

Estrategias y Competencias (Problemas Comentados XXXII)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático¹)

Resumen

Damos soluciones a problemas planteados en anteriores artículos y otros que provienen del Torneo para 2º de la ESO que organiza la Sociedad Isaac Newton. Las soluciones aportadas se apoyan en tablas y gráficos, que hacen más fácil para los alumnos de estos niveles, entender los razonamientos. Por ello pensamos que aportan ideas al profesorado de cómo orientar el razonamiento en la búsqueda de soluciones del alumnado. También publicamos las aportaciones realizadas por uno de nuestros lectores: Luis Blanco.

Palabras clave

Soluciones con ayuda de tablas y gráficos. Problemas nivel 2º ESO. Metodología de resolución problemas

Abstract

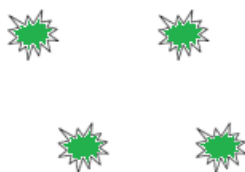
We provide solutions to problems raised in previous articles and others who are from the tournament for 2 ° ESO organized by the Sociedad Isaac Newton. The solutions are supported by tables and graphs, which make it easier for students at these levels, understand the reasoning. Therefore we think that it provides ideas for teachers on how to guide the reasoning in the search for solutions of the students. We also publish the contributions made by one of our readers: Luis Blanco.

Keywords

Solutions of problems using tables and graphs. Problems Level 2 ° ESO. Problem solving methodology.

Bueno. Ya les dimos bastante tiempo. Aquí están las soluciones a los restantes problemas de los diferentes Torneos.

Problema 2. Amarrando triángulos

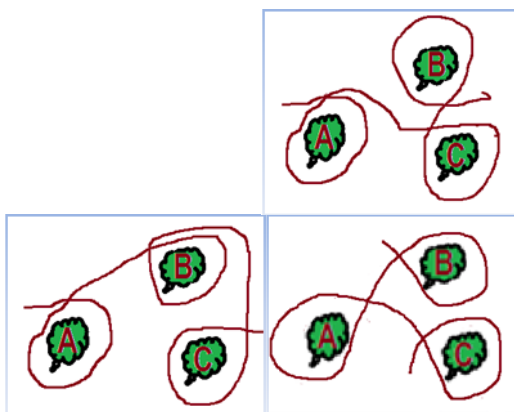


El abuelo Isidro, tiene cuatro árboles sembrados en dos líneas, y se dispone a amarrar una cuerda alrededor de tres de ellos. ¿De cuántas formas puede hacerlo? ¡¡¡A POR ELLO!!!
¿Y si fueran seis árboles? ¿Y si fueran ocho?



¹ El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com





Llamamos A, B, C y D a los cuatro árboles. Partiendo del árbol A, lo podemos unir con otros dos en los siguientes triángulos: ABC, ABD y ACD; y un cuarto triángulo BCD. Así que en total hay cuatro maneras de unir los árboles de tres en tres.

Lo contemplamos, pues, como combinaciones de 4 elementos tomados de 3 en 3. Por ello, para el caso de 6 árboles sería $C_{6,3}$, y para 8, $C_{8,3}$, obteniendo 20 y 56 resultados.

Pero..., si “amarrar una cuerda alrededor de tres de ellos” es alrededor de cada árbol en particular, no sería lo mismo ABC que ACB (figura de la derecha). Y faltaría BCA. Para el trío BCD tenemos otras tres disposiciones: BCD, BDC y CDB; y lo mismo para el trío ACD: ACD, ADC Y CAD. De esta manera el número de resultados posibles se incrementa.

Problema nº 3. Aterrizas como puedas

Miguel de la Peña, es un piloto novato de Canarias Airlines, y se encuentra en un avión a 5 000 metros de altura y, para aterrizar, está descendiendo a razón de 200 metros cada 5 kilómetros, que es justo la trayectoria exacta para aterrizar en el aeropuerto internacional de San Borondón.

