Problemas de convergencia en un contexto de software educativo[1]

Rosa María Afonso Gutiérrez

Resumen

Los continuos avances tecnológicos de las últimas décadas permiten un desarrollo diferente del proceso de enseñanza–aprendizaje que resulta útil y ventajoso a la hora de transmitir conceptos matemáticos. Este artículo persigue dos objetivos bien diferenciados. El primero, examinar el estado actual de dicho proceso, de tipo tradicional, en lo que se refiere a los conceptos de convergencia de sucesiones y series funcionales en los primeros cursos de matemáticas en la Universidad, así como sus efectos a corto plazo. El segundo objetivo es presentar, desde una perspectiva global e integradora, una variante curricular para la enseñanza de los mismos, donde el software Maple y la visualización desempeñan un papel fundamental.

Abstract

The continuous technological progress of the past few decades affords a different orientation to the teaching-learning process, which is useful and advantageous when mathematical concepts are transmitted. This article pursues two different aims. The first one is to examine the present state of the traditional process in relation to the concepts of convergence of sequences and functional series in first-year university mathematics courses, as well as the short-term effects of this process. The second one is to present, from a global and integrative perspective, a curricular variant on the teaching of mathematics, in which Maple software and visualization play an essential role.

Introducción

En nuestros días, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se encuentra en una fase de cambio que afecta tanto a los métodos como a los contenidos de dicha disciplina. Esta transformación de nuestro entorno educativo se debe, por un lado, a las reacciones y ajustes naturales que han tenido lugar tras la influencia de la corriente denominada Mate-

---

[1] Este trabajo es un resumen de la Tesis Doctoral defendida por la autora el 28 de marzo de 2003 en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna y dirigida por el Dr. José Ángel Dorta Díaz.

mática Moderna, y en parte también a las oportunidades que ofrecen las actuales herramientas informáticas y de comunicación.

La dicotomía entre Matemáticas y Nuevas Tecnologías ha ido desapareciendo a lo largo de las últimas décadas, de forma que en ciertos campos de la Matemática es imprescindible el uso de herramientas de origen informático. Esta conexión, cada vez más estrecha y natural, debería cubrir los diversos ámbitos de la Educación Matemática en todos los niveles académicos. En este proceso de desarrollo y auge, desempeña un papel importante la amplia disponibilidad de software de gran alcance, que permite a los profesores fijar nuevos principios de base para la enseñanza-aprendizaje de esta materia.

Así, la incorporación del ordenador como recurso pedagógico implica importantes cambios que no se pueden llevar a cabo de una manera sencilla e inmediata. Es necesario un estudio profundo de las posibilidades que la tecnología ofrece y, como consecuencia, una reestructuración del curriculum del área en todas las etapas y niveles educativos.

Desde esta perspectiva, la nueva dinámica que se impone no descarta ningún nivel educativo y, por tanto, tampoco el universitario. La enseñanza de nivel superior conlleva, en ocasiones, importantes dificultades que requieren de la iniciativa y el esfuerzo de los docentes para, de alguna manera, favorecer la comprensión de los conceptos y su tratamiento.

Es evidente que existen diferencias entre las formas de enseñanza del Bachillerato y la Universidad; podríamos decir que no existe un puente natural por el que transiten los alumnos cómodamente desde un ámbito hasta el otro. Fundamentalmente, dicha transición está centrada en los contenidos y la metodología, puesto que se ve como un salto desde una matemática intuitiva y algorítmica hacia una matemática teórica y formal.

Los resultados de la investigación de Praslon (2000) muestran que más que una ruptura global entre ambas instituciones educativas, se trata de una acumulación de micro rupturas y de cambios motivados por el paso del método inductivo al deductivo. Por otro lado, en la Universidad, la diversidad creciente de tareas y técnicas hace que la "rutinización" sea cada vez más difícil.

Así pues, el cambio es inevitable: el desarrollo de la Educación Matemática no puede desaprovechar los continuos avances de la tecnología y la informática para el suyo propio con los cambios curriculares que la comunidad educativa considere necesarios.

En este sentido, la investigación que presentamos en el presente artículo se gesta en el transcurso de varios años de contacto con la docencia universitaria. Observamos que alumnos, incluso licenciados, manifestaban auténticas dificultades para asimilar, manipular y recordar conceptos relacionados con problemas de convergencia en general. Para constatar nuestras observaciones pasamos una encuesta a:

- Alumnos del Curso de Capacitación Pedagógica (curso 97-98)
- Alumnos del Curso de Doctorado "Software Educativo" (curso 98-99)

Además, a principios de 1998, encuestamos a varios profesores del Departamento de Análisis Matemático de esta Universidad. Nuestro principal objetivo consistía en conocer aquellos aspectos pedagógicos que utilizan en su práctica docente para transmitir algunos tópicos del Análisis Matemático como son la completitud de R y el concepto (ε,ν) de límite de una sucesión de números reales.

Los resultados de estas experiencias constituyeron el punto de partida para elaborar la línea de trabajo a seguir y, principalmente, para definir y delimitar nuestro problema de investigación:

> *"Existen conceptos del Análisis Matemático relacionados con procesos de convergencia, cuya comprensión y asimilación presenta a los estudiantes de los primeros cursos universitarios importantes dificultades cognitivas y epistemológicas. Estas dificultades se manifiestan incluso en alumnos que finalizan sus estudios universitarios, constatándose importantes lagunas conceptuales en torno a estos temas, los cuales se desvanecen en su memoria, incluso después de un corto periodo de tiempo".*

Asimismo, la información recogida y disponible nos incitó al planteamiento de algunas cuestiones algo más profundas sobre estos tópicos:

- ¿Cuáles son las principales dificultades asociadas a los conceptos de convergencia en general y a los conceptos de convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales en particular?
- ¿Qué cambios curriculares y metodológicos son importantes introducir para mejorar la enseñanza de estos conceptos y facilitar su comprensión a los estudiantes?
- ¿Qué recursos didácticos debemos utilizar los profesores para mejorar nuestra práctica en el aula?
- El uso de las nuevas herramientas informáticas, ¿puede ayudar a profesores y alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los mismos? ¿De qué forma?

- ¿Podemos aportar técnicas y métodos complementarios que faciliten el "enganche" del alumno y que, por tanto, favorezcan la motivación?
- ¿Podemos de alguna forma acortar el periodo de tiempo necesario para la adquisición de estos conceptos, a la vez que reforzamos los procesos de almacenamiento y reconstrucción del conocimiento a corto y largo plazo?

Con nuestra investigación pretendemos poner de manifiesto que:

> *"La aplicación en la enseñanza de técnicas complementarias de visualización y manipulación y el uso de nuevas tecnologías (Computer Algebra System: Maple, Mathematica, Derive, Mathlab, etc.) facilitan la transmisión, construcción y reconstrucción del conocimiento".*

En la memoria correspondiente a la tesis doctoral "Problemas de convergencia en un contexto de software educativo" se describe con detalle nuestro trabajo, y se estructuró en cinco capítulos:

Capítulo 1: Principios teóricos

Capítulo 2: Objetivos, hipótesis y metodología

Capítulo 3: Estudios preliminares

Capítulo 4: Análisis y discusión de los resultados

Capítulo 5: Conclusiones y perspectivas de futuro

En el primero se describen los principios teóricos en los que hemos basado su desarrollo. Comenzamos haciendo un estudio acerca de los Antecedentes Epistemológicos y Cognitivos relacionados con el concepto de límite e incluyendo una relación de algunos de los proyectos y experiencias que se están llevando a cabo en otras universidades. Posteriormente nos centramos en el marco teórico propiamente dicho, haciendo una revisión de la literatura referente a la Visualización y las Nuevas Tecnologías. Por último, presentamos un esquema en cuatro fases para la presentación de conceptos.

En el segundo capítulo exponemos detalladamente los objetivos de la investigación y presentamos nuestra Propuesta Curricular. A partir del esquema conceptual desarrollamos una forma de instrucción, la cual se apoya en la visualización y el uso del software.

Iniciamos el tercer capítulo analizando los resultados de las encuestas que propusimos a alumnos recién licenciados: alumnos de doctorado y alumnos del Curso de Capacitación Pedagógica. Seguidamente realizamos un análisis de la encuesta propuesta a los profesores universitarios.

Ambas experiencias forman parte de la fase preliminar y constituyen el punto de partida de la investigación.

En el capítulo cuatro presentamos el análisis y discusión de resultados de las experiencias llevadas a cabo según nuestra propuesta. En este caso describimos cuatro trabajos de campo que corresponden a distintos tipos de alumnos:

– Alumnos del Centro Superior de Educación: alumna María

– Alumnos de 1° de Matemáticas sin instrucción en Maple

– Alumnos de 1° de Matemáticas con instrucción en Maple

– Alumnos de doctorado

Finalmente exponemos las conclusiones y las perspectivas de futuro en torno a temas relacionados con la investigación.

Antecedentes epistemológicos y proyectos relacionados con nuestro trabajo

Antecedentes epistemológicos

En relación con la idea de límite, el postulado de continuidad de Dedekind (1858) citado en Moreno y Waldegg (1992) nos asegura que los procesos de medición pueden realizarse con tanta precisión como deseemos. En este sentido si traspasamos un determinado límite de precisión, estamos introduciendo un cambio cualitativo que corresponde al mundo conceptual de los números reales.

En esta idea de mejorar indefinidamente la precisión del proceso de medir, está latente la idea de límite y de ahí la naturaleza epistemológica del concepto.

