensa tabla de números primos que él mismo había construido, observó que la densidad de los primos en un entorno de n era aproximadamente $\frac{1}{\log n}$, por lo que el número de primos menores que x debería ser,

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}.$$

Tuvieron que pasar muchos años hasta que, en 1850, Chebyshev consiguiera demostrar, con un ingenioso argumento combinatorio, que de hecho ese es el orden de magnitud de los primos menores que x.

Teorema (Chebyshev). *Existen dos constantes positivas $c < 1 < C$, tales que*

$$c \frac{x}{\log x} < \pi(x) < C \frac{x}{\log x}, \text{ para todo } x \geq 2.$$

No se confiaba, sin embargo, en que este tipo de argumentos combinatorios se pudieran afinar tanto como para poder demostrar el teorema de los números primos.

La demostración analítica

Bernhard Riemann (1826-1866), extraordinario matemático que había brillado con luz propia en otras disciplinas de las matemáticas, dejó también su huella en la teoría de números. Para su ingreso en la Real Academia de Berlín, en

1860, redactó una famosa memoria de ocho páginas en la que sentaba las bases de lo que unos años más tarde concluiría con la demostración del teorema de los números primos. La idea de Riemann fue, siguiendo los pasos de Euler, conectar el estudio de la función $\pi(x)$ con el de la función

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} ,$$

pero considerada, a partir de ahora, como una función de variable compleja. La derivada logarítmica de la identidad de Euler se traduce en la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ,$$

donde

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, \; si \; n = p^k, \; p \; primo \\ 0 \quad en \; otro \; caso \end{cases}$$

Por otra parte no es difícil comprobar que el teorema de los números primos es equivalente al enunciado que afirma que

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x$$

La estrategia de Riemann consistió en tratar de obtener información sobre $\Psi(x)$ a partir de las propiedades de la función $\zeta(s)$. La función zeta de Riemann, como se conoce a esta función, tiene un único polo simple que es $s = 1$ y se puede extender de forma analítica a todo el plano complejo. La localización de sus ceros en la denominada banda crítica, $0 \leq Re(s) \leq 1$, está estrechamente ligada a la distribución de los números primos. Riemann conjeturó que todos los ceros en esa banda estaban sobre la recta $Re(s) = \frac{1}{2}$. Esta famosa conjetura es conocida como la hipótesis de Riemann y es uno de los retos más difíciles a los que se enfrentarán los matemáticos del siglo XXI.

El ulterior desarrollo de la teoría de funciones de variable compleja, motivado entre otras razones por el trabajo de Riemann, dio lugar a que en 1896 el francés Jaques Hadamard y el belga Charles de la Vallée Poussin, de manera independiente, consiguieran justificar todos los detalles del esbozo de demostración que Riemann había plasmado en su memoria y demostrar, por fin, el resultado más deseado de la teoría de números: El teorema de los números primos.

En aquellos momentos parecía todavía más difícil que los métodos elementales pudieran sustituir a toda la maquinaria analítica que se había necesitado para probar el teorema.

La demostración elemental

Tuvo que pasar medio siglo hasta que Paul Erdös y Atle Selberg, dos matemáticos que habían sobresalido por su dominio de los métodos elementales, aunasen sus esfuerzos y lograsen una demostración completamente elemental del teorema de los números primos. Por razones que más tarde se comprenderán, es preferible contar la historia insertando frases textuales de cada uno de ellos. Según Erdös:

> El punto inicial de la demostración elemental del teorema de los números primos fue la fórmula fundamental de Selberg, para la cual encontró una ingeniosa demostración elemental:

$$\sum_{p<x} (\log p)^2 + \sum_{pq<x} \log p \log q = x \log x + O(x).$$

La identidad de Selberg se deducía fácilmente del teorema de los números primos y era, en un cierto sentido, cercana al teorema. Pero ya que Selberg había encontrado una demostración elemental de dicha identidad que evitaba el teorema del número primo, cabía la esperanza de ir en el otro sentido utilizando solamente métodos elementales. Paul Erdös fue quien intuyó esta posibilidad y dio un paso decisivo en esa dirección. Según Selberg:

> La demostración original se basó en el siguiente resultado de Erdös: para todo $\delta > 0$, existe un $K(\delta) > 0$ tal que si x es suficientemente grande, entonces hay más de $K(\delta) \frac{x}{\log x}$ primos en el intervalo $(x, x + \delta x)$.

Este resultado, que Erdös había deducido a partir de la identidad de Selberg, les permitió a ambos y de manera independiente (según afirma Selberg), concluir con la demostración elemental del teorema de los números primos.

Siempre ha existido una sombra que ha rodeado a tan notable descubrimiento. Si bien la demostración había sido completamente "elemental", la colaboración entre ambos no dejó de ser "compleja". Entre Erdös y Selberg hubo
49 intercambio de ideas, y parece ser que la primera intención fue publicar el resultado conjuntamente. No está claro qué ocurrió para que al final publicasen dos artículos por separado, aunque parece que tuvo que ver con ello el hecho de que Selberg consiguiera una demostración que prescindía del paso intermedio dado por Erdös.

Sea como fuere, este desagradable incidente, que les distanció para siempre, no debe empañar la impresionante trayectoria matemática de ambos.

Paul Erdös (1913-1996), húngaro, ha sido, con más de 1600 artículos, el segundo matemático más prolífico de todos los tiempos, solamente superado por Euler. Colaboró con 460 matemáticos diferentes. Su habilidad con los métodos elementales, combinatorios y probabilísticos impulsó muchas áreas de la teoría de números y de la combinatoria.

Atle Selberg (1917-), noruego, es uno de los más grandes matemáticos de este siglo. En 1950 le fue concedida la medalla Fields por sus trabajos sobre los métodos de criba y sobre los ceros de la función zeta de Riemann.

Bibliografía

Erdös, P.: "On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 35, 1949. pp. 374-384.

Selberg, A.: "An elementary proof. of the prime-number theorem", Annals of Mathematics, Vol. 50. No.2, April, 1949. pp 305-313.