

El fósil de un número (Problemas Comentados XXX)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático¹)

Resumen

Este artículo tiene un carácter nostálgico y evocador, pues hace el 30º de la serie. Resolvemos los problemas propuestos en el artículo anterior y planteamos nuevos ejercicios enmarcados como “Problemas de los abuelos”. Se hace especial hincapié en el proceso resolutivo, sus diferentes pasos y utilizando métodos tales como: ensayo y error; tablas de doble entrada o esquemas y la búsqueda de regularidades, patrones o modelos, actuando de manera que se orientan sus soluciones.

Palabras clave

Resolución de problemas. Método de ensayo y error. Tratamiento de datos en tablas de doble entrada. Patrones y modelos matemáticos en la resolución de problemas. Orientación del alumnado en la resolución de problemas.

Abstract

This article has a nostalgic character and evocative, it makes the 30 th of the series. We solve the problems proposed in a previous article and propose new exercises framed as "Problems of the Grandparents." The emphasis is in the process of solution, the different steps and using methods such as trial and error, crosstabs or finding schemes and regularities, patterns or models, acting their solutions which are oriented.

Keywords

Troubleshooting. Trial and error. Treatment of data in crosstabs. Patterns and mathematical models in problem solving. Guidance of students in problem solving.

1. Introducción

Y sí, lo habíamos indicado en el número anterior, hemos llegado al artículo de *Problemas Comentados* número treinta. Creemos que debemos festejar este acontecimiento. A nuestra manera. Sobre todo agradeciendo a los que nos han permitido llegar hasta aquí, algo inimaginable para nosotros cuando iniciamos la andadura.

En primer lugar, recordar que el año 2000 fue memorable para nuestra Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas. Se realizaron multitud de actividades a cuál más imaginativa y se involucraron en ella una cantidad asombrosa de profesores.

Pasada la resaca, ya en el año 2001, Francisco Aguiar Clavijo, el que fuera Presidente de la Sociedad, nos apuntó la posibilidad de hacernos cargo de una sección fija de la revista NÚMEROS dedicada a la resolución de problemas. Él mismo estableció el contacto con el director de la revista, José Luis Aguiar en ese momento, que aceptó la propuesta con la condición de que no firmáramos los

¹ El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com



artículos de manera personal al ser criterio de la revista no publicar escritos de miembros de la Junta Directiva. Esa es la razón de que los primeros artículos aparezcan firmados como grupo (*Club Matemático*) y sólo más tarde aparecieran nuestros nombres al desvincularnos de cargos de dirección de la Sociedad.

En este tiempo, diez años ya, hemos publicado 30 artículos de *Problemas Comentados* (también algunos más sobre juegos y puzles, pero de eso hablaremos en su momento). Haremos un recuento:

El primer artículo (PC I) se publicó en el nº 47 de la revista, correspondiente a septiembre de 2001. A partir de ahí, cada número de la revista llevó un artículo nuestro, con la excepción de los números 59, 61 y 62, que por necesidad de publicar otros artículos acumulados y la precariedad en el papel, la dirección de la revista decidió posponer los nuestros.

En todos los artículos se proponían problemas para ser resueltos por nuestros lectores, excepto en el número 64 (PC XV) donde decidimos no incluir ninguno nuevo por no saber nuestra continuidad. En ese ejemplar se produjo la transición entre la publicación en formato papel y la publicación en formato digital. También hubo cambio en la dirección de la revista. El nuevo director nos dio su conformidad y seguimos publicando.

Siempre se proponían, de manera habitual, dos, tres o cuatro problemas. Pero no era algo prescrito. El número de problemas variaba según las circunstancias. Los artículos que incluían mayor cantidad de problemas propuestos fueron, respectivamente, los PC IV (número 50 de la revista) con 13 problemas y PC XXIV (número 73 de la revista) con 10 problemas.

En total, y lo decimos con asombro, hemos publicado en estos diez años, en sendos 30 artículos, la cantidad de 140 problemas (incluidos los del presente artículo). Propuestos primero, resueltos y comentados después.

Y vamos a seguir. La actual dirección de la revista así nos lo ha expresado. Hasta que esa misma dirección lo crea conveniente o los lectores de la revista se cansen de nosotros o, bien, nuestras mentes no sean capaces de seguir.

Gracias por soportarnos estos años.

Nuestro anterior artículo presentaba, como es habitual, varios problemas para ser estudiados y resueltos por nuestros lectores. Indicábamos su procedencia del *18º Rally Matemático Transalpino* (Prueba Final, mayo-junio de 2010), fuente habitual de nuestras propuestas de resolución.