En cuanto a los antecedentes epistemológicos de la convergencia uniforme, destacamos que fue Fourier (1768-1830) en su *"Theorie Analytique de la Chaleur"* quien proporciona pistas a matemáticos como Cauchy y Seidel para que, poco a poco, surgiera la idea de convergencia uniforme. Así, presenta como solución a la ecuación del calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

la función:

$$\frac{\pi}{4}T = e^{-x}\cos y - \frac{1}{3}e^{-3x}\cos 3y + \frac{1}{5}e^{-5x}\cos 5y - \frac{1}{7}e^{-7x}\cos 7y + ...$$

y afirma que la constante $\pi/4$ admite el desarrollo en serie de cosenos:

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + ...$$

Respecto a esta serie comenta:

> *"la convergencia no es lo suficientemente rápida para procurar una aproximación fácil, pero es suficiente para la verdad de la ecuación"*

Fourier no conocía el concepto de convergencia uniforme tal como hoy lo entendemos; sin embargo es él quien introduce por primera vez el problema de la convergencia al referirse a la lentitud de la serie. Posteriormente a Fourier son varios los matemáticos que intervinieron hasta llegar al concepto actual de la convergencia uniforme:

- En 1821 Cauchy enunció y demostró su conocido principio de continuidad, el cual no se verifica y en el que afirma que las propiedades que se verifican en los procesos finitos pueden extenderse, sin más, a lo infinito.
- En 1826 Abel postula que el teorema de Cauchy tiene excepciones y expresa que el dominio de validez de dicho teorema está restringido a las series de potencias. Por esta razón propone dejar a un lado el estudio de las series trigonométricas de Fourier.
- En 1828 Dirichlet publica varios trabajos sobre las condiciones para la convergencia de las series trigonométricas de Fourier.
- En 1838 Gudermann da una definición del concepto de convergencia uniforme. Ésta sería perfeccionada por Cauchy y Weierstrass en 1853 y 1861, respectivamente.
- En 1841 Weierstrass da su primera definición de convergencia uniforme.
- En 1847 Seidel encuentra el lema oculto o fallo en la demostración que hace Cauchy de su principio de continuidad.

Según Lakatos (1978) este lema oculto fue lo que se llegó a denominar requisito de convergencia uniforme. Al exigir la existencia de un subíndice N que valga para todos los x del intervalo está poniendo las bases para el concepto actual de convergencia uniforme. Por esta razón Hairer y Wanner

(1996) afirman que fue Seidel, en 1848, el descubridor de la convergencia no uniforme al presentar el ejemplo:

$$f_n(x) = x^n$$

Como ya comentamos, en 1853 y 1861, Cauchy y Weierstrass respectivamente, perfeccionaron el concepto de la convergencia uniforme. Así, matemáticos como Carslaw (1930) y Rudin (1967) la definen en estos términos:

Supongamos que la serie

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$$

converge para todos los valores de x en el intervalo a≤x≤b y que esta suma es f(x). Si $s_n(x)$ es la sucesión de sumas parciales, se dice que la serie converge uniformemente en ese intervalo si, para cualquier número positivo ε, habiendo sido elegido tan pequeño como queramos, existe un entero positivo ε tal que, para todos los valores x del intervalo se verifique

$$|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

cuando n≥ν.

Proyectos y experiencias relacionadas con nuestro trabajo

Existen numerosas universidades donde se llevan a cabo proyectos y experiencias para evaluar las ventajas e inconvenientes del uso de la tecnología en el aula de Matemáticas. Entre otros destacamos Farfán y Solís (1987), Soto Johnson (1998) y D'Apice, Manzo y Zappale (2000).

Especial mención merece por la calidad de la experiencia llevada a cabo, el trabajo de Soto Johnson (1998), profesora a la Universidad del Sur de Colorado. En este caso, se aplican tres métodos de enseñanza de cálculo para la comprensión de series infinitas: Proyecto CALC (El cálculo como un curso de laboratorio), Proyecto revisado de Illinois y el método tradicional. Asimismo hace un estudio sobre la actitud de los estudiantes hacia el uso de la tecnología.

Obstáculos cognitivos y epistemológicos asociados al concepto de límite

En este caso destacamos los trabajos de Tall y Vinner (1981), Davis y Vinner (1986), Monaghan (1991), Lauten, Graham y Ferrini-Mundi (1994) y Artigue (1995).

En la etapa en que los alumnos ingresan en la Universidad, tiene lugar el paso del Álgebra al Cálculo o ruptura Álgebra-Cálculo y entran en juego los problemas relativos a las desigualdades y vecindades (aspectos topológicos a los que los alumnos de estos niveles no están habituados).

Así, en este proceso de acceso al Cálculo, Artigue (1995) distingue tres tipos de dificultades:

- Las dificultades asociadas a la naturaleza compleja de los objetos fundamentales del Cálculo.
- Las asociadas a la conceptualización y a la formalización de la idea de límite.
- Aquellas relacionadas con la ruptura del pensamiento algebraico.

En cuanto a la formalización de la idea de límite, Artigue (1995) distingue dos importantes obstáculos:

- El primero está relacionado con el sentido común, el cual asocia la expresión lingüística "límite" con una barrera inalcanzable, como si fuera el último elemento de un proceso.
- El segundo obstáculo conduce a reforzar convicciones erróneas como la creencia en el principio de continuidad.

Por otra parte, Sierpinska (1985) ha clasificado las dificultades en torno al concepto de límite en cinco categorías: Horror Infinitorum (agrupa el rechazo al estatus operacional que permite el paso al límite: Principio de Continuidad), obstáculos asociados a la noción de función, obstáculos geométricos, obstáculos lógicos y obstáculos simbólicos.

La visualización

Existen numerosas investigaciones sobre la visualización y el papel que ésta desempeña en el proceso de enseñanza-aprendizaje: Zimmermann y Cunningham (1991), Guzmán (1996), Hitt (1998), Dorta, Espinel y Plasencia (1998, 2000) y Afonso y Dorta (2000). En particular, para nosotros:

> *"La visualización, en su más profundo significado, constituye un proceso interior que se manifiesta en una acción en la que las personas establecen una relación entre una construcción interna y algo a lo que se accede mediante los sentidos ("algo" puede ser un dibujo, construcción externa, diagrama, gráfica, etc.)".*

Algunos autores aluden al carácter dinámico de los procesos visuales y lo relacionan con las imágenes mentales. Tal es el caso de Zimmermann (1991), Dreyfus (1994) y Guzmán (1996). Este último afirma:

> *"... en la presentación oral de una visualización los elementos van apareciendo poco a poco completando una imagen que empieza siendo simple y termina tal vez extraordinariamente complicada... "*

En esta memoria cuyo objetivo es investigar, desde una perspectiva educacional, las sucesiones numéricas y las sucesiones y series funcionales, los aspectos dinámicos de la visualización adquieren toda su fuerza.

En lo que se refiere a los obstáculos a la visualización destacamos que son muchas las situaciones en las que la visualización puede llevarnos a error. Así lo muestran las investigaciones de Eisenberg y Dreyfus (1991) y Dorta, Espinel y Plasencia (1998)

En concreto, Eisenberg y Dreyfus (1991) han mostrado que *"... la mayoría de los estudiantes se resisten a aceptar los beneficios de la visualización de los conceptos"*. Señalan como principales causas: cognitivas (lo visual es más difícil), sociológicas (lo visual es más difícil de enseñar) y concepciones formalistas de la matemática (lo visual no es matemática).

El ordenador en el aula. El software Maple

El uso del ordenador ofrece ciertas ventajas que favorecen no sólo la adquisición de conceptos, sino también el gusto de los estudiantes por la actividad matemática. Así lo piensan Amillo, Ballesteros y otros (1996), y Hitt(1996, 2000). En particular, Amillo, Ballesteros y otros, señalan que el uso del ordenador:

- Cambia la percepción del estudiante sobre las matemáticas.
- Permite la concentración en la resolución de problemas.
- Invita a experimentar.
- Revitaliza el énfasis geométrico-visual.
- Constituye un medio para coordinar los distintos aspectos de un concepto.
- Proporciona madurez.

En particular, el software Maple viene siendo desarrollado desde 1980 en la Universidad de Waterloo, en Canadá. Es un sistema de cálculo científico potente y rápido, que permite desarrollar el estudio de conceptos en cada uno de los ámbitos simbólico, numérico y gráfico.

Existen numerosos textos donde se utiliza Maple sólo para resolver ejercicios. En esta investigación utilizaremos Maple, fundamentalmente, como vehículo para iniciar a los estudiantes en la construcción de conceptos matemáticos novedosos y para facilitar la comprensión de algunas demostraciones.

Fases de enseñanza: un esquema para introducir conceptos

En la literatura sobre Educación Matemática está extendida la idea de que es importante la génesis y evolución de los conceptos para el proceso de enseñanza, Hitt (1998). En este sentido, cuando tratamos de iniciar a los alumnos en el estudio de nuevos objetos los profesores, conscientes o inconscientemente, seguimos un esquema natural, el cual consta de cuatro fases:

- **Fase verbal:** definición o explicación oral (enunciado).
- **Fase de representación simbólica:** introducción de la simbología que permite formalizar el concepto.
- **Fase de representación visual:** a partir de la gráfica correspondiente el alumno interioriza el concepto y hace de él "algo" propio.
- **Fase de manipulación:** el alumno investiga y explora la realidad matemática para obtener conclusiones.

