

Abordaje de los significados de las ecuaciones: un taller para el diseño de secuencias didácticas

**Sandra Graciela Baccelli, María Andrea Aznar, María Laura Distéfano,
Stella Maris Figueroa y Emilce Moler**
(Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina)

Fecha de recepción: 24 de septiembre de 2016

Fecha de aceptación: 10 de octubre de 2017

Resumen

En este trabajo se presenta la descripción y los resultados de un taller situado en el contexto de un proyecto de articulación entre escuela secundaria y universidad, en la ciudad de Mar del Plata, Argentina. El mismo trató sobre el diseño y valoración de secuencias didácticas en torno al tema ecuaciones y estuvo sustentado bajo el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Se exponen los significados relativos a ecuaciones, acordados entre los docentes participantes en el taller, para el diseño de las secuencias y para la valoración de su idoneidad epistémica. Se detallan pasos posibles en el diseño de secuencias didácticas, los cuales incluyen el análisis de idoneidad que permite su mejora.

Palabras clave

Significados de ecuaciones – secuencias didácticas – idoneidad didáctica – articulación secundaria/universidad – enfoque ontosemiótico

Title

Reaching of the meanings of the equations: a workshop for designing didactic sequences

Abstract

In this paper the description and results of a workshop are described. This workshop was developed in the context of a joint project between secondary school and university, in the city of Mar del Plata, Argentina. It was based on the design of didactic sequences and its assessment, concerning to equations, and it was sustained under the theoretical framework of the Ontosemiotic Approach of the Knowledge and the Mathematical Instruction. Meanings relating to equations are exposed, which were agreed among the participating teachers, for designing sequences and for assessing their epistemic suitability. Possible steps are detailed in the design of didactic sequences, which include the suitability analysis that allows its improvement.

Keywords

equations meanings - didactic sequences - didactic suitability - joint project secondary school/university - ontosemiotic approach

1. Introducción

Las problemáticas de enseñanza de la matemática en el contexto de un mundo cambiante y la necesidad de articular abordajes didácticos entre la escuela secundaria y la universidad favorecen el objetivo de generar espacios de aprendizaje compartido entre los docentes de ambos niveles.



Durante el año 2015 se desarrolló un taller, para docentes de nivel medio, denominado “Diseño de secuencias didácticas de matemática en el contexto de las ecuaciones”, como parte de las actividades del eje de *acompañamiento pedagógico* de un proyecto denominado *Pro-articulación Ciencia y Tecnología: competencias y vocaciones. Universidad Nacional de Mar del Plata y Escuelas Secundarias de la UNMdP*¹, que involucra la participación conjunta del nivel secundario y de la universidad.

El taller fue gestionado por el Grupo de Investigación Enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería (GIEMI), radicado en el Departamento de Matemática, de la Facultad de Ingeniería.

La motivación del taller surgió a partir de la detección de dificultades, en alumnos ingresantes a la universidad, en lo referido a la resolución de ecuaciones, tanto algebraicas como trascendentes. Dichas dificultades están relacionadas con diversos aspectos, tales como la manipulación algebraica, la validación de soluciones, la interpretación de las mismas en distintos lenguajes y formas de representación, entre otros (Aznar, Baccelli, Prieto, Figueroa, Distéfano y Moler, 2012). Esta situación, sumada a la importancia del tema debido a su transversalidad y cantidad de aplicaciones, lo convierte en una temática de interés para abordar con los docentes. Esta transversalidad es tanto horizontal, en relación con asignaturas de otras ciencias, como vertical, por estar presente en los contenidos curriculares de distintos años de la educación secundaria.

Buscando realizar un aporte a favor de la resolución de esta problemática, tanto en la escuela como en la universidad, se propuso este taller como un espacio colaborativo de participación e intercambio de los docentes de ambos niveles para valorar, diseñar y analizar sus propias prácticas.

Algunos de los resultados de la experiencia fueron presentados en eventos científicos. Tal es el caso del análisis y mejora sobre secuencias didácticas de ecuaciones trigonométricas (Agüero, Pennisi, Moler y Baccelli, 2016), como también la utilización de los distintos criterios de idoneidad didáctica para la valoración de las secuencias didácticas que se presentaron en el taller (Baccelli y Moler, 2017).

Existen investigaciones que dan cuenta de las diferentes concepciones del significado, un elemento central en este artículo. En Serrano Gómez (2005) se caracteriza el significado de un objeto en educación matemática, en particular, aquellos relacionados con la actividad matemática en el contexto del aula, caracterizando los aspectos que influyen en dicha significación. Relativo a la significación de expresiones simbólicas en nivel superior las investigaciones realizadas por Distéfano, Aznar y Pochulu (2016), muestran los conflictos de significado que derivan del uso de símbolos por parte de los estudiantes.

El marco teórico de la Didáctica de la Matemática que sustentó lo trabajado en el taller fue el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) de Godino, Batanero y Font (Godino, Batanero, Font, 2009).

En este artículo se pretende dar difusión de los distintos aspectos de esta experiencia. Resaltando en particular, los significados encontrados para la enseñanza de las ecuaciones y la adaptación de los descriptores de la idoneidad epistémica, para evaluar secuencias didácticas asociadas al objeto matemático ecuaciones

¹ El proyecto forma parte del *Proyecto de mejora de la formación en ciencias exactas y naturales en la escuela secundaria* impulsado por el Ministerio de Educación de la Nación, en el marco de los *Proyectos de Desarrollo Tecnológico y Social*. PCTI – 121 <http://pds.mincyt.gob.ar/proyectos/>

2. Marco teórico utilizado en el taller

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), como línea de investigación en Didáctica de la Matemática viene desarrollándose en España desde 1994 por Juan Díaz Godino y colaboradores. Desde este enfoque la Matemática es considerada en tres aspectos: como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico, y como sistema conceptual lógicamente organizado. En este contexto se destacan dos conceptos fundamentales: el de práctica matemática y el de significado.