2. Los siete enanitos se pesan

Blancanieves ha regalado una balanza a los siete enanitos. Se colocan uno tras otro en la balanza y escriben su peso en una hoja de papel que dan a Blancanieves, sin poner sus nombres: 22 kilos, 14 kilos, 16 kilos, 11 kilos, 17 kilos, 24 kilos, 19 kilos. Entonces, para divertirse, suben de dos en dos en la balanza con excepción de Gruñón que no quiere jugar. Entonces dicen a Blancanieves que:

- Dormilón y Sabio estaban juntos en la balanza
- Tímido y Bonachón estaban juntos en la balanza
- Mudito y Tontín estaban juntos en la balanza y añadieron con sorpresa que la balanza indicaba cada vez el mismo peso.

Blancanieves dice: "No me digas más, ahora sé lo que pesa Gruñón".

¿Cuál es el peso de Gruñón?

Resolución

Se trata de un sencillo problema de Aritmética: sumas sencillas y comparación de resultados.

Fase I. Comprender

Datos: Pesos de cada uno: 22, 14, 16, 11, 17, 24 y 19 kilos para cada uno, sin saber a quién pertenece cada peso

Objetivo: Cuál de esos pesos es el peso de Gruñón

Relación: Cuando se pesan seis de ellos, excepto Gruñón, en tres parejas la pesada (suma de los pesos de ambos) tiene el mismo valor

Fase II. Pensar

Estrategia: Organizar la información.

Fase III. Ejecutar

Debemos encontrar, entre los siete números, tres pares que den la misma suma. Por tanto, debemos sumar en grupos de dos los números dados para encontrar tres sumas iguales. Esta investigación puede ser organizada mediante una tabla de doble entrada:

+	22	14	16	11	17	24	19
22		36	38	33	39	46	41
14			30	25	31	38	33
16				27	33	40	35
11					28	35	30
17						41	36
24							43
19							

Es importante que los alumnos entiendan que sólo hay que rellenar esa parte de la tabla y que eso es debido a la conmutatividad de la suma, que aquí significaría que pesamos dos veces la misma pareja (buscamos combinaciones y no variaciones).

Descubrimos así que 33 se repite tres veces (tres parejas).

$$33 = 11 + 22 = 16 + 17 = 14 + 19$$

El único peso que no aparece en esas tres parejas es 24. Concluimos, por tanto, que éste debe ser el peso de Gruñón.

Fase IV. Responder

Respuesta correcta: **Gruñón pesa 24 kilos.**



El fósil de un número

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz

Consideraciones:

También se puede utilizar el ENSAYO Y ERROR.

A partir de una suma de dos números, ver si puede encontrar lo mismo con dos de los otros cinco números.

Si se usa el ENSAYO Y ERROR DIRIGIDO puede, por ejemplo, ordenar primero los siete números y comenzar a sumar el mayor y el más pequeño. Así, después de excluir $24 + 11$ y $24 + 14$, hallar $22 + 11 = 33$ que da la suma buscada.

En cursos mayores, donde se haya trabajado la divisibilidad, se puede encontrar la solución mediante el siguiente razonamiento:

Sumar todos los pesos: $22 + 14 + 16 + 11 + 17 + 24 + 19 = 123$ kilos.

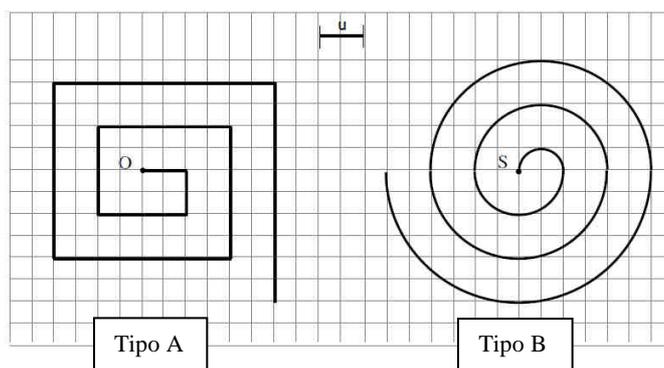
Observar que este número es divisible por 3, aplicando los criterios de divisibilidad.

