UNA INTRODUCCION A LAS ECUACIONES

DIFERENCIALES EN EL BACHILLERATO.

José Luis Gallego García

Profesor Agregado de Matemáticas

I.N.B de Alcantarilla (Murcia)

La noción de derivada de una función aparece en el B.U.P en el programa de 2º curso, para ampliar su estudio en el curso siguiente, en el que ya se trata, entre otras cosas, el cálculo de derivadas de funciones tales como la exponencial, logarítmica, trigonométricas, etc.

También se estudia en el B.U.P el problema de "dada una función $F(x)$, encontrar otra función $f(x)$, tal que $f'(x) = F(x)$". Este problema es, en definitiva, el problema de la integración. A la función $f(x)$ se le llama función primitiva de $F(x)$.

Ahora bien, hay que hacer notar que mientras la función derivada de $f(x)$, es decir, $F(x)$, es única, no ocurre así con la función primitiva de $F(x)$, puesto que cualquier función tiene infinitas primitivas, todas ellas diferenciadas en una constante.

Así, si $f: R \longrightarrow R \ / \ f(x) = 2x^3$, entonces

$f' = F: R \longrightarrow R \ / \ f'(x) = F(x) = 6x^2$

Sin embargo, dada $F: R \longrightarrow R \ / \ F(x) = 6x^2$, cualquier función

$g: R \longrightarrow R \ / \ g(x) = 2x^3 + C$, con C real, será primitiva de $F(x)$, ya que $g'(x) = F(x)$. En el caso en que $C = 0$, tendríamos la primitiva $f(x)$.

Por otra parte, mientras que encontrar la derivada de una función resulta relativamente fácil al alumno de Bachillerato, el problema de hallar una primitiva es mucho más escabroso, especialmente para algunas funciones, por lo que, sin lugar a dudas, la integración es mucho más difícil.

Aquí vamos a presentar una serie de problemas en los que el proceso de integración se hace aún más difícil, y que van a dar lugar a las ecuaciones diferenciales. No por su dificultad han de omitirse; muy al contrario, ya que se trata de una materia con un amplio campo de aplicación y que es fundamental para el estudio de gran parte de las ciencias.

Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación en la que aparece una función desconocida, su función derivada y, posiblemente, otras funciones conocidas. Por lo tanto, se tratará de encontrar un conjunto de funciones que la verifiquen (solución general) y, de entre todas ellas, una que verifique unas condiciones - a las que se suele llamar "condiciones iniciales" - (solución particular).

Si el mayor de los órdenes de la derivada de la función desconocida que aparece en la ecuación es dos, tres, ..., la ecuación diferencial es, respectivamente, de orden dos, tres, ...

Nuestro interés se va a centrar primordialmente en estudiar algunos problemas de las ciencias cuyos modelos matemáticos correspondientes son ecuaciones diferenciales, es decir, intentaremos ilustrar cómo aparecen estas ecuaciones, aunque también resolveremos los casos más simples que se nos puedan presentar.

MOVIMIENTO DE CAIDA LIBRE EN EL VACIO.

El movimiento de caída libre en el vacío es un movimiento uniformemente acelerado cuya aceleración, la de gravedad, notaremos con g. La velocidad y el espacio recorrido serán funciones de t, y sabemos, por definición, que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo. Esto es

$$dv/dt = g \quad \text{o, con otra notación,} \quad v' = g$$

Se trata ahora de encontrar la función $v(t)$ que verifique esa ecuación en la que aparece su derivada. Evidentemente es una ecuación diferencial de muy sencilla resolución;del tipo $f'(x) = g(x)$.

Para resolverla,habrá que buscar una función $f(x)$ cuya derivada sea $g(x)$,o sea,una primitiva de $g(x)$. El conjunto de funciones solución será, por tanto,la integral de $g(x)$:

$$f(x) = \int g(x)\, dx$$

Esta será la solución general de la ecuación diferencial. Con las condiciones iniciales que se le imponen a la ecuación,se obtendrá el valor de la constante C de integración,con lo que tendremos la solución particular.

En el caso que nos ocupa, será :

$$v' = g \Longrightarrow v(t) = \int g\, dt = gt + C \text{ (Sol. gral.)}$$

Y,como en el momento de dejar caer el objeto es $t=0, v=0$,éstas serán las condiciones iniciales que nos van a permitir obtener el valor de la constante C y,por tanto,la solución particular del problema :

$$\boxed{v(t) = g\, t}$$

Para calcular ahora el espacio recorrido al cabo de t segundos,tendremos en cuenta que,por definición,la velocidad es la derivada del espacio respecto al tiempo. Así :

$$de/dt = v = gt \text{ ,o bien , } e' = gt$$

Procediendo del mismo modo,resulta :

$$e(t) = \int gt\, dt = 1/2\, gt^2 + C \text{ (Sol. gral.)}$$

Y teniendo en cuenta las condiciones iniciales ($t = e = 0$),podremos obtener la constante de integración y,por consiguiente,la solución particular del problema,esto es,la expresión del espacio recorrido por el objeto en caída libre al cabo de t segundos. :

$$\boxed{e(t) = 1/2\, gt^2}$$

ESTUDIO DEL CRECIMIENTO DE UNA POBLACION.