Por otra parte, la comprensión de un concepto matemático requiere del manejo del mismo a partir de representaciones de distinto tipo, formadas por signos y símbolos, pero con la misma estructura. A estas representaciones Duval (1995) las denomina "representaciones semióticas" y a las representaciones específicas de un concepto y a sus tratamientos internos, **registros de representación.**

> *"La comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación".*

En este sentido, Hitt (1991) afirma:

> *"... las consideraciones visuales son importantes en la resolución de problemas. La visualización matemática en este contexto tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas..."*

Para ello Hitt considera absolutamente necesario utilizar lo que Tall (1986) ha denominado **organizador genérico,** lo cual define en los siguientes términos:

"Un entorno que provee al usuario con las facilidades de manipular ejemplos (y, cuando es posible contraejemplos) de un concepto... La palabra genérico significa que la atención de quien aprende se dirige a algunos aspectos de los ejemplos que encarnan el concepto más abstracto".

El uso del ordenador y en concreto, de un software de las características de Maple puede ser considerado como un organizador genérico de la naturaleza descrita, el cual nos proporcionará las herramientas necesarias para completar e integrar la enseñanza de los conceptos matemáticos y ofrecer así esa visión global.

Entre otros, uno de los objetivos de este trabajo tiene carácter inequívocamente curricular, por tanto, los aspectos pedagógicos de transmisión de ideas matemáticas deben ser tenidos en consideración. Por otra parte, los profesores conscientes de su responsabilidad, aquellos que se involucran en el proceso "formador", saben que en su trabajo cotidiano no pueden limitarse al uso exclusivo del lenguaje matemático donde el formalismo y el rigor conviven, además de las dificultades epistemológicas que muchos conceptos conllevan. Así lo han entendido los profesores universitarios que hemos entrevistado para esta investigación, ya que utilizan en sus respuestas y explicaciones gran número de comparaciones o analogías. Son conscientes de que para dar forma, para forjar, estructurar y consolidar todo conocimiento, y el conocimiento matemático no es ajeno a ello, es indispensable relacionar ideas y en la búsqueda de analogías y en la comparación de conceptos está el camino para que los alumnos lleguen a él. Por tanto, ***las metáforas*** estructuran en buena parte lo que hacemos y cómo lo entendemos y ayudan a establecer estrategias para complementar el aprendizaje de los procesos matemáticos.

Sin salirnos del contexto matemático, Pimm (1990) clasifica las metáforas en dos tipos bien diferenciados: las estructurales, que comparan dos ámbitos matemáticos, y las extramatemáticas, que compara un ámbito matemático con otro que no lo es. Así, gran parte de las metáforas que utilizan los profesores universitarios con los que hemos realizado esta investigación son del segundo tipo.

En la siguiente tabla reflejamos las ideas de Duval, Janvier, Glaserfeld, Pimm y otros. En la última columna figuran las tres primeras fases de enseñanza de nuestro esquema. Así relacionamos cada una de ellas con distintos aspectos de dichas teorías.

DUVAL	JANVIER	GLASERFELD[3]	PIMM Y OTROS	AFONSO DORTA
Registros de representación	Sistema semiótico	La palabra "representar"	Figuras literarias	Fases de enseñanza
Registro verbal	Descripción verbal	Vorstellen	Metáforas Eje metafórico	Fase verbal
Registro simbólico	Fórmula	Bedeuten	Metonimias Eje metonímico	Fase simbólica
Registro gráfico	Gráfico	Darstellen	Metáfora visual	Fase visual

Objetivos de la investigación

- Utilizar las fases de enseñanza y el software Maple, con el objeto de introducir clásicamente los conceptos matemáticos (primera y segunda fases de nuestro esquema), visualizarlos y seguidamente, en la fase manipulativa, a través de ejemplos y contraejemplos, consolidar las ideas.
- Facilitar al estudiante el uso de técnicas de visualización adecuadas para la comprensión de los conceptos y la manipulación de los mismos a través de pequeños programas.
- Fomentar el uso de los distintos registros de representación de un concepto partiendo de casos particulares.
- Ofrecer una visión holística de los distintos aspectos desde los que se puede contemplar un concepto al tiempo que establecen relaciones entre ellos: esquematizaciones visuales.
- Favorecer la motivación del alumnado, eligiendo ejemplos adecuadamente secuenciados y que faciliten su adaptación al entorno de trabajo.

---

[3] Glaserlfeld en su trabajo "Preliminaries to Any Theory of Representation", citado en Janvier(1987) describe al menos cuatro palabras que en el idioma alemán delimitan, sin confusión, el significado de representar; tres de ellas están relacionadas con los aspectos que nos interesan en nuestra investigación: *Vorstellen* que corresponde en castellano a la representación en la que una imagen mental sustituye a algo real o imaginario, *Bedeuten* que se corresponde en nuestro idioma a hacer símbolo de un concepto o una idea y *Darstellen* que se corresponde a la representación como figuración o exposición de un objeto real o de un concepto, siendo siempre el resultado de una actividad humana.

Por otro lado y teniendo en cuenta las dificultades epistemológicas asociadas al concepto de límite, nos proponemos:

- Superar el obstáculo simbólico estableciendo un “paralelismo “ entre la definición formal de los conceptos y las representaciones gráficas obtenidas con el uso del software.
- Superar el obstáculo geométrico y lingüístico derivado de la utilización de expresiones como ”tender, estar muy cerca de, aproximarnos hacia, ...” introduciendo la idea de “aproximación cercana” así como el cálculo y la tabulación de distancias en la fase manipulativa.
- Evitar el obstáculo relacionado con el principio de continuidad a partir de ciertos ejemplos en los que el alumno compruebe que el límite no siempre reproduce las propiedades de los términos de la sucesión.

Propuesta Curricular

Presentamos una propuesta curricular para la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de convergencia de sucesiones numéricas y sucesiones y series funcionales, así como sus teoremas más significativos. Será desarrollada siguiendo las cuatro fases de enseñanza de nuestro esquema para introducir conceptos.

Teniendo en cuenta la literatura consultada y a pesar de las dificultades epistemológicas apuntadas, nos aventuramos en una investigación que abre un camino diferente en el aprendizaje de las ideas de convergencia y temas afines.

Partíamos de la base de que, lejos de sustituir a los métodos tradicionales, la nueva alternativa debía complementar la enseñanza clásica; además basándonos en los procesos propios de la misma donde las fases verbal y simbólica tienen un significado importante, en las fases de representación visual y manipulativa trataremos de "sumar" aspectos de aprendizaje, profundizando en los conceptos a través de ejemplos y contraejemplos para completar la formación. Para ello haremos uso del ordenador y de Maple, software que consideramos como un organizador genérico de la naturaleza descrita por Tall (1986).

Sucesiones numéricas convergentes

Fase verbal: una sucesión converge hacia un determinado valor cuando sus términos se *aproximan progresivamente* a él, es decir, a medida que n crece, los infinitos términos de la sucesión están *cada vez más cerca* de ese número que denotaremos por L y, en consecuencia, la distancia entre éstos y L es cada vez más pequeña.

Fase de representación simbólica:

$$\{a_n\}_{n\in N} \quad converge \quad hacia \quad L \Leftrightarrow$$
$$\left[\forall\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \nu\ (\varepsilon) \in N \quad \wedge \quad \forall\ n \geq \nu \Rightarrow \left|a_n - L\right| < \varepsilon\ \right]$$

Fase de representación visual: gráficamente el alumno comprueba sus cálculos realizados con lápiz y papel; por ejemplo, el valor límite de la sucesión

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} - 3$$

es **-3** y para ε=0.1 se comprueba que ν=11.

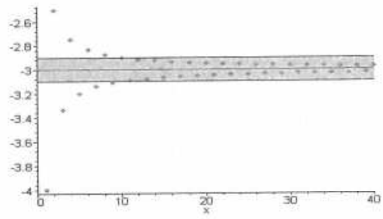


Figura 1

Fase de manipulación: el profesor propone diversos ejemplos para que el alumno investigue y obtenga conclusiones. En particular, dada la sucesión

$$a_n = \frac{12}{5}\frac{n}{n+3}$$

se le invita a que averigüe el índice de penetración ν tomando ε=0.4. En este caso, Maple facilita la tarea y este índice lo puede averiguar de tres maneras:

- Resolviendo la inecuación y despejando n:
  - – Lápiz y papel
  - – Software
- Haciendo un listado de los valores correspondientes y observando "justo el momento" en el que la diferencia, en valor absoluto, es menor que 0.4.

- Visualizando en una gráfica adecuada los resultados.

Finalmente, presentamos al alumno una *esquematización visual* del concepto de límite de una sucesión numérica, entendiendo por tal la acción de disponer de forma más o menos ordenada los distintos registros de representación del concepto a partir de un ejemplo particular.