Si eliminamos el peso de Gruñón la cantidad sobrante debería poder dividirse en tres partes iguales, es decir, debe ser divisible por 3. Concluir que ello significa que el peso de Gruñón debe ser también múltiplo de 3 (propiedades de los múltiplos). Al analizar los pesos existentes observamos que el único de los siete pesos que es divisible por 3 es el número 24.

Por tanto, ése ha de ser el peso de Gruñón.

Espirales

En la siguiente cuadrícula están dibujadas dos espirales de distinto tipo, una obtenida uniendo segmentos, la otra uniendo semicircunferencias:



La espiral de la izquierda (tipo A) está construida a partir del punto O con 10 segmentos y tiene 30 unidades de largo.

La espiral de la derecha (tipo B) está construida a partir del punto S y está formada por 6 semicircunferencias.

¿Cuál es el mínimo número de segmentos necesarios para obtener una espiral del tipo A que sea más larga que una espiral del tipo B construida con 30 semicircunferencias?

Habíamos indicado que este problema podía ser presentado para alumnos del último año de Primaria o bien de los primeros de Secundaria. El problema tiene bastante enjundia y, sobre todo, mucho trabajo.

En Primaria podría ser trabajado mediante cálculo sucesivo, siempre y cuando manejen la operatoria básica y el cálculo de la longitud de la circunferencia, cosa bastante asequible. Pero eso significaría una aburrida sucesión de cálculos. Se podría disminuir el número de semicircunferencias de la espiral B hasta diez en el enunciado. Tampoco mejoraría mucho.

Para que el problema sea interesante es necesario poner en marcha la estrategia de **buscar regularidades o patrones**. Y utilizar **tablas** adecuadas para mejorar matemáticamente esa búsqueda. Así, en este problema se van a manejar conceptos de Aritmética (sumas y aproximaciones), Geometría (circunferencia), Medida (longitud de segmentos y circunferencias) y Álgebra (una cierta idea de función).

La manera de pensar consistirá, pues, en buscar regularidades o patrones en una secuencia de números naturales; suma de los primeros n números naturales, con aproximaciones por defecto y por exceso en los cálculos con π .

Primero debemos asegurarnos de que los alumnos entienden bien las reglas de construcción de las espirales y comprenden, también, que se pueden construir espirales siempre más grandes aumentando, respectivamente, el número de segmentos o el de semicircunferencias.

Para responder a la pregunta del problema, es preciso saber determinar las longitudes de las espirales de ambos tipos y entender que las medidas de estas longitudes dependen del número de segmentos o del número de semicircunferencias utilizadas (o mejor, son “funciones de tales números”).

Comenzaremos con el cálculo de las longitudes de las espirales de tipo A. Haremos los cálculos de sus longitudes sucesivas colocando las parejas **Número de segmentos-Longitud de la espiral** en una tabla como la siguiente:

Nº de segmentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Longitud	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	...

Buscaremos ahora la relación (**patrón**) entre los términos de las dos sucesiones. Esa relación numérica es la que podrá permitir una **generalización** y, por consiguiente, establecer una **ley**.

Lo primero que se observa es que los términos pares funcionan de manera diferente. Si el número de segmentos es impar, esto es $2n+1$, entonces la longitud (respecto a u , la unidad) es $(n+1)^2$ (cuadrado de la mitad del número de segmentos + 0,5), mientras que si el número de segmentos es par, esto es $2n$, la longitud viene dada por $n(n+1)$ (producto de la mitad del número de segmentos por el número siguiente a dicha mitad). Lo vemos de nuevo en la tabla::

Nº de segmentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	$2n$	$2n+1$
Longitud	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	...	$n(n+1)$	$(n+1)^2$

Seguiremos ahora con el cálculo de las longitudes de las espirales de tipo B. Es necesario darse cuenta que los radios de las semicircunferencias que forman la espiral aumentan de manera regular $1/2 u, u, 3/2 u, 2 u, \dots, (n/2) u, \dots$. Deducir que una espiral de tipo B constituida por n semicircunferencias tiene una longitud (LB), expresada en u , dada por:



El fósil de un número

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz

$$LB(n) = \pi/2 + \pi + (3/2)\pi + 2\pi + \dots + (n/2)\pi = \pi/2 (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

Para llegar así a la expresión (**ley o fórmula**):

$$LB(n) = (\pi/2) [n(n+1) / 2] = (\pi/4) [n(n+1)]$$

Utilizando esa fórmula podemos calcular que la espiral de 30 semicircunferencias tiene una longitud que mide, respecto de u :

$$LB(30) = (1 + 2 + 3 + \dots + 30) \pi / 2 = 232,5 \pi$$

Considerando que $3,14 < \pi < 3,15$, se obtiene entonces que $730,05 < LB(30) < 732,375$.