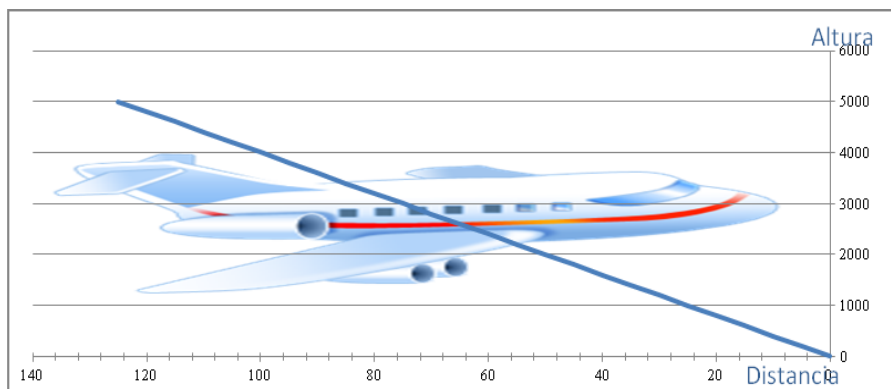


- Dibuja, haciendo una gráfica, el itinerario de bajada hasta llegar al aeropuerto.
- ¿A qué distancia se encuentra el avión del citado aeropuerto?
- ¿A partir de qué distancia del aeropuerto se podrían construir edificios de 30 metros de altura, para que, con un margen superior de 10 metros, el avión de Miguel no choque con ellos?

Este problema parece adolecer de alguna información importante, que debe suponer el alumno. ¿Cuál? Pero lo realmente interesante es analizar cómo proceden nuestros alumnos ante una situación como ésta. ¿Qué piensan ustedes?

Evidentemente, tenemos que conocer a qué altura sobre el nivel del mar está el aeropuerto de San Borondón. Si suponemos este situado a 0 metros, tenemos la siguiente tabla de valores:

Distancia (km)	125	120	115	110	105	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Altura (km)	5	4,8	4,6	4,4	4,2	4	3,8	3,6	3,4	3,2	3	2,8	2,6	2,4	2,2	2	1,8	1,6	1,4	1,2	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0



El avión se encuentra a 125 km del aeropuerto y una altura de 40 metros estaría a una distancia que se puede calcular encontrando primero la ecuación de la recta de la trayectoria seguida por el avión a partir de los datos de la tabla.

Escogemos dos de los puntos de la trayectoria (A y B), siendo x la distancia e y la altura, ambas en km.

A(125, 5) y B(75, 3), con lo que la recta viene dada por la expresión por todos conocida de:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ y con nuestros puntos A y B: } \frac{2}{50} = \frac{y - 3}{x - 75} = \frac{2}{50} = \frac{y - 3}{x - 75}$$

La ecuación de la recta que obtenemos es $y = \frac{x}{25}$ (en km), y para una altura de 40 metros, o lo que es lo mismo 0,04 km, el valor de x es $x = 25 \cdot 0,04 = 1$. Así pues, los edificios deben estar a una distancia de 1 km.

Problema 4. No tengo cambio

En esto, que se encuentran dos profesores de Matemáticas:

-¿Tienes cambio de un euro? – le dijo Déniz a Manolo

- Deja ver, tengo bastante suelto... pues mira no tengo. – Le contesta Manolo.

-¿Cómo va a ser eso?, déjame ver... – dice Déniz – es verdad, no tienes cambio... es más, no se puede tener mayor cantidad de dinero en calderilla, sin tener cambio de un euro.

Si para Déniz, la calderilla son las monedas más pequeñas de un euro (50, 20, 10, 5, 2 y 1 céntimo). ¿Cuánto dinero tenía Manolo? ¡¡¡ADELANTE!!!

Tabulamos de forma ordenada las monedas de cada tipo que no llegan a poder cambiar un euro, y llegamos a que podríamos tener 139 céntimos de €, pero sin poder dar cambio al euro que nos solicitan. Y también podemos comprobar que estaríamos en posesión de hasta 14 monedas.