ESQUEMATIZACIÓN VISUAL

$$a_n = \frac{12}{5}\frac{n}{n+3}$$

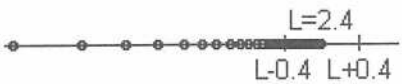


Figura 2

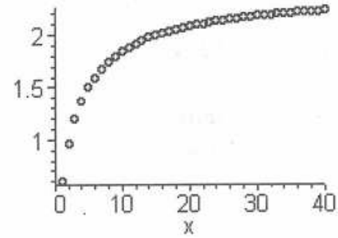


Figura 3

$$\left|\frac{12}{5}\frac{n}{n+3} - 2.4\right| < 0.4 \Rightarrow \nu = 16$$

$$n=13,\ |f(n)-2.4| = 0.4500$$

$$n=14,\ |f(n)-2.4| = 0.4235$$

$$n=15,\ |f(n)-2.4| = 0.4$$

$$\forall n \geq \nu = 16 \Rightarrow \begin{cases} n=16, |f(n)-2.4| = 0.3789 \\ n=17, |f(n)-2.4| = 0.3600 \\ n=18, |f(n)-2.4| = 0.3429 \\ \text{.......... ....} \end{cases}$$

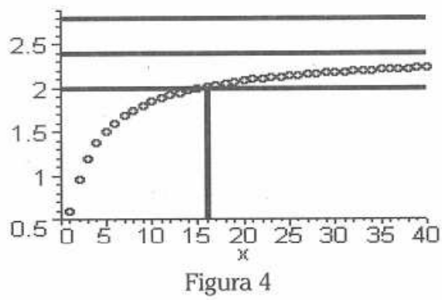


Figura 4

Esta última gráfica puede presentarse en movimiento. Para tal efecto, hemos diseñado programas a partir de los cuales se puede observar el dinamismo implícito que este concepto conlleva.

Sucesiones de Cauchy

Fase verbal: una sucesión de números reales es de Cauchy si, a partir de un cierto subíndice, sus términos se van "pegando" entre sí.

Fase de representación simbólica:

$$\left\{a_n\right\}_{n\in N} \text{ es de Cauchy} \Leftrightarrow$$
$$\left[\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \nu(\varepsilon) \in N \quad \wedge \quad \forall p, q \in N,\, p > q \geq \nu \Rightarrow \left|x_p - x_q\right| < \varepsilon\right]$$

Fase de representación visual: gráficamente el alumno puede comprobar que la sucesión

$$a_n = 20\frac{n}{n+1}$$

es de Cauchy representando dos subsucesiones cualesquiera de la sucesión de partida: a_{2n} y a_{2n+1}. El estudiante comprobaría que los términos correspondientes se van pegando entre sí.

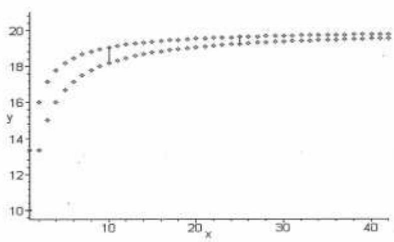


Figura 5

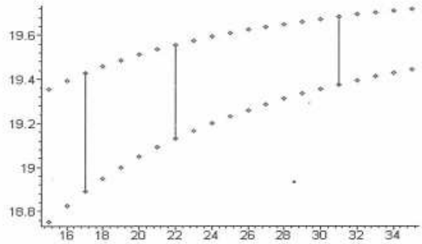


Figura 6

Fase de manipulación: proponemos una sucesión que no verifica la condición de Cauchy:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Tras cálculos a lápiz y papel y mediante Maple podemos comprobar que la sucesión resultante de la diferencia entre dos términos avanzados no tiende a cero, sino a *ln(2)*=0.6931 (figura 7). Por otra parte, al representar las sucesiones x_n y x_{2n} se comprueba que la diferencia entre sus términos es siempre superior a 1/2 (figura 8).

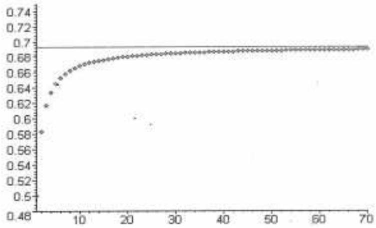


Figura 7

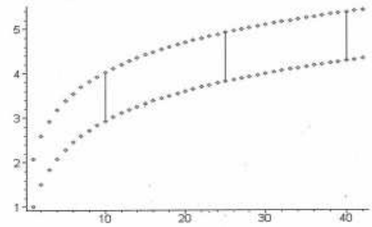


Figura 8

Otros conceptos...

En nuestra propuesta curricular desarrollamos, siguiendo el mismo esquema y haciendo uso de Maple, los conceptos y teoremas que siguen: Sucesiones divergentes, sucesiones monótonas, límites de oscilación, sucesiones acotadas, teorema que postula que *"Toda sucesión convergente está acotada"*, teorema fundamental: *"Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente tiene límite"*, iniciación al concepto de serie numérica y un estudio sobre la irracionalidad de *e*.

Sucesiones de funciones. Sucesiones numéricas asociadas

Fase verbal: se trata de asignar o adjudicar a cada número natural una función real o compleja de variable real definida en un intervalo común I (Φ es el conjunto de todas esas funciones). Además solemos expresar:

> *"Una sucesión de funciones es un proceso infinito:*
>
> $$f_1(x)\ f_2(x)\ f_3(x) \ldots,\ f_n(x) \ldots"$$

Así pues, una sucesión de funciones es en realidad una función de dos variables:

- n que varía en el conjunto de los números naturales
- x que toma valores en el intervalo I, donde cada elemento de la sucesión está definido.

Si fijamos x, $x=x_0$, la sucesión de funciones da lugar a una sucesión numérica que denominamos *sucesión numérica asociada a* x_0.

Fase de representación simbólica:

$$\begin{aligned} f:&\mathrm{N}\rightarrow\Phi \\ &1\rightarrow f_1(x)\in\Phi \\ &2\rightarrow f_2(x)\in\Phi \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &n\rightarrow f_n(x)\in\Phi \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Fase de representación visual: dada la sucesión de funciones introducida por Seidel

$$f_n(x)=\begin{cases} x^n & 0\leq x<1 \\ 1 & 1\leq x\leq 1.5 \end{cases}$$

Representamos conjuntamente los ocho primeros términos de la sucesión de funciones anterior (I = [0,1.5]) así como los correspondientes de las sucesiones numéricas asociadas a 0.6 y 0.8 mediante el *programa* siguiente:

```
>restart:with(plots):f:=(x,n)->x^n:
>d1:=plot({seq(f(x,n),n=1..8)},x=0..1.5,y=0..1,color=blue):
>d2:=plot([[1,1],[1.5,1]],color=blue):
>d3:=plot([[0.6,f(0.6,1)],[0.6,f(0.6,2)],[0.6,f(0.6,3)],
[0.6,f(0.6,4)],[0.6,f(0.6,5)],[0.6,f(0.6,6)],[0.6,f(0.6,7)],
[0.6,f(0.6,8)]],style=point,symbol=circle,color=blue):
>d4:=plot([[0.8,f(0.8,1)],[0.8,f(0.8,2)],[0.8,f(0.8,3)],
[0.8,f(0.8,4)],[0.8,f(0.8,5)],[0.8,f(0.8,6)],[0.8,f(0.8,7)],
[0.8,f(0.8,8)]],style=point,symbol=circle,color=blue):
> display({d1,d2,d3,d4});
```

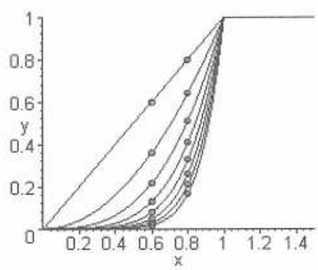


Figura 9

A partir de la gráfica anterior, el alumno establece una conexión visual entre la sucesión funcional y la sucesión numérica asociada a un punto. En este sentido, proporcionamos una visión holística de los conceptos.

Fase de manipulación: el profesor propone otros ejemplos; en particular, dada la sucesión funcional definida en [-3,3]

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

el alumno investiga sobre su forma algebraica y visual, al tiempo que obtiene la representación gráfica de la misma y las sucesiones numéricas asociadas a -0.6 y 0.6.

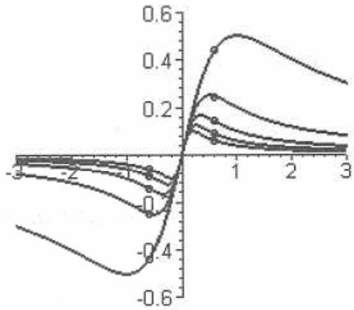


Figura 10

Convergencia puntual de una sucesión de funciones

Fase verbal: una sucesión de funciones *converge puntualmente* a otra función, si en cada punto $x=x_0$ del dominio I, la sucesión numérica asociada a x_0 es convergente. El concepto de "límite puntual" es equiparable al de *"aproximación no al mismo ritmo"*.

Fase de representación simbólica:

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \textit{ converge puntualmente hacia } f(x) \textit{ en } I \textit{ si}$$
$$\textit{para cada } x_0 \in I \textit{ existe } \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \textit{ es decir}$$
$$\left[\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \nu \in N, \nu = \nu(\varepsilon, x_0) \wedge \forall n \in N, n \geq \nu \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon\right]$$

Desde una perspectiva educacional:

- El subíndice ν depende de ε y de x_0
- Este subíndice es el parámetro que controla, desde un punto de vista visual, la "velocidad o ritmo de convergencia" de la sucesión numéri-

ca asociada correspondiente y varía de forma inversa a ε. Lo hemos denominado *índice de penetración puntual.*

- La definición lleva implícito un proceso visual dinámico que podemos clasificar como *"dinamismo puntual"*.

Fase de representación visual: dada la sucesión funcional $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$, pedimos al alumno que visualice algunos términos de la misma.

