NUMEROS, 14 - 1986

¿PERDIO EL ANALISIS NO-STANDARD EL TREN DE LA HISTORIA? ...Y, SI LO PERDIO, ¿CUANDO?

María Jesús Hernández García
Universidad de La Laguna

Los felices 60, Beattles y hippies floridos, el mayo francés y la guerra del Vietnam. Paralelamente, en España se corría delante de los caballos en la Ciudad Universitaria, se cultivaba la clandestinidad en los Colegios Mayores y se leían ávidamente los libros de Ruedo Ibérico.

Mientras, en Yale, ABRAHAM ROBINSON, que ha quedado por derecho propio como el padre del Análisis no-standard (A.N.S.), hacía un enorme esfuerzo por lograr una puesta a punto del problema de las cantidades "infinitamente grandes" e "infinitamente pequeñas", tan brillantemente trabajado por LEIBNITZ y su contemporáneo, en el más amplio sentido de la palabra, NEWTON. Respecto a éste las opiniones sobre su buen uso de los infinitésimos son más controvertidas. El propio ROBINSON dice : La curiosa ambivalencia y cambiantes explicaciones de Newton y sus seguidores, pueden ser explicadas, al menos en parte, por su aversión a admitir la existencia de tales "entes".

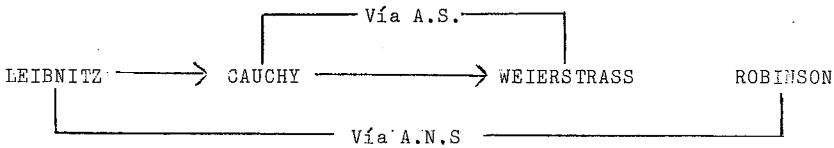
Desde mis primeros contactos, a través de unas conferencias del profesor Rubio de Francia, con los rudimentos del A.N.S., me rondan por la cabeza dos preguntas:

¿Qué ocurrió en los siglos XVIII y XIX para que fuese el R weierstrano, dotado de la topología euclídea, el triunfante y aceptado unánimemente como base para el posterior desarrollo del cálculo diferencial?

¿Qué justifica el retorno histórico a las teorías de LEIBNITZ?

Si es efectivo, tanto a niveles técnicos como heurísticos, de cara al desarrollo de la Ciencia, ¿por qué no se introduce desde un principio el estudio de $^*R$, dotado de la topología asociada a los "entornos infinitésimales" o "mónadas"?

Intentaré una aproximación a estas cuestiones, siguiendo el esquema de flujo temporal adjunto.



Siguiendo la vía A.N.S., procuraré primeramente esquematizar el concepto de demarcación entre ambas; luego intentaré una breve introducción a la obra de ROBINSON. En este viaje consideraré a LEIBNITZ como estación de partida, aunque, si fuese lo suficientemente aventurera, ARQUIMIDES me esperaría en Siracusa.

".....no se tiene necesidad de tomar el infinito con rigor, sino sólamente, como se dice en óptica, que los rayos del sol proceden de un punto infinitamente alejado y así son considerados paralelos"

".....de donde se sigue, que si alguien no admite rectas infinitas e infinitamente pequeñas con rigor metafísico y como casos reales, puede utilizarlas como nociones ideales que simplifican el razonamiento; parecido a lo que se llaman raíces imaginarias en el análisis común.... De la misma forma que se conciben las dimensiones superiores a tres,... todo se hace para establecer ideas adecuadas de razonamientos y fundamentadas en la realidad" (Leibnitz, 1701).

No son estas opiniones nada ajenas a la utilización ímplicita actual de dichos conceptos por los físicos.

La mayoría de los autores culpan a los discípulos de LEIBNITZ de no haber continuado construyendo, fundamentándose en su obra, un cuerpo compacto, fuera de toda sospecha, inatacable desde el exterior y, por supuesto, operativo en cuanto a las aplicaciones.

Creo que, efectivamente, pudo existir algo de dejadez, pero, apoyándome en el detallado estudio realizado conjuntamente por LAKATOS y ROBINSON en torno a CAUCHY, pienso que fue éste quien inclinó la balanza e inició el rodaje de la estructura de R, vía A.S., que, debidamente perfeccionada por BOLZANO y WEIRSTRASS es ahora aceptada y enseñada de forma natural. Fue tal su influencia, que casi logra desbancar y borrar definitivamente la otra vía.

No es este el momento de pararnos a hacer un análisis detallado de CAUCHY; sólo un comentario: la publicación de sus resultados fue tan determinante, que se rumoreaba que hasta FOURIER corrigió subrepticiamente algunos de los suyos para adecuarlos.