MONEDAS							
						Total céntimos €	nº monedas
50	20	10	5	2	1		
1	1	1	1	5	4	99	13
1	1	2	1	2	0	99	7
1	0	3	2	3	3	99	12
1	4	0	1	2	0	139	8
1	4	0	1	0	4	139	10
1	4	0	0	0	9	139	14

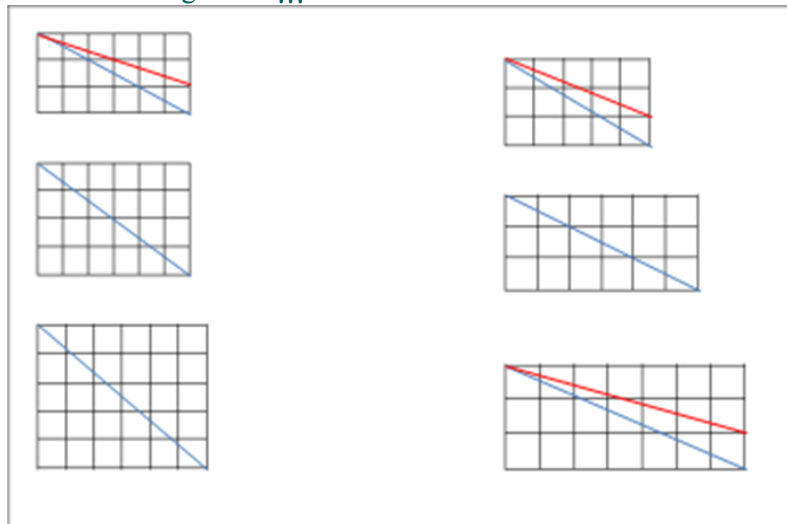
Problema 5. Pintando baldosas

El patio del colegio donde estudia mi amiga Avelina es rectangular, y el piso está cubierto de baldosas cuadradas (todas iguales). Avelina las tiene contadas, el patio mide 120 por 40 baldosas. Lo sabe porque jugando el otro día pintó una línea recta de una esquina a la opuesta, y luego la maestra le



hizo limpiar todas las que había marcado. ¿Cuántas baldosas tuvo que limpiar Avelina por hacer ruindades?

PISTA: Se sabe que para un mismo problema siempre hay varias formas de llegar a la solución, pero si quieres un consejo, primero cuenta las que marcarías en unos ejemplos pequeños antes de aventurarte a buscar la solución del grande. ¡¡¡ÁNIMO!!!

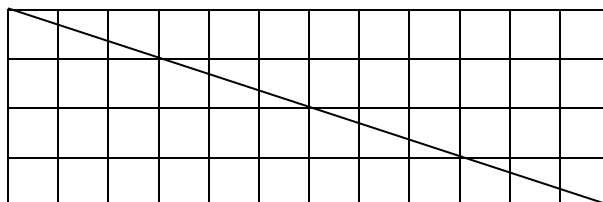


Aprovechando la ilustración del propio enunciado hemos trazado diagonales sobre cada rectángulo y vemos que en unos se marca una baldosa y en otros dos, por columna, dependiendo, aparentemente, de la relación (largo, ancho) del patio. Si estudiamos lo que ocurre para las diferentes relaciones, nos damos cuenta de lo siguiente:

Para una relación $(m, 1)$, con m baldosas de largo y una de ancho, resulta evidente que se marcará una baldosa por columna.

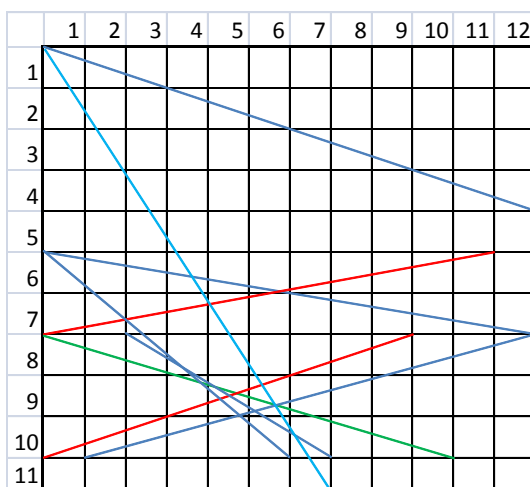
Para una relación $(m, 2)$, ya no es tan evidente. Si m es par, queda marcada una loseta por columna ya que es lo mismo que considerar dos patios de $(m, 2)$ columnas y una fila, pero si m es impar, la columna central tiene dos baldosas implicadas, pues atravesamos la línea que separa las dos filas solo una vez y será por la loseta central.