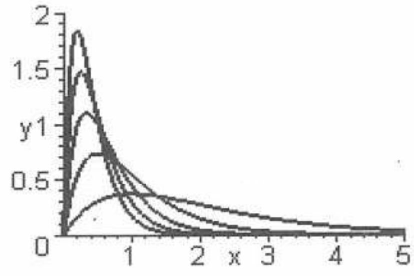


Figura 11

La sucesión funcional converge puntualmente hacia la *función cero* en el intervalo $[0, \infty)$ pero no hay *uniformidad* en esa convergencia. Para comprobarlo, tomamos tres números reales: 0.1, 0.3 y 0.5 y trabajamos con las sucesiones numéricas asociadas a cada uno de ellos; elegimos $\varepsilon=0.3$ (el mismo para las tres sucesiones) y observamos que para la primera el valor del índices de penetración es $\nu_1=76$, para la segunda $\nu_3=20$ y $\nu_5=11$ para el caso de la sucesión numérica asociada a 0.5. Presentamos así una *esquematización visual* del concepto de convergencia puntual a partir de este ejemplo.

ESQUEMATIZACIÓN VISUAL

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

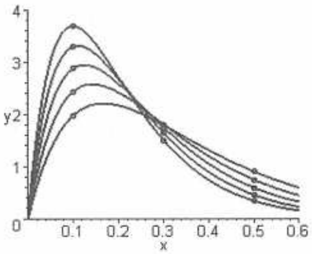


Figura 12

	$f_n\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}n^2e^{\left(-\frac{1}{10}n\right)}$	$f_n\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{3}{10}n^2e^{\left(-\frac{3}{10}n\right)}$	$f_n\left(\frac{5}{10}\right)=\frac{5}{10}n^2e^{\left(-\frac{5}{10}n\right)}$
$n=31$	4.329228350	.02635760594	.00008915155499
$n=32$	4.174049688	.02080626785	.00005761800945
$n=33$	4.016576930	.01639206863	.00003716541038
$n=34$	3.857950007	.01289066652	.00002392884002
$n=35$	3.699179469	.01011964514	.00001537986983

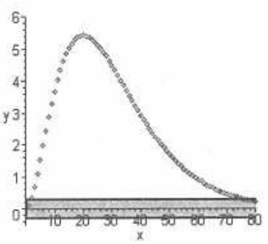


Figura 13

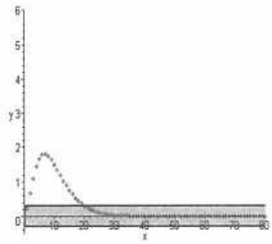


Figura 14

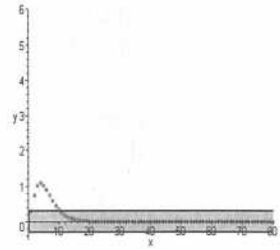


Figura 15

$$|f_n(0.1)-0|<0.3 \qquad |f_n(0.3)-0|<0.3 \qquad |f_n(0.5)-0|<0.3$$

$$\nu_1=76 \qquad \nu_3=20 \qquad \nu_5=11$$

Convergencia uniforme de una sucesión de funciones

Fase verbal: una sucesión de funciones *converge uniformemente* hacia otra función *f(x)* en un cierto intervalo *I*, si el conjunto de todas las sucesiones numéricas asociadas converge a $f(x_0)$ con la misma velocidad, siendo $x_0 \in I$.

El concepto de "convergencia uniforme" equivale al de *"convergencia puntual al mismo ritmo"* o *"acercamiento global"*.

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente hacia* $f(x)$ *en* I *si y sólo si*

$$\left[\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \nu \in N, \nu=\nu(\varepsilon) \wedge \begin{cases}\forall n\in N \\ \forall x\in I\end{cases}, n\geq\nu \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\right]$$

Desde una perspectiva educacional:

- El subíndice ν depende sólo de ε, requisito éste de la convergencia uniforme.
- Decir *"para todo ε por pequeño que sea"* equivale a decir *"para toda banda por estrecha que ésta sea"*.

- Este número positivo ε es un valor que elegimos arbitrariamente y que controla el ancho de la banda.
- El subíndice ν controla, desde un punto de vista intuitivo, la "velocidad" a la que "globalmente" penetran todas las funciones en la banda. Lo hemos denominado *índice de penetración global.*

Fase de representación visual: elegimos una sucesión funcional adecuada:

$$f_n(x) = \frac{\frac{1}{2}n(x-3) + \operatorname{sen}(n(x-3))^3}{n}$$

y el alumno comprueba que converge uniformemente en [-1,7] hacia la función lineal

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

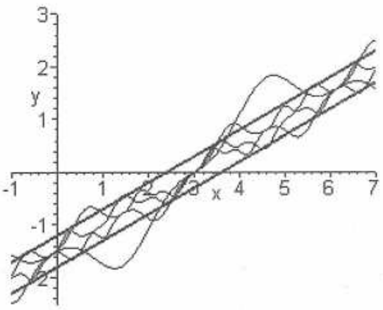


Figura 16

Para ε=0.3 se observa que a partir del término 4º, éste incluido, todas las funciones quedan en el interior de la banda de anchura 2ε.

En nuestra memoria presentamos, igualmente, una *esquematización visual* del concepto de convergencia uniforme a partir del ejemplo

$$f_n(x) = \frac{\frac{1}{2}n(x-3)^2 + sen(3n(x-3))^3}{n} + 4$$

La citada función está definida en I = [4,9] donde se comprueba que a partir de un cierto subíndice, todas las funciones "penetran" en la banda.

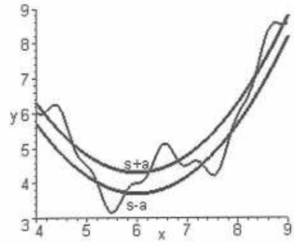


Figura 17

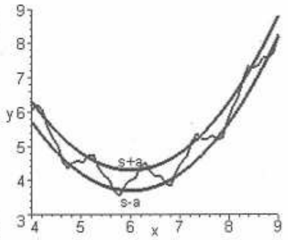


Figura 18

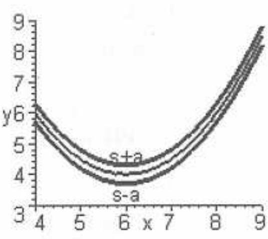


Figura 19

En la fase de manipulación, para cubrir algunas de las múltiples situaciones que de hecho se presentan, el profesor propondrá diversos ejemplos.

Por otro lado, en la propuesta curricular exponemos un estudio, con el uso del software, del teorema de caracterización de la convergencia uniforme para sucesiones funcionales y del teorema de Weierstrass para series funcionales.

Estudios preliminares

Como se ha dicho, nuestra investigación se gestó en el transcurso de varios años de contacto con la docencia universitaria, durante los cuales observamos importantes dificultades por parte de los alumnos, incluso ya licenciados, para asimilar, manipular y recordar diversos conceptos relacionados con problemas de convergencia en general. En esta sección haremos una breve descripción así como un análisis de los resultados obtenidos a partir de dos experiencias previas a esta investigación. La primera de ellas la llevamos a cabo durante los cursos académicos 97-98 y 98-99 con alumnos del Curso de Capacitación Pedagógica (CCP) y de Doctorado, respectivamente. La segunda experiencia la desarrollamos a principios de 1998 con profesores del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna.

Alumnos de CCP (curso 97-98) y de Doctorado (curso 98-99)

En este caso, las aportaciones de los estudiantes encuestados resultaron significativas para nuestro trabajo; se trataba de estudiantes ya profesores que manifiestan cuáles fueron las dificultades fruto de su experiencia. Además, dan una visión amplia y madura de la situación didáctica a la que ellos creen se debe aspirar.

Los items de las encuestas trataron sobre diversos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límite de una sucesión de números reales y de convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales. Las conclusiones, fruto de sus respuestas, son las siguientes:

- La comprensión del concepto de límite, desde el punto de vista simbólico y visual tuvo lugar a largo plazo.
- Los alumnos recordaron sentirse agobiados por la complejidad de los conceptos.
- Demuestran no tener clara la diferencia entre convergencia puntual y uniforme.
- Señalan como necesidad importante en la transmisión de estos conceptos un aporte de diversos ejemplos con contenido visual.
- Demandan cambios pedagógicos y curriculares.

Profesores Universitarios (1998)

Con esta experiencia nos proponíamos:

- Analizar sus modelos conceptuales.
- Profundizar en cómo los profesores reflexionan en torno a estos temas.
- Examinar la metodología que usan para presentar esta materia (herramientas verbales y simbólicas, aspectos algebraicos, algorítmicos y visuales, analogías, comparaciones o metáforas, material complementario, etc.)
- Obtener información sobre los obstáculos epistemológicos de estos conceptos.
- Conocer sus dificultades a la hora de transmitirlos.
- Sondear el estado en que se encuentra la enseñanza-aprendizaje y las perspectivas de futuro sobre aspectos relacionados con la Completitud de R, sucesiones de números reales y operación de "paso al límite".

Las contestaciones de los profesores aportaron ideas de gran interés para nuestra investigación. Destacamos las siguientes:

- Los profesores hacen uso de analogías de distinta naturaleza para que el alumno comprenda y asimile diferentes conceptos matemáticos; por ejemplo, la idea de completitud de R es análoga a *la línea del horizonte, las líneas continuas de la carretera, los cables del tendido eléctrico*, etc. Algunos profesores comparan R con el tiempo, pero éste sigue siendo algo inalcanzable desde el punto de vista material.