Vamos a tratar de extraer de él,muy someramente,un modelo matemático que se ajuste,en la medida de lo posible,al problema en cuestión.

Supongamos la función $f(t)$ que va a representar la población de una especie particular y que,obviamente,depende del tiempo. Si tratamos de crecimiento o de razón de cambio nos referimos,evidentemente, a la función derivada.

Pero la diferencia de población entre dos instantes de tiempo determinado no es más que la diferencia entre el número de nacimientos y el de defunciones. Por ello,podemos escribir :

$$\ell'(t) = n^o \text{ de nacimientos} - n^o \text{ de defuncs.}$$

Para construir un modelo matemático sencillo y que no se aleje en demasía de la realidad,vamos a considerar algo que parece razonable : el número de nacimientos y el número de defunciones son,ambos,proporcionales a la población,ya que si ésta se duplica o triplica,parece lógico pensar que también lo haga la cantidad de nacidos y la de muertos. Por lo tanto,

N^o de nacims. en un tiempo $t = k'\ell(t)$

N^o de defuncs. en un " " $= k''\ell(t)$

Así,nos queda :

$\ell'(t) = k'\ell(t) - k''\ell(t) = k\,\ell(t)$,ecuación diferencial que representa al modelo matemático construido a partir del crecimiento de una población y que,según los supuestos realizados,no se ajusta totalmente al problema,pero sí hemos tratado de que se acerque lo más posible.

Para resolver la ecuación diferencial $\ell'(x) = k\,\ell(x)$, con $k\varepsilon R$,utilizaremos el método de "separación de variables",esto es,dejaremos en un miembro la función desconocida y su derivada,y en el otro el resto de las funciones;a continuación,integraremos ambos miembros. Así,obtendremos,como solución general,el conjunto de funciones

$$S = \{\ \ell(x) = C'.\ e^{kx}\ /\ C'\varepsilon\ R\ \}$$

De todas ellas,la que verifique las condiciones iniciales será la solución particular. Calculemos,por ejemplo,la población española que cabría estimar para el año 2000,tomando $k = 0'009$ (tasa de crecimiento) y partiendo de una población inicial de *35 millones*,la de 1980 :

En este caso concreto,la solución general toma el aspecto

$S = \{\ \ell(t) = C'.\ e^{kt}\ /\ C'\varepsilon\ R\}$,donde,para $t=0$ (1980) es $\ell(0) = 35.10^6$. Entonces,

$f(0) = 35.10^6 = C' . e^{k.0} \Longrightarrow C' = 35.10^6$ y,por tanto,la población en el año 2000,esto es,para $t = 20$,será

$$f(20) = 35.10^6 . e^{0,009 \ . \ 20} = 35.10^6 . e^{0,18} \simeq 42,84.10^6$$

La ecuación diferencial resuelta anteriormente es un caso particular de la llamada ecuación lineal de primer orden ($f'(x) = f(x).g(x) + h(x)$), que suele aparecer con bastante frecuencia a la hora de ajustar modelos matemáticos a problemas de Arquitectura,Física,Biología,Economía,etc.

Pasemos a resolver un caso particular,el de la llamada ecuación lineal homogénea,que se presenta cuando $h(x)=0$. Por ejemplo : Dada la ecuación $f'(x) = f(x) \cos x$,encontrar la solución que verifique la condición inicial $f(0)=2$.Utilizaremos también aquí el método de separación de variables :

$$f'(x) = f(x) \cos x \Longrightarrow f'(x) \ / \ f(x) = \cos x \Longrightarrow \int f'(x) \ / f(x) \ dx = $$
$$= \int \cos x \ dx.$$ Luego,

Ln $f(x) = \operatorname{sen} x + C$ y $f(x) = e^{\operatorname{sen} x + C} = C' e^{\operatorname{sen} x}$,es decir,la solución general de la ecuación será el conjunto

$$S = \{ \ f(x) = e^{\operatorname{sen} x} . C', \ C' \varepsilon R \}$$

La solución particular será la que verifique la condición inicial $f(0) = 2$,por lo que

$$f(0) = e^{\operatorname{sen} 0} . C' = 2 \Longrightarrow e^0 . C' = 2 \Longrightarrow C' = 2$$

y,por consiguiente,tendremos,como solución del ejercicio,la función

$$f(x) = 2 \ e^{\operatorname{sen} x}$$

Veamos,finalmente,cómo podría resolverse el caso general de ecuación diferencial de primer orden : $f'(x) = f(x) \ . \ g(x) + h(x)$,con $h(x) \neq 0$.