Cuando son tres filas y m columnas, $(m, 3)$, son dos las líneas horizontales a atravesar, así que como mucho habrá dos columnas en las que se marcan dos losetas. Esto ocurre si n es par, o es impar distinto de un múltiplo de 3. Antes de tabular los datos que vamos obteniendo, y para responder a lo cuestionado en el problema, dibujemos una cuadrícula proporcional a la que nos plantean, de 12 por 4 cuadros:



Vemos que la diagonal, va atravesando una loseta por columna, así que Avelina tendrá que limpiar 120 baldosas.

Pero estudiemos el problema con más generalidad marcando diagonales sobre una cuadrícula más amplia:



Y tabulemos ahora los resultados, tal y como se ve en la tabla de la derecha:

m >	n	m.c.d.	rayados	m+n-mcd
3	2	1	4	4
4	2	2	4	4
4	3	1	6	6
5	2	1	6	6
5	3	1	7	7
5	4	1	8	8
6	2	2	6	6
6	3	3	6	6
6	4	2	8	8
6	5	1	10	10
7	2	1	8	8
7	3	1	9	9
7	4	1	10	10
7	5	1	11	11
7	6	1	12	12
8	2	2	8	8
8	3	1	10	10
8	4	4	8	8
8	5	1	12	12
8	6	2	12	12
8	7	1	14	14
...
120	40	40		120

¿Podemos apreciar alguna ley de formación? ¿Alguna regularidad?

Lo intentamos para $n = 2$, y parece que el resultado podía ser $m + n - 1$, pero falla para $m = 6, m = 8, \dots$

Esto puede llevarnos a pensar que sigue una ley para los pares y otra para los impares con alguna excepción. No parece una buena regularidad. Tampoco vale para $n = 3$ y demás valores de n .

A poco que trabajemos buscando una expresión general, nos daremos cuenta de que cuando m es divisible por n , ocurren unos resultados diferentes a cuando no lo es.

¿Tendrá algo que ver el que tengan divisores comunes?

Ponemos una columna para el M.C.D. y comprobamos que la expresión $m + n - D$, donde D es el M.C.D. coincide con el número de losetas rayadas. Y esa es la solución general.

m >	n	rayados
3	2	4
4	2	4
4	3	6
5	2	6
5	3	7
5	4	8
6	2	6
6	3	6
6	4	8
6	5	10
7	2	8
7	3	9
7	4	10
7	5	11
7	6	12
8	2	8
8	3	10
8	4	8
8	5	12
8	6	12
8	7	14
...
120	40	



Y también, naturalmente, los problemas nuevos del último artículo.

Los LEDs

A la entrada del colegio de Mario y Andrea hay una pantalla como ésta, con trece LEDs (*Light-Emitting Diode*: ‘diodo emisor de luz’) que se encienden para dibujar las cifras desde el 0 hasta el 9 (podemos ver cómo se forma el 4 – Fig. 1).



Figura 1

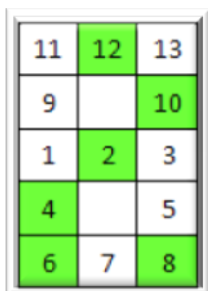
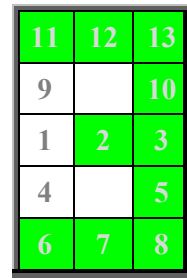


Figura 2

A cada LED corresponde un interruptor con el mismo número del LED. Un alumno, al pasar por los interruptores apaga todos los LEDs. Un segundo alumno pulsa todos los interruptores pares, cuyas luces quedan encendidas (tal como se ve en la figura 2, no se aprecia ninguna cifra). Igualmente, un tercer alumno pasa y pulsa todos los interruptores múltiplos de 3, encendiendo los LEDs apagados y apagando los encendidos. Así continúan pasando hasta un total de 13 alumnos y cada uno pulsa los interruptores múltiplos de su ordinal. Después de que pase el decimotercero, ¿qué cifra es la que dibujan los LEDs encendidos?

En la siguiente tabla podemos ver en qué estado van quedando los interruptores tras el paso de cada alumno. (1: encendido; 0: apagado).