- La imagen mental asociada a la no completitud de Q tiene que ver con “algo discontinuo”: *un collar de cuentas sin hilo, una recta con agujeros, etc.*
- En cuanto a la representación gráfica de Q, el profesor C afirma: *“Creo que no es representable gráficamente. Pertenece al mundo de los conceptos o ideas y no al mundo real”.*
- Respecto a la definición (ε,ν) de límite, coinciden al afirmar que este concepto ofrece importantes dificultades a los alumnos de los primeros cursos universitarios.
- Algunos profesores usan comparaciones o analogías para dar énfasis al carácter dinámico que subyace en esta definición; por ejemplo, el profesor E identifica el intervalo o entorno de *“l”* con un pozo en el que caen los infinitos puntos de la sucesión, a partir de un cierto subíndice.

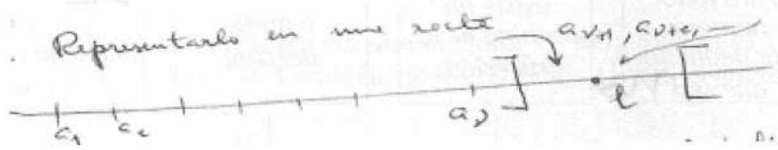


Figura 20

Análisis y discusión de resultados.

Los resultados obtenidos a partir de las experiencias previas y la revisión de la literatura existente y relacionada con el tema que nos ocupa, nos condujo a la elaboración de la propuesta curricular expuesta y desarrollada a partir del esquema en cuatro fases para introducir conceptos nuevos. Nuestro estudio culmina con la puesta en práctica de dicha propuesta. En este apartado exponemos cómo se llevó a cabo la fase experimental y cuáles fueron los resultados de la misma. Obsérvese que no lo haremos siguiendo el orden cronológico, sino el orden de aplicación de la propuesta curricular.

Experiencia con estudiantes del Centro Superior de Educación. Curso 2000-2001

Esta experiencia la desarrollamos con un grupo de alumnos del Centro Superior de Educación, los cuales asistían a “El ordenador en el aula”, una asignatura oficial optativa. En ella se les instruía sobre Maple y su utilidad como herramienta para desarrollar su futura labor profesional.

Uno de los temas tratados fue el correspondiente a sucesiones numéricas y su convergencia. Para ello se utilizó la propuesta curricular presentada.

Concretamente, para introducir el concepto de límite, expresamos con palabras la idea intuitiva y a continuación, se escribió en la pizarra la definición simbólica. A partir de los ejemplos correspondientes y de las gráficas obtenidas mediante el software, toda la simbología era traducida en la pizarra al establecer el siguiente paralelismo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \nu(\varepsilon) \in N \quad \wedge \quad \forall\, n \geq \nu \Rightarrow \left|a_n - L\right| < \varepsilon\right]$$

Para todo número por pequeño que sea	*existe un término de la sucesión*	*a partir del cual*	*la distancia de a_n a L es tan pequeña como queramos*
Para toda banda por estrecha que sea	*vamos a encontrar un término*	*a partir del cual*	*todos penetran en la banda*

Todo ello se llevó a cabo en una sesión de dos horas y durante la misma se fueron introduciendo las instrucciones básicas del software.

Entre los alumnos de la asignatura seleccionamos al azar y con la finalidad de ganar en objetividad, a la que, ficticiamente, hemos llamado "alumna María". Con ella realizamos la investigación de carácter cualitativo en relación con el concepto de límite. El análisis de los resultados obtenidos nos conduce a las siguientes conclusiones:

- Reproduce correctamente la definición formal de límite, conjugando, simultáneamente, la palabra con la simbología.
- Deja clara la relación inversa que existe entre el valor de ε y el del índice de penetración ν:

  "... *Cuanto* > (mayor) *es* ν, < (menor) *es* ε *y nos acercamos al valor del límite. Cuando* $\nu \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ *y nos acercamos al valor de L*"

• Tomando como referencia una tabla de valores y la gráfica siguiente:

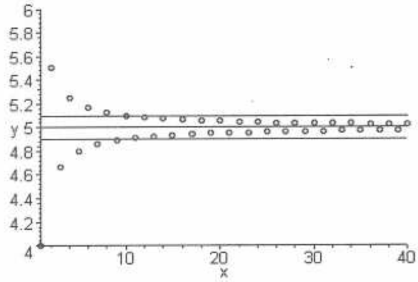
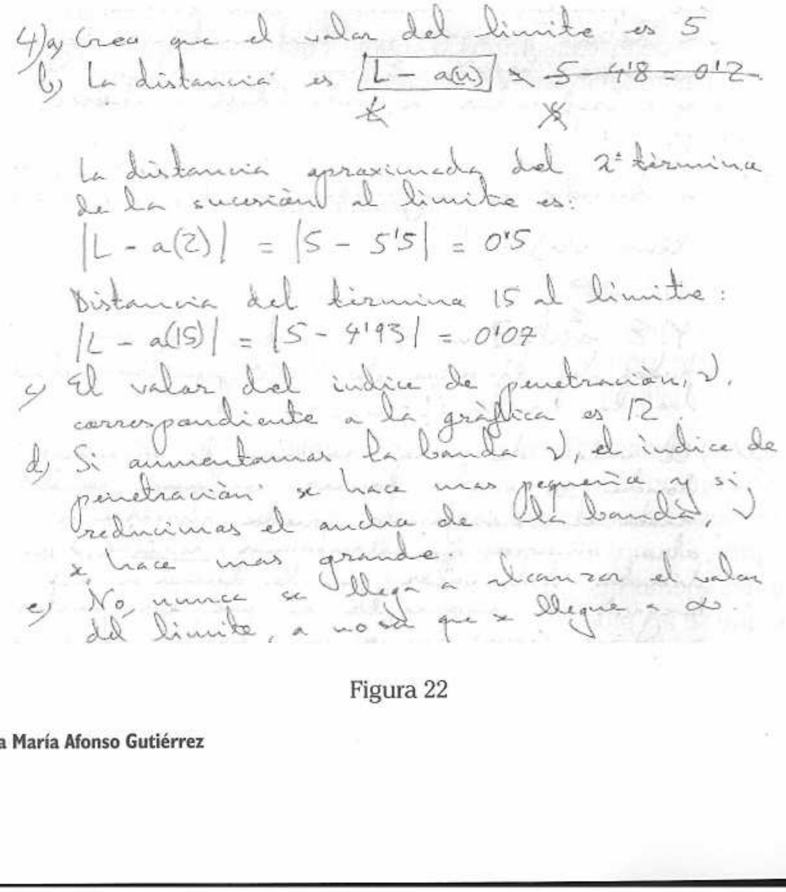


Figura 21

Le planteamos una serie de cuestiones a las que responde con bastante precisión:

- Afirma que el valor del límite es 5.
- Calcula correctamente las distancias del segundo y decimoquinto término al valor límite.
- A la vista de la gráfica decide que el índice de penetración es 12. Si hubiera calculado las distancias de los términos 11 y 12 al límite habría contestado $\upsilon = 11$.

En este caso mostramos sus respuestas textuales:



4) a) Creo que el valor del límite es 5
b) La distancia es $\boxed{L - a(n)}$ ~~5 - 4'8 = 0'2~~

La distancia aproximada del 2º término de la sucesión al límite es:
$|L - a(2)| = |5 - 5'5| = 0'5$
Distancia del término 15 al límite:
$|L - a(15)| = |5 - 4'93| = 0'07$
c) El valor del índice de penetración, ν, correspondiente a la gráfica es 12
d) Si aumentamos la banda ν, el índice de penetración se hace más pequeño y si reducimos el ancho de la banda, ν se hace más grande.
e) No, nunca se llega a alcanzar el valor del límite, a no ser que se llegue a ∞.

Figura 22

Alumnos de 1º de Matemáticas sin instrucción en Maple. Curso 98-99.

Estos alumnos recibieron una instrucción según el método clásico sobre los conceptos relacionados con sucesiones y series funcionales en la asignatura correspondiente.

El análisis de los resultados, tras realizar el examen de la convocatoria de febrero, nos hace pensar que los métodos tradicionales pueden resultar poco atractivos para alumnos que se inician en estos conceptos, cuya comprensión y asimilación requiere "un grado de esfuerzo significativo". La razón de esta argumentación se funda en que, al explorar los exámenes de los alumnos que resuelven satisfactoriamente los ejercicios relacionados con estos conceptos, constatamos que utilizan de forma mecánica los algoritmos trabajados en clase y no presentan un aporte visual que les permita conocer de forma intuitiva la situación que se les plantea.

Todo ello confirma los resultados de las investigaciones de Mason, Selden y Selden, en 1989, quienes aseguran que sus estudiantes de ingeniería, después de llevar a cabo un curso de Cálculo, no pueden, aun siendo buenos estudiantes, resolver problemas no rutinarios en los que se precisa el uso de la visualización matemática con la articulación coherente de varios registros de representación ligados al contexto de los problemas.

Para corroborarlo, cuatro meses después del examen, pasamos una encuesta a seis de estos alumnos, a aquellos que obtuvieron mejores puntuaciones en aquel examen de febrero:

- Afirman que los temas de sucesiones y series funciones les parecían interesantes pero que les costó bastante asimilar los conceptos y contenidos *"debido al grado de abstracción de los mismos"*; en general, *"tenían muchas dudas"*.
- Los seis alumnos piensan que la sucesión $f_n(x)=1/n$ no se puede considerar como una sucesión funcional; en tal caso, afirman que el ejemplo corresponde a *"una sucesión numérica"*. Ninguno intenta visualizarla gráficamente.
- Las respuestas referentes a los conocimientos de convergencia puntual y uniforme no son, en general, satisfactorias. Cuando les pedimos que describan con sus palabras lo fundamental respecto de estos conceptos, algunos alumnos no contestan, otros comentan algunas cuestiones sueltas que no tienen sentido, pero que conectan en "algo" con lo que se les pide.