Ahora volvemos a poner en comparación los resultados de los dos tipos de espiral. Se llega a la conclusión que es necesario buscar una espiral de tipo A que tenga una longitud cuya medida sea un número mayor o igual a 733 unidades, para después calcular el número de segmentos que deberá tener.

Con respecto a los impares, el cuadrado más próximo a los valores considerados es

$$27^2 = (n+1)^2 = 729 \quad (\text{mientras que } 29^2 = 841),$$

que corresponde a la espiral de tipo A de $2n+1 = 2 \times 26+1 = 53$ segmentos.

Con respecto a los pares, si consideramos la siguiente espiral de tipo A constituida por 54 segmentos, verificamos que la medida de su longitud viene dada por $27 \times 28 = 756 (> 732,375)$.

De ambos resultados, por comparación de sus valores, concluimos que la espiral de tipo A buscada es la construida con 54 segmentos.

Respuesta correcta: **Se necesitan 54 segmentos.**

Para elaborar la respuesta que presentamos, hemos utilizado la ficha de análisis de los profesores del *Rally Matemático Transalpino*, de cuya edición italiana nº 18 hemos tomado el enunciado del problema.

Y ahora los **problemas de los abuelos**.

El primero que proponíamos está adaptado de *Kraitchk, M.- Mathematical Recreations - Hindu Problems*,

Dos abuelos y sus nietos en la librería

Dos abuelos, Garden y Zerepur, entran en una librería con sus nietos Lucía y Mario y compran libros. Cuando salen se dan cuenta de que cada uno ha pagado por cada uno de sus libros una cantidad de euros igual al número de libros que ha comprado. Cada familia, abuelo y nieto, o nieta, ha pagado 65 €. Garden ha comprado un libro más que Zerepur, y Lucía ha comprado solamente un libro.

¿Quién es el abuelo de Lucía?

Solución

Sea “ x ” el número y el precio de los libros comprados por el abuelo e “ y ” el número y el precio de los libros comprados por el nieto (o la nieta). Así que, en cada caso, $x^2 + y^2 = 65$, ya que cada abuelo que compró x libros, pagó x euros por cada uno, y cada nieto que compró y libros, pagó y euros por cada uno.

Ya que x e y deben ser números naturales, ¿qué posibilidades tenemos? Debemos descomponer 65 en dos cuadrados puesto que $9^2 = 81 > 65$, empezamos considerando $8^2 = 64$:

x	8	7	6	5
x²	64	49	36	25
y²	1	16	29	40
y	1	4	No	No

Y las únicas descomposiciones son 64 y 1 ó 49 y 16, por lo que las posibles soluciones serían:

$$x = 8 \text{ e } y = 1; x = 7 \text{ e } y = 4; x = 1 \text{ e } y = 8 \text{ o } x = 4 \text{ e } y = 7.$$

Como Lucía compró 1 libro, el abuelo compró 8 libros y el mismo hombre que compró 8 libros compró, evidentemente, uno más que quien compró 7. Dado que Garden compró un libro más que Zerepur, entonces debe ser Garden quien compró 8 libros y por tanto es el abuelo de Lucía.

El segundo está adaptado de un problema propuesto por la MAA en su concurso de matemáticas de los ASHME para alumnos de secundaria.

Los abuelos plantean un problema

Al pagar en la librería, le dan a uno de los abuelos cuatro vales con una cantidad de puntos diferentes cada uno, que les servirán para un descuento en las próximas compras que hagan.

Los abuelos quieren sacar provecho de esto y plantean a sus nietos la siguiente cuestión: selecciono tres vales cualesquiera y encuentro su media aritmética, que sumo con el valor del cuarto vale. Haciéndolo obtengo los números 29, 23, 21 y 17. El vale con más puntos será para Mario, el menor de los nietos:

¿Cuántos puntos hay en cada uno de los cuatro vales?

Solución

Sean a , b , c y d los puntos de los cuatro vales; entonces planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(a+b+c)+d = 29 \\ \frac{1}{3}(b+c+d)+a = 23 \\ \frac{1}{3}(c+d+a)+b = 21 \\ \frac{1}{3}(d+a+b)+c = 17 \end{cases}$$

Y resolviendo, tenemos $a = 12$, $b = 9$, $c = 3$ y $d = 21$, y este último será el vale que lleva Mario.