		INTERRUPTORES												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ALUMNOS	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2		1		1		1		1		1		1	
	3			1			0			1			0	
	4				0				0				1	
	5					1					0			
	6						1						0	
	7							1						
	8								1					
	9									0				
	10										1			
	11											1		
	12												1	
	13													1
Final		0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1



Y en la última línea, el estado final del tablero de los LEDs.

Quedan todos encendidos menos el 1, el 4 y el 9 siendo el dígito que dibujan el 3, como podemos ver en la figura de la derecha.

Aportaciones

Nuestro amigo y fiel lector, Luis Ángel Blanco Fernández, asesor del Centro de Profesores del Norte de Tenerife y colaborador del **Proyecto Newton**, nos envía su solución al problema de “Las cifras”. Agradecemos una vez más su colaboración.

Las cifras

Un número de dos cifras multiplicado por el producto de sus cifras da como resultado 336. ¿De qué número se trata?

Cuando leí el problema por primera vez, echando un primer vistazo a la revista, lo pasé por alto. Otro simple problema de álgebra.

Cuando releí el problema, me di cuenta que no era tan evidente resolverlo por álgebra. Al menos yo no tengo conocimientos suficientes de álgebra para poder resolverlo.

Mi primer intento para resolverlo por álgebra fue como sigue:

Un número de dos cifras desconocidas x e y

El número como expresión algebraica $10x + y$

El producto de las cifras del número xy

La ecuación que relaciona los elementos. $(10x + y)(xy) = 336$

TIENE MALA PINTA, UNA SOLA ECUACIÓN PARA DOS INCÓGNITAS...Y SE PONE PEOR CUANDO DESARROLLO LA ECUACIÓN.

$$10x^2y + xy^2 = 336$$

Muy complicado para mis conocimientos matemáticos.

SEGUNDA VÍA DE RESOLUCIÓN, SIN CONOCIMIENTOS DE ÁLGEBRA:

Como 336 es el resultado de un producto, puedo tantear por ensayo-error u organizando la información de los diferentes factores que dan como resultado 336. Prefiero optar por organizar la información.

Para ello comienzo descomponiendo el número en factores primos y así poder obtener todos los divisores de 336

Los divisores que obtengo son:

Divisores de 336: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16, 21, 24, 28, 42, 48, 56, 84, 112, 168, 336

Al menos uno de esos números deberá ser el producto de las dos cifras, (xy) y otro deberá ser el número de dos cifras que se busca.

Ahora se trata de ir dividiendo 336 por cada uno de los divisores. Los cocientes que obtenga serán el otro factor del producto del que se obtiene un resultado de 336. Como el cociente debe tener dos cifras descartamos ya como divisores el 1, 2, 3, y también descartamos la mitad superior de la serie de divisores ya que por conmutatividad de la multiplicación obtendríamos el mismo resultado



Comenzamos con el 4. Para abreviar he realizado los cálculos con una hoja de cálculo, donde la primera columna es el dividendo, la segunda columna el divisor y la tercera columna el cociente.

Dividendo	Divisor	Cociente
336	4	84
336	6	56
336	7	48
336	8	42
336	12	28
336	14	24
336	16	21

Como último paso se trata de comprobar en la columna de cocientes, si el producto de los dígitos coincide con el divisor y así obtendríamos el resultado. El único resultado que cumple esa condición es el número 42.

Solución: El número de dos cifras que multiplicado por el producto de sus cifras da como resultado 336 es el número 42

Resuelto el problema, me he dado cuenta que por observación de los divisores hubiera dado fácilmente con la solución sin necesidad de hacer tablas.

Nuestro comentario:

Solución.

Se descompone 336 en factores y se examina los posibles productos.

$2^4 \cdot 3 \cdot 7$, siendo los productos posibles: $2 \cdot 168$, $4 \cdot 84$, $8 \cdot 42$, $16 \cdot 21$, $48 \cdot 7 \dots$

336		2
186		2
84		2
45		2
21		3
7		7

De su análisis se deduce que el producto sería $8 \cdot 42$, pues en los otros casos el producto de las cifras por el número no cumple las condiciones del problema:

Addenda:

Se puede simplificar a, por ejemplo:

El producto de un número de dos cifras por sus cifras es 24. ¿De qué número se trata?