6:) LA CONVERGENCIA PUNTUAL ME ACUERDO QUE DEPENDÍA DE LA X

EN LA CONVERGENCIA UNIFORME PARA ~~UN~~ ~~n_0~~ A PARTIR DE UN n_0 EN ADELANTE TODAS LAS FUNCIONES ESTÁN MUY PRÓXIMAS.

Figura 23

- En general, tienen claro que no se puede hablar de convergencia uniforme en un punto del dominio de definición, pero no razonan la respuesta. Respecto a la velocidad de convergencia no contestan; aunque piensan que el parámetro que la controla es x.
- El criterio de Weierstrass para series funcionales se admite como un procedimiento que *"nunca falla"* y se aplica sin interpretación visual.
- Consideran que los elementos visuales son insuficientes cuando se instruye a los alumnos con métodos clásicos exclusivamente; así, son conscientes de la necesidad de un cambio en los métodos de trabajo que favorezca el uso de las nuevas tecnologías y del ordenador en particular; alguno de ellos comenta:

  "...el ordenador influye de manera muy positiva, ya que te permite hacer cosas que en la pizarra no puedes ver..."

No obstante admiten y reconocen la dificultad manifiesta de los profesores para llevar a cabo una reforma y señalan como causa principal *"la gran extensión del temario a impartir y la escasez de tiempo para ello".*

- una «sensación» de desconocimiento y dificultad en torno a estos conceptos,
- que pocos alumnos, incluso los de buenos expedientes, los asimilan perfectamente,
- que con el paso de un corto espacio de tiempo se desvanecen en su memoria,
- que los alumnos demandan «un cierto cambio».

Alumnos de 1º de Matemáticas con instrucción en Maple. Curso 99-00.

La experiencia descrita por Soto Johnson (1998) nos incitó a otra similar que nos permitiera evidenciar las diferencias entre dos métodos de enseñanza: el tradicional y el mismo apoyado con el uso de software.

La llevamos a cabo con cuatro alumnos, seleccionados por tener los mejores expedientes en COU. En el mes de marzo, después de haber recibido la enseñanza oficial, y durante tres sesiones de dos horas cada una, desarrollamos la instrucción según nuestra propuesta curricular. Paralelamente debíamos presentar y explicar las instrucciones básicas del software.

Descubrimos que, a pesar de su instrucción clásica, no eran conscientes de que una sucesión funcional es en realidad una función de dos variables: *n y x*. Así nunca se habían planteado qué ocurriría si mantenemos n constante y menos aún si $x=x_0=cte$.

Pensamos que el concepto de *sucesión numérica asociada* resultó clave para que los alumnos captaran la diferencia entre convergencia puntual y uniforme.

En este caso el análisis de los resultados se obtuvo a partir de dos cuestionarios:

Primer cuestionario: Lo pasamos cuatro meses después de la instrucción, a finales de julio. En esta ocasión colaboraron sólo tres alumnos, los cuales debían contestar con lápiz y papel a cuestiones de tipo conceptual.

Los resultados aportaron datos significativos para nuestra investigación, ya que, a pesar de haber recibido dos métodos de enseñanza:

- el tradicional
- el mismo apoyado con el uso de software

en general, fueron similares a los obtenidos por los alumnos de 1º que no recibieron instrucción tecnológica.

Ello nos corroboró los resultados que había obtenido Soto Johnson (1998), de forma que las contestaciones de los alumnos no nos permiten establecer ventajas respecto al método clásico, en lo que a la comprensión de estos conceptos se refiere.

Segundo cuestionario: Tres meses después, a finales de octubre, reunimos de nuevo a los cuatro alumnos. Debían contestar con uso del software, previo repaso de las instrucciones básicas. Constó de dos partes: la primera de ellas de tipo práctico y dirigida y la segunda con cuestiones cortas de tipo conceptual. El siguiente ejemplo constituye una muestra de los ejercicios correspondientes a la primera parte:

Ejercicio 1. Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \cos^n x$$

definida en el intervalo $[0,\pi/2]$. Construye un programa en el que obtengas: la función límite, la gráfica conjunta de las siete primeras funciones de la sucesión y la gráfica de las funciones comprendidas entre los términos 15 y 18. ¿Qué puedes deducir de ellas?

Mediante otro programa, representa gráficamente los cinco primeros términos de la sucesión y las sucesiones numéricas asociadas a $x=0.6$ y $x=1$. Explica en qué punto la velocidad de la convergencia es mayor y compruébalo numéricamente. ¿De qué parámetro depende la velocidad de convergencia?

Con instrucciones adecuadas representa, utilizando una gráfica bidimensional, cada una de las sucesiones numéricas asociadas a los puntos anteriores, así como la banda de semianchura 0.2. En cada caso resuelve la inecuación correspondiente y comprueba que, efectivamente, la velocidad de convergencia hacia 0 es diferente para ambos.

A partir de este ejemplo, ¿podrías explicar en qué consiste la convergencia puntual de una sucesión funcional? ¿Existe convergencia uniforme en el intervalo $[0,\pi/2]$? ¿Por qué? ¿Y en el intervalo $[0.5,\pi/2]$? Para comprobarlo representa algunos términos de la sucesión. En este caso, si dibujas una banda, ¿penetran todas a partir de un cierto ν ?

En general, observamos que los alumnos contestaron satisfactoriamente a las cuestiones planteadas y constatamos que las ideas básicas de la convergencia puntual y uniforme habían sido asimiladas. La siguiente imagen es un claro ejemplo de la soltura con que los alumnos responden a partir de las gráficas y los cálculos realizados por ellos mismos:

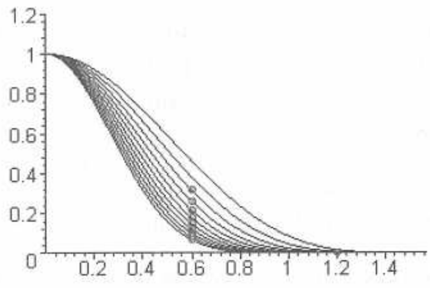


Figura 24

Si observamos la gráfica asociada a los siete primeros términos de la sucesión, y luego la comparamos con la segunda gráfica representada, podemos pensar, (si miramos la segunda), que la convergencia puntual en 0.6 es más rápida que en la primera la asociada a 1.2. Sin embargo, cuando hemos representado conjuntamente las dos sucesiones asociadas a los dos puntos anteriormente mencionados y tomando los términos de la sucesión funcional del cuarto al décimocuarto, podemos apreciar que es en 1.2 donde la convergencia a f(x)=0, (función límite) es mucho más rápida. Por otro lado, no podría haber convergencia uniforme pues en cero siempre vale uno y no podríamos encontrar una banda en la que a partir de un determinado término se metiesen todos en ella.

Figura 25

Alumnos de doctorado. Curso 99-00

Durante algunas sesiones del curso de doctorado *"Metodología de investigación en Educación Matemática y software educativo"* se instruyó a los alumnos en aspectos de convergencia relacionados con esta investigación. Al finalizar el mismo solicitamos que resolvieran diversos ejercicios conectados con los tópicos mencionados y utilizando exclusivamente Maple V.

Comprobamos que los estudiantes fueron capaces de resolver, con pocas instrucciones, de forma rica y variada. El uso del software les permitió trabajar con originalidad, soltura y versatilidad cada uno de los problemas planteados.

Conclusiones de la investigación

En el desarrollo de esta investigación, nuestra filosofía de trabajo queda reflejada en la siguiente declaración de intenciones:

> *"Esforzarnos para conseguir que el conocimiento y asimilación de conceptos difíciles llegue al mayor número posible de estudiantes de Ciencias"*

Desde nuestro punto de vista, la enseñanza tradicional, en general, repite un mismo ciclo: el profesor explica, el estudiante resuelve ejercicios rutinarios, y a continuación extiende esos problemas a otros más profundos. Actuando de la forma señalada:

- ¿El estudiante está suficientemente motivado? ¿Es creativo, imaginativo? ¿Es protagonista de su aprendizaje?
- ¿Utiliza y coordina diversos aspectos de los conceptos?
- ¿Se plantea cuestiones variadas de los conceptos estudiados?

En este sentido, pensamos que el ordenador con la tecnología que hoy nos ofrece puede ser de gran ayuda para ensanchar el horizonte conceptual.

Skemp (1980) propone tres modelos diferentes para construir y comprobar los conceptos matemáticos.

Un modelo de comunicación y discusión, establecido entre el profesor y estudiante, que se correspondería en nuestro esquema conceptual con la fase verbal y simbólica. Un modelo de experiencia y experimentos entre el estudiante y el ordenador que se correspondería con nuestras fases visual y manipulativa; finalmente un tercer modelo de formación y consolidación de ideas de mayor grado de dificultad por extrapolación, imaginación, intuición y creatividad. El software permite complementar estos modelos de la mente humana. En terminología de Skemp *"es un entorno para construir y dar validez a las ideas matemáticas"*. Una forma de construir estos modelos es considerar un número de ejemplos y contraejemplos en un proceso en movimiento para observar regularidades y abstraer generalidades, al tiempo que complementariamente se da validez a esas ideas; es lo que Tall (1986) ha denominado *organizador genérico.*

Por otra parte, pensamos que no sólo es importante el uso del ordenador, sino la interacción simultánea del ordenador, el profesor y las ideas matemáticas, siendo el alumno el núcleo de esta interacción. Para ello Skemp utiliza un hipotético esquema triangular regular, en cuyo baricentro estaría el estudiante y en cada uno de sus vértices A, B y C el profesor, el ordenador y las ideas matemáticas respectivamente.