Parecía, pues, que todo estaba bajo control. Por qué, entonces, retomó ROBINSON la antorcha ARQUIMIDES-LEIBNITZ?

Desde luego, la idea del continuo de ARQUIMIDES, extendida por LEIBNITZ a un continuo no arquimideano enriquecido por "entes ideales", los infinitamente pequeños o grandes, era tentadora, además de envolver el esqueleto -no dicho en sentido peyorativo, sino descriptivo, claro- de los reales weisrstranos.

ROBINSON era un especialista en Lógica Matemática, concretamente en teoría de modelos, y disponía de las técnicas necesarias para axiomatizar, rigorizar y convertir así aquellos "entes" en "objetos" matemáticamente manejables.

Y no sólo esto. KURT GODEL, que acababa de destruir con su teorema cualquier ilusión relativa a una reconstrucción totalizadora euclídeo-deductiva de la Matemática -a la que RUSSELL había entregado parte de su vida- apoya esta nueva creación. Al respecto dice :

" El A.N.S., frecuentemente, simplifica sustancialmente las demostraciones, no sólo de teoremas elementales, sino también de resultados profundos. Esto es cierto, por ejemplo, en la existencia de subespacios invariantes para operadores compactos y en muchos otros casos de dificultad superior. Esta clase de hechos evita una interpretación equivocada, pero corriente, del A.N.S. : la idea de que es una especie de extravagancia o chifladura de los matemáticos-lógicos. Nada más lejos de la verdad. Todo lo contrario; hay buenas razones para creer que el A.N.S., en una u otra versión, será el Análisis del futuro. Una razón es la anteriormente mencionada, la simplificación de las demostraciones, puesto que la simplificación facilita el descubrimiento ".

El apoyo prestado no quedó en las esferas de la intelectualidad; lo que no es poco, desde luego. La Air Force Office of Scientific Research echó una mano subvencionando el proyecto.

El libro de M. Davis, "Applied nonstandard analysis", editado por J.Wiley en 1977, cuya lectura me tomo la libertad de recomendar, ofrece la ventaja de una exposición clara e intuitiva, de haber depurado la excesiva carga de Lógica del original de ROBINSON. Los tres primeros capítulos y sus ejercicios prácticos hacen más accesible la comprensión de $^*R$ (realesextendidos) y su topología. Veamos las propiedes más importantes ;

Siendo $^*R$ un modelo de orden superior de Análisis, verifica las cuatro condiciones siguientes:

.. Toda noción matemática válida para el sistema de los números reales, también es válida en $^*R$. En particular, la adición, la multiplicación y el orden están definidos en $^*R$.

.. Toda proposición matemática que tiene sentido y es válida para el sistema de los números reales, también tiene sentido y es válida en $^*R$ (Principio de transferencia).

.. El sistema de los "elementos internos" de $^*R$ tiene la siguiente propiedad : Si S es un conjunto interno de relaciones, entonces todos los elementos de S son internos (Principio de concurrencia)

.. $^*R$ contiene estrictamente el sistema de los números reales R , esto es, existe un individuo en $^*R$, que respecto a la relación de orden definida en R y $^*R$, es mayor que todos los de R.

Observación: R^* constituye un cuerpo no arquimedeano ordenado, que contiene estrictamente a R.

LAKATOS considera que ambos tipos de análisis tienen igual potencia : "...todo lo que puede probarse por medio del A.N.S , puede probarse también mediante el A.S. El alcance de las dos teorías es el mis mo. El A.N.S. abre un nuevo canal de desarrollo, aunque sólo dentro del campo antiguo. El teorema de BERSTEIN-ROBINSON también será demostrado algún día por métodos clásicos ".

Para mí, el resurgir del A.N.S. conlleva dos hechos claramente positivos:

. la fructificación de estudios que en una determinada época fueron abandonados por la corriente histórica y

. la integración de la Lógica en el arsenal de conocimientos con que puede contar el matemático; ya no es sólo un preliminar de la teoría de conjuntos o del álgebra, al estilo implantado por la escuela de Bolzano.

Pero, además, estamos convencidos de que si, desde un principio, hubiésemos aprendido a razonar vía A.N.S., no hubiera $^*R$ desplazado a R, convirtiéndose en algo indispensable para el trabajo matemático.

Si el A.N.S. perdió el tren de la historia...el evento sucedió con CAUCHY. ¡ Tampoco SALIERI tuvo la culpa de ser contemporáneo de WOLFGAN AMADEO MOZART !

ARQUIMEDES (287-222)

NEWTON (1642-1727)

LEIBNIZ (1646-1716)

CAUCHY (1789-1857)

WEIERSTRASS (1815-1897)

Sociedad "ISAAC NEWTON"