O complicar:

La suma de un número de tres cifras con sus cifras es 505, ¿de qué número o números se trata? Y si la suma fuese 501, ¿cuántas soluciones hay y cuáles son?

Si tabulamos las sumas de los números cercanos a 505, podemos obtener sugerentes conclusiones:

4 7 0	481	4 8 0	492	4 9 0	503	5 0 0	505	5 1 0	516	5 2 0	527
4 7 1	483	4 8 1	494	4 9 1	505	5 0 1	507	5 1 1	518	5 2 1	529
4 7 2	485	4 8 2	496	4 9 2	507	5 0 2	509	5 1 2	520	5 2 2	531
4 7 3	487	4 8 3	498	4 9 3	509	5 0 3	511	5 1 3	522	5 2 3	533
4 7 4	489	4 8 4	500	4 9 4	511	5 0 4	513	5 1 4	524	5 2 4	535
4 7 5	491	4 8 5	502	4 9 5	513	5 0 5	515	5 1 5	526	5 2 5	537
4 7 6	493	4 8 6	504	4 9 6	515	5 0 6	517	5 1 6	528	5 2 6	539
4 7 7	495	4 8 7	506	4 9 7	517	5 0 7	519	5 1 7	530	5 2 7	541
4 7 8	497	4 8 8	508	4 9 8	519	5 0 8	521	5 1 8	532	5 2 8	543
4 7 9	499	4 8 9	510	4 9 9	521	5 0 9	523	5 1 9	534	5 2 9	545

Tiro al blanco



En el Gran Concurso de Tiro de Torres Nuevas, cada concursante disparaba cinco veces. Acertar en el centro daba derecho a 20 puntos, mientras que las restantes zonas del blanco valían 15, 10, 5, 2 y 1.

Las cuatro mejor clasificadas quedaron empatadas con 61 puntos. Por casualidad, sabemos que:

El último tiro de Marcia valió 15 puntos.

Cuatro de los cinco tiros de Inés acertaron en la misma zona del blanco.

Ninguna de ellas falló un tiro, excepto Sofía que falló el blanco en el primer disparo.

El primero y el último tiro de Carolina fueron en el centro.

Por suerte, fue posible ordenar las cuatro tiradoras aplicando una norma del reglamento que decía: «En caso de empate, tiene ventaja quien acertara más veces en el centro.»

¿A quién fueron atribuidas las medallas de oro, plata y bronce?

RESOLUCIÓN:

COMPRENDER

Datos 4 tiradoras: Marcia, Inés, Sofía, Carolina
 5 disparos cada una
 Los aciertos en cada zona valen 20, 15, 10, 5, 2 y 1 punto
 Cada una obtiene 61 puntos

Objetivo Quién ganó la medalla de oro, la de plata y la de bronce

Relación Las 5 informaciones que nos da el problema sobre los aciertos de cada tiradora

Diagrama Una tabla de doble entrada

PENSAR

Estrategia
 Organizar la información



EJECUTAR

Construir una tabla que recoja toda la información disponible y la organice.

	20	15	10	5	2	1	0	Total	Puesto
Marcia								61	
Inés								61	
Sofía								61	
Carolina								61	

Procedemos en este orden:

1º) Como el total de puntos es de 61 para las cuatro mejores concursantes, las cuatro tuvieron un tiro con sólo 1 punto.

	20	15	10	5	2	1	0	Total	Puesto
Marcia						1		61	
Inés						1		61	
Sofía						1		61	
Carolina						1		61	

2º) Habiendo Sofía fallado un tiro, los otros cuatro son 20, 20, 20 y 1.

	20	15	10	5	2	1	0	Total	Puesto
Marcia						1		61	
Inés						1		61	
Sofía						1	1	61	
Carolina						1		61	

3º) Inés, con cuatro aciertos iguales, tendrá que tener una puntuación de 15, 15, 15, 15 y 1.

	20	15	10	5	2	1	0	Total	Puesto
Marcia						1		61	
Inés		4				1		61	
Sofía	3					1	1	61	
Carolina						1		61	

4º) Carolina, con dos aciertos de 20 puntos cada uno, tendrá una puntuación de 20, 15, 5, 1 y 20, o de 20, 10, 10, 1 y 20.