Triángulo de Skemp

Figura 26

Con la *propuesta curricular* presentada tratamos de interrelacionar los elementos del triángulo de Skemp con nuestro esquema en cuatro fases de enseñanza para así facilitar la formación del estudiante. Desde esta perspectiva, creemos conveniente hacer hincapié en los aspectos más novedosos de la misma:

- Presentación y exposición de conceptos a partir de las cuatro *fases de enseñanza.*
- Uso de distintos *registros de representación* estableciendo conexiones entre ellos y facilitando el paso de unos a otros.
- Utilización de *Maple* como software educativo que permite la visualización y manipulación de los conceptos, mediante la realización de pequeños programas de fácil manejo y a partir de ejemplos y contraejemplos adecuadamente elegidos: organizador genérico.
- Presentación de los distintos registros de representación de un concepto por medio de *esquematizaciones o simplificaciones visuales.*
- Visualización de los conceptos fundamentales de convergencia por medio de *procesos dinámicos* a lo que se accede mediante el uso del software.
- Tratamiento específico de los conceptos de convergencia puntual y uniforme a partir de las *sucesiones numéricas asociadas a un punto* del dominio de definición.

Finalizamos este trabajo señalando las conclusiones más relevantes, fruto de las distintas experiencias llevadas a cabo a partir de nuestra propuesta curricular:

- Nuestros alumnos superaron el obstáculo simbólico al establecer un "paralelismo" entre los elementos de la definición formal y las representaciones gráficas obtenidas (en algunas de ellas se incluye dinamismo), de forma que cualquier cambio en dicha definición se corresponde con un cambio en la gráfica.
- Parecen salvar los obstáculos lingüísticos y geométricos derivados de la utilización de expresiones como *"tender, aproximarnos hacia, estar muy cerca de, etc."* mediante la introducción de la idea de *"aproximación cercana"* y el cálculo y tabulación de distancias.
- El obstáculo relacionado con el principio de continuidad creemos que se ha superado a partir de determinados ejemplos, donde se comprueba que el límite no siempre reproduce las propiedades de los términos de la sucesión.
- El obstáculo que Sierpinska (1985) denomina "horror infinitorum" es una cuestión profunda, epistemológica y representa un obstáculo que muchos enseñantes y estudiantes poseemos.
- Los alumnos se muestran pronto interesados, motivados para el estudio y la reflexión de cuestiones profundas relacionados con los temas

tratados. Sus palabras expresan satisfacción y entusiasmo en cuanto logran adaptarse al entorno de trabajo y son capaces de controlar su propio aprendizaje.

- El uso de técnicas de visualización apropiadas (incluyendo dinamismo) y de *esquematizaciones visuales* permite estructurar la información recibida y manipulada, al tiempo que se refuerzan los procesos de almacenamiento a corto y largo plazo.
- El periodo de tiempo para adquirir los conceptos se acorta, obteniendo resultados satisfactorios y significativos en las pruebas de madurez con uso de software.
- Esta manera de actuar, donde el alumno se siente protagonista del quehacer matemático, no sólo provoca reflexión, sino que además, sus respuestas, expresadas con soltura y fluidez, proporcionan datos importantes y precisos que permiten afirmar que se ha adaptado al entorno de este nuevo marco o modelo de transmitir los conceptos.

Perspectivas de futuro

Aunque existen diversos trabajos en este campo, desde un punto de vista conceptual, el futuro del software como complemento a la enseñanza tradicional tiene mucho camino por recorrer. Será necesario desarrollar nuevos modelos de enseñanza más personalizados, donde el alumno sea el verdadero protagonista y donde la tecnología desempeñe un papel fundamental. En ese futuro inmediato debe definirse la función del profesor, modificarse y establecerse los contenidos que se van a transmitir, la metodología que se va a seguir, los métodos de evaluación que se van a utilizar, los libros de texto a proponer, etc.

El enfoque va a estar centrado en la vertiente gráfica y numérica, para posteriormente obtener conclusiones y generalizar. En este sentido y siguiendo en la línea descrita, sería interesante:

- Un estudio profundo sobre la velocidad de convergencia para sucesiones numéricas y funcionales
- Una investigación sobre cómo introducir conceptos analíticos para funciones de varias variables, usando paquetes análogos al que hemos trabajado.

Además pensamos que puede resultar útil y ventajosa la realización de un estudio acerca de las distintas formas de evaluación, ya que el uso de software en la enseñanza implica no sólo la revisión de los contenidos y la metodología a seguir, sino también de los métodos para valorar el progreso de nuestros alumnos.

Bibliografía

Afonso Gutiérrez, R. M.; Dorta Díaz, J. A. (2000): "Representación visual y aprendizaje en un contexto de software educativo (I)". *Revista Cubo Matemática Educacional*, 2, 39-71.

Amillo; Ballesteros; Guadalupe; Martín (1996): *Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática, MapleV*. McGrawHill. Madrid.

Artigue, M. (1995): "La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos". En Gómez, P. (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 97-140. Grupo Editorial Iberoamérica. Colombia.

Carslaw, H. S. (1930): *Introduction to the Theory of Fourier's series and integrals*. Dover Publications, INC. Cambridge.

D'Apice, C.; Manzo, R; Zappale, E. (2000): "Learning Power Series with Computer Tools". *Electronic Proceedings for the Fourth International Derive TI-89/92 Conference*. Liverpool John Moores University.

Davis, R. B.; Vinner, S. (1986): "The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages". *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Dorta Díaz, J. A.; Espinel Febles, C.; Plasencia Cruz, I. (1998): "Visualización y creatividad". *Revista Educación Matemática*, 10, 2, 102-120.

Dorta Díaz, J. A.; Espinel Febles, C.; Plasencia Cruz, I. (2000): "Kevin, a visualiser pupil". *For the Learning of Mathematics (An International Journal of Mathematics Educations)*, 20, 2, 30-36.

Dreyfus, T. (1994): "Imagery and Reasoning in Mathematics and Mathematics Education". En Robitaille, D.; Wheeler, D. y Kieran, C. (eds.), *ICME 7 Selected Lectures*, 107-122. Les Presses de l'Université Laval. Canad\á.

Duval, R. (1995): *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang. Suisse.

Eisenberg, T.; Dreyfus, T. (1991): "On the reluctance to visualize in mathematics". En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 25-37. MAA Notes 19. USA.

Farfán, R. M.; Solís, M. (1987): *Lecturas de Cálculo para docentes de ingeniería. Problemas de variación.* CINVESTAV. Sección de Matemática Educativa. México.

Fourier, J. (1822): *Théeorie Analytique de la Chaleur*. Éditions Jacques Gabay réimpression de 1988. France.

Guzmán, M. de (1996): *El rincón de la pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis*. Pirámide. Madrid.

Hairer, E.; Wanner, G. (1996): *Analysis by History*. Springer Verlag. New York.

Hitt, F. (1991): *Percepción e imagen mental en relación a sistemas de representación e implicaciones para su uso con la Microcomputadora*. CINVESTAV. Sección de Matemática Educativa. México.

Hitt, F. (1996): "Educación matemática y uso de nuevas tecnologías". En Santos, L. M. y Sánchez, E. (eds.), *Perspectivas en Educación Matemática*, 21-44. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Hitt, F. (1998): "Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum". *Revista Educación Matemática*, 10, 2, 23-45.

Hitt, F. (2000): "Herramientas Tecnológicas y Enseñanza de las Matemáticas". *Actas de XXIII Congreso Nacional de la Sociedad Mexicana*. CINVESTAV. Sección de Matemática Educativa. México.

Janvier, C. (1987): "Representation and Understanding: The notion of Function as an example". En Janvier, C. (ed.), *Problems of Representation in Teaching and Learning of Mathematics*, 67-71. Lawrence Erlbaum Associates. New Jersey.

Lakatos, I. (1978): *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza Universidad. Madrid.

Lauten, A.; Graham, K.; Ferrini-Mundy, J. (1994): "Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator". *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 225-237.

Monagham, J. (1991): "Problems with the language of limits". *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, 20-24.

Moreno, L.; Waldegg, G. (1992): *La Aritmetización del Cálculo*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Pimm, D. (1990): *El lenguaje matemático en el aula*. Ediciones Morata. Madrid.

Praslon, F. (2000): Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement. *Tesis Doctoral*. Universidad de París 7. France.

Rudin, W. (1967): *Principios del Análisis Matemático*. Castillo. Madrid.

Sierpinska, A. (1985): "Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite". *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 6, 1, 5-67.

Skemp, R. (1980): *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Morata. Madrid.

Soto Jhonson, H. (1998): "Impact of Technology on Learning Infinite Series". *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 5, 2, 95-109.

Tall,D. (1986): "Building and testing a cognitive approach to the calculus using computer graphics". *Tesis Doctoral*. University of Warwick. Gran Bretaña.

Tall, D.; Vinner, S. (1981): "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity". *Educacional Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Zimmermann, W. (1991): "Visual Thinking in Calculus". En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 127-138. MAA Notes 19. USA.

Zimmermann, W.; Cunningham, S. (1991): "What is Mathematical Visualization?" En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 1-8. MAA Notes 19. USA.

Rosa María Afonso Gutiérrez. Profesora Numeraria de Bachillerato y Dra. en Matemáticas.