3. Más problemas de abuelos

A modo de justificación.

Este apartado ha ido tomando forma de manera natural. Los años que van pasando nos conducen en nuestra trayectoria vital por las distintas fases de la existencia, e igual que hemos llegado a esta trigésima entrega de los problemas comentados, nos ha llegado la jubilación. El superestadio de agerasia y la buena disposición de la dirección de la revista, nos permite seguir con la sección de los problemas y juegos, adaptándonos a la situación. Ahora podemos disfrutar de nuestro estado de abuelos, nuestra “abuelidad”, además de compartir estas secciones con ustedes.

Los nietos, Lucía, Mario, Pablo y Andrea (ha ido aumentando su número a lo largo de estos años), son protagonistas de estos *Problemas de los abuelos*. Pero no se fíen. Aunque mantienen sus nombres, adaptan sus circunstancias a cada problema. Así, Lucía puede ser la mayor de los nietos en un problema y ser la menor de los cuatro en otro. Con los abuelos ocurre lo mismo: pueden ser octogenarios o rayar escasamente en los cincuenta -¡qué más quisieran!-, adaptándose al problema. Y esto es así por dos razones principales: si tuvieran siempre las mismas características ya sabríamos la solución sin resolver el problema y, segunda, nos veríamos muy limitados al buscar problemas o ejercicios “transponibles” a este apartado.

Mantenemos, eso sí, ciertos intervalos en las edades que hagan creíbles las condiciones de abuelos y nietos e invitamos a algún amigo a participar en el problema de vez en cuando.

Hoy hemos querido regalarles cuatro más de esos problemas. Disculpen este capricho, esta abuelada, pero creemos que está en su razón. ¿O no?

¿Cuándo naciste abuelo?

- Abuelo, ¿en qué año naciste?
- Verás Mario, si restas 899 al año en el que nací, resulta un número que para dividirlo entre 7 sólo debes tachar la cifra de las centenas.
- ¡Ah!, déjame pensar un poco ... ¡Ya lo sé! Naciste en ...

Los cromos del abuelo

- ¡Pablo y Lucía!, vengan un momento que les voy a regalar unas estampas (cromos) de futbolistas, antiguas, que encontré entre mis libros.
- Gracias abuelo –dijo Lucía-. Hay 65, ¿la mitad para cada uno?
- No, como tú eres la mayor, los van a dividir en una proporción de un medio para ti y un tercio para Pablo. Además, no vamos a partir una estampa por la mitad.
- Pero abuelo, un tercio más un medio no suman la unidad -comentó Pablo, que ya sumaba fracciones-.
- He dicho en la proporción ...

La nieta se lía con los múltiplos

- Abuelo, con las edades pasan cosas extrañas –dijo Andrea un día medio en serio medio en broma-. Según Mario se hace mayor, yo me hago más joven.

- Eso es absurdo. ¿Cómo se te ocurre?, dijo el abuelo mientras sonreía.
- Fíjate abuelo –explicó la nieta-. Hace dos años yo triplicaba la edad de Mario, pero dentro de dos años tendré sólo el doble.
¿Qué edad tiene Andrea?

¡Caramelos para las abuelas!

Mientras las abuelas tomaban un café sentadas en el bar del parque, los abuelos fueron con los cuatro nietos a comprar caramelos al quiosco. Como hacían casi siempre, aprovecharon para practicar el cálculo.

- Vamos a repartir los caramelos que hemos comprado por edades. Del total, un tercio será para Lucía, un cuarto para Mario, un quinto para Pablo y un sexto para Andrea. Esto nos deja justo seis caramelos que llevar a las abuelas.
¿Cuántos caramelos había en total?

Y aquí, después de treinta artículos seguimos. ¿Hasta cuándo? Pues, naturalmente, hasta que la dirección de la revista lo considere conveniente y nuestras fuerzas lo permitan. De momento aquí seguimos. Que sea para bien.

Quedamos así hasta la próxima entrega. Pero volvemos a insistir: esto sólo tiene sentido si nuestros lectores, después de leer el artículo, resuelven los problemas, los utilizan con sus alumnos si es posible, aportan a la revista sus comentarios, soluciones y nuevas propuestas o, simplemente, nos cuentan lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Hasta ahora hemos recibido unas cuantas valiosas aportaciones, pero queremos más. Anímense.

Como siempre, aguardamos sus noticias y comentarios a la espera de la próxima edición de la revista:



Un saludo afectuoso del **Club Matemático**.