	20	15	10	5	2	1	0	Total	Puesto
Marcia						1		61	
Inés		4				1		61	
Sofía	3					1	1	61	
Carolina	2	1	2	1		1		61	

5º) Marcia, que ha tenido 15 puntos en su último tiro, tendrá una puntuación de 20, 15, 10, 1 y 15. Nótese que el valor de 61 se podría obtener también con $20 + 20 + 5 + 1 + 15$. Pero, en términos del reglamento, eso implicaría dos segundos premios.

	20	15	10	5	2	1	0	Total	Puesto
Marcia	1 2	1 1	1	1 1		1		61	
Inés		4				1		61	
Sofía	3					1 1		61	
Carolina	2	1	2	1	1			61	

Así, Sofía tuvo tres 20 y ganó la medalla de oro; Carolina, con dos 20, recibió la medalla de plata; Marcia, con un 20, tiene la medalla de bronce; Inés, sin ningún 20, quedó en cuarto lugar.

	20	15	10	5	2	1	0	Total	Puesto
Marcia	1	1 + 1	1			1		61	Bronce
Inés		4				1		61	4ª
Sofía	3					1 1		61	Oro
Carolina	2	1	2	1	1			61	Plata

Solución: **Sofía ganó la medalla de oro; Carolina recibió la medalla de plata; Marcia la medalla de bronce; Inés quedó en cuarto lugar.**

RESPONDER

Comprobación: Ver que esta clasificación satisface todas las indicaciones de la relación.

Análisis: Aunque en un determinado momento parecía que podría haber más de una solución, las propias condiciones del problema (reglamento de competición) permitieron deducir que habría una sola.

Respuesta: Sofía ganó la medalla de oro; Carolina recibió la medalla de plata; Marcia la medalla de bronce; Inés quedó en cuarto lugar.

Y algunos problemas nuevos, alguno de la serie *Problemas de los abuelos*.

Problema 1. El aperitivo de los abuelos

Los tres abuelos toman el aperitivo son sus tres nietos mayores y uno de ellos pregunta:

-¿Quién de ustedes es el mayor y qué edades tienen?

Los abuelos responden dando cada uno una pista sobre ello.

- Nuestras edades son distintas y están entre 60 y 80 años y la suma de las edades de los dos más viejos es un número cuadrado.

- La suma del más viejo y del más joven es el primer número capicúa menor que el cuadrado que dice la abuela.

- La suma de los dos más jóvenes es el segundo primo menor que el capicúa que dices tú.

Dígnanos ahora la suma de los dígitos del producto de nuestras edades. Aquí tienen una calculadora.

Problema 2. Series de números

Encuentra n números naturales diferentes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, tales que la suma de los números sea igual al producto del primero y el último: $a_1 \cdot a_n$. Generaliza las soluciones.



Nuestro incansable amigo Luis Ángel Blanco Fernández nos envía también este interesante problema.

Problema 3. Números cómplices



El reverso de un número es el número que se obtiene escribiendo el número de derecha a izquierda. Por ejemplo, el reverso de 35 es 53 y el de 235 es 532.

*Dos números enteros son **cómlices** si se cumplen tres condiciones:*

1.- Los números se escriben con la misma cantidad de cifras

2.- Los números no son reversos de sí mismos (por ejemplo, 11 no

sirve) y los números no son reversos entre ellos (por ejemplo 87 y 78 no sirven)

3.- El producto de los dos números es igual al producto de sus reversos.

Por ejemplo:

Los números 42 y 12 son cómplices, puesto que tienen 2 cifras cada uno, no son reversos de sí mismos ni entre ellos y el producto de los números es igual al producto de sus reversos $42 \times 12 = 24 \times 21 = 504$.

*¿Puedes encontrar más **números cómplices de dos cifras**?*

Y así pararemos, por hoy. Ya veremos en el próximo artículo.

Pero seguimos insistiendo: hagan como Luis Blanco, resuelvan los problemas, utilicenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntenos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Vamos, ánimoense...

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista



Un saludo afectuoso del **Club Matemático**.