Aquí,como puede apreciarse,no podemos aplicar directamente el método de separación de variables,ya que si pasamos el término de $f(x)$ al primer miembro nos quedará

$$f'(x) - f(x) \ . \ g(x) = h(x) \ ,$$

y la integral de este primer miembro no nos resulta conocida. Ahora bien, multiplicando por un determinado factor,podemos conseguir que dicho miembro sea precisamente la derivada de un producto de funciones,con lo que la integral se reduciría,precisamente,a ese producto de funciones. Sea el producto $f(x).t(x)$. Su derivada sabemos que viene dada por

$$(f(x) \,.\, t(x))' = f'(x) \,.\, t(x) + f(x) \,.\, t'(x) \,,$$

lo que sugiere multiplicar el primer miembro de la ecuación diferencial por una función $t(x)$. Pero,¿qué función habrá de ser $t(x)$? Veamos :

Comparando $\quad f'(x) \,.\, t(x) - f(x) \,.\, g(x) \,.\, t(x) \quad$ con la expresión anterior,se deduce que tiene que ser

$t'(x) = - g(x) \,.\, t(x)$,ecuación diferencial lineal homogénea que resolveremos así

$$t'(x) \,/\, t(x) = - g(x) \Longrightarrow \int t'(x) \,/\, t(x)\, dx = \int -g(x)\, dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Ln\ t(x) = \int -g(x)\, dx \Longrightarrow t(x) = e^{\int -g(x)\, dx}$$

y,una vez conocida $t(x)$,bastará multiplicar ambos miembros de la ecuación diferencial en cuestión por dicha función y estaremos en condiciones de integrar. Veamos un ejemplo de resolución por este método del "factor de integración" :

Sea la ecuación

$$f'(x) = 4x\, f(x) + 2x\, e^{2x^2}$$

que ha de verificar la condición inicial $f(1) = 3e^2$.

Pasando el término en $f(x)$ al primer miembro y multiplicando ambos por $\quad t(x) = e^{\int -4x\, dx} = e^{-2x^2}$, resulta

$$\left(f(x) \,.\, e^{-2x^2}\right)' = 2x \Longrightarrow \int \left(f(x) \,.\, e^{-2x^2}\right)' dx = \int 2x\, dx \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow f(x) \,.\, e^{-2x^2} = x^2 + C \Longrightarrow f(x) = (x^2 + C) \,.\, e^{2x^2}$,con lo que la solución general de la ecuación es el conjunto

$$S = \{ f(x) = (x^2 + C) \,.\, e^{2x^2} \ ,\ C \in R \ \}.$$

Calculemos ahora el valor de C correspondiente a la solución particular que verifica $f(1) = 3e^2$:

$$f(1) = (1^2 + C) \,.\, e^{2.1^2} = (1 + C) \,.\, e^2 = 3e^2$$

de donde $\quad C = 2\quad$ y,como solución del ejercicio,la función

$$f(x) = (x^2 + 2) \,.\, e^{2x^2}$$

Hemos visto una serie de problemas que se reducen a una ecuación diferencial de primer orden. Ahora bien,hay multitud de problemas en los que las ecuaciones diferenciales que aparecen,al ajustarles modelos matemáticos son,bien de un orden superior;bien de primer orden,pero de re solución mucho más complicada.Es por ello que no incluimos aquí ninguno; creemos que su captación escaparía al alumno de Bachillerato.

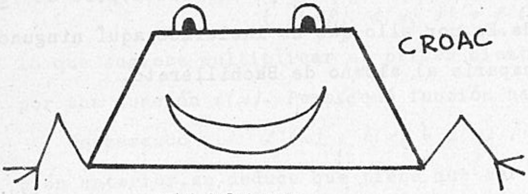
BIBLIOGRAFIA :

T.M APOSTOL . Calculus,vol.1 . Blaisdell,1967.

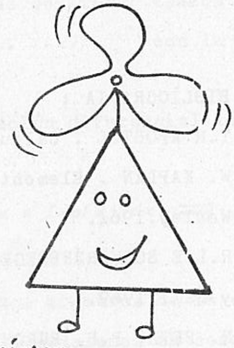
W. KAPLAN . Elements of ordinary differential equations . Addison-Wesley,1964.

R.L.E SCHWARZNBERGER . Elementary differential equations . Chapman y Hall,1969.

H. BETZ, P.B. BURCHAM y G.M EWING . Differential equations with applications . Harper and Row,1964.



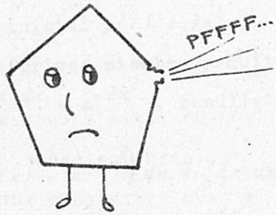
TRAPACIO



TRIÁNGULO ELIQUÓTERO

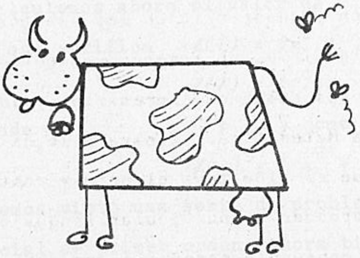
TRIÁNGULO REPTÁNGULO

TRIÁNGULO ESCALETO



PETÁGONO

TETAEDRO



CUADRILÁCTEO

PÁG. 54 →