El EOS entiende por práctica matemática a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (Godino, Batanero, Font, 2009). Siguiendo este concepto llama significado de un objeto matemático al sistema de prácticas operativas y discursivas utilizadas resolver un cierto tipo de problemas. Si estas prácticas corresponden a un determinado individuo se habla de *significado personal de un objeto matemático*, y si son compartidas en el interior de una institución, se las concibe como conformando el *significado institucional*. En este contexto, el *aprendizaje* entendido como el acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales en una clase (Godino Batanero y Font, 2009).

El EOS considera que la Didáctica de la Matemática debe orientar y promover la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia. Para ello desarrolló teorías de índole instruccional. Define así la noción de *idoneidad didáctica de un proceso de instrucción* como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Bencomo, Font, Wilhelmi, 2007):

La *idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

La *idoneidad cognitiva* expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

La *idoneidad interaccional* está vinculada a las formas de comunicación entre docentes y alumnos a lo largo de una trayectoria didáctica. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las formas de interacción entre los actores de la clase permiten tanto identificar como resolver los conflictos de significado que tuvieran lugar durante dicho proceso. Es particularmente esencial a esta dimensión, la habilidad docente, tanto para anticipar posibles errores de los alumnos ante determinadas actividades, como para conducir al estudiante a potenciar su propio razonamiento para develar contradicciones o validar conjeturas.

La *idoneidad mediacional* representa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La *idoneidad afectiva* se vincula al grado de implicación (interés, motivación, ...) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

La *idoneidad ecológica* se asocia al grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.



La idoneidad didáctica, en las seis dimensiones mencionadas, se presenta al docente como una herramienta de orientación, tanto para el diseño como para la evaluación y mejora de las trayectorias didácticas, en la búsqueda de lograr un trabajo efectivo en el aula.

El EOS proporciona, para cada una de las idoneidades, una serie de indicadores a contemplar para su evaluación. Dichos indicadores, basados en los que propone Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007), permiten operativizar cada una de las mencionadas idoneidades, poniendo en detalle cuáles son los aspectos que deben ser foco del análisis. A modo de ejemplo, se presentan, en la Tabla 1 los indicadores de la idoneidad epistémica

Componentes	Indicadores
Situaciones-problemas	1-Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. 2-Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	3-Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos. 4-Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. 5-Propuesta de situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	6-Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. 7-Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo 8-Propuesta de situaciones para la generación y negociación de definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	9-Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. 10-Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	11-Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) y las distintas configuraciones en que organizan.

Tabla 1. Indicadores de la identidad epistémica.

3. Descripción de la experiencia

El taller se desarrolló a lo largo de siete encuentros de 3 horas cada uno, distribuidos mensualmente durante el año 2015. Los docentes participantes del taller conformaron un grupo heterogéneo con diferentes trayectos de formación académica. Por otra parte, en su gran mayoría, todos con alta carga horaria de trabajo en escuelas secundarias con distintas realidades socioeconómicas.

3.1. Primer encuentro

Durante el primer encuentro se realizó una presentación del curso y entregó material de lectura consistente en un resumen del EOS (Pochulu, 2012) y un artículo sobre Idoneidad Didáctica desde el mismo marco teórico (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007). Posteriormente se realizaron actividades de diagnóstico. Las mismas se concretaron en dos etapas: en la primera los docentes participantes resolvieron problemas que involucran distintas prácticas matemáticas asociadas a ecuaciones; en la segunda se realizó una puesta en común en la cual se registraron las dificultades que sus estudiantes manifestarían, observadas por los docentes en su experiencia de aula, respecto de los problemas propuestos. Estas observaciones fueron la base de trabajo de los encuentros posteriores.

3.2. Segundo encuentro

Se realizó una exposición introductoria de conceptos fundamentales del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática (EOS) necesarios para las propuestas del taller. En particular se hizo hincapié en la noción de significados de objetos matemáticos e idoneidad didáctica matemática.

Posteriormente se propuso a los docentes explorar, mediante una lluvia de ideas, cuáles significados asociados a ecuaciones, en el sentido que propone el EOS, son los utilizados en la resolución de las actividades trabajadas desde el primer encuentro.

Surgieron cuatro significados fundamentales que se describen a continuación:

Significado 1.

El significado vinculado a las prácticas de manipulación algebraica para encontrar los valores solución de una ecuación, como las necesarias para resolver la actividad de la Figura 2:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} = 0$ b) $\frac{x-2}{x^2-x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ c) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ con $0 \leq x < 2\pi$

Figura 2: ejemplo de actividad sobre ecuaciones para señalar prácticas algorítmicas.

En general está asociado a la aplicación de ciertas reglas y algoritmos por lo que se lo llamó *significado de la ecuación como práctica algorítmica*.

Significado 2.

Muchas situaciones problemas están modelizadas a partir de una relación expresada como una ecuación. Para encontrar solución a algunas preguntas del problema es necesario plantear y resolver ecuaciones. Así, en el problema que se muestra en la Figura 3, la relación entre la cantidad de días (x) y la altura del globo ($h(x)$) está expresada mediante la relación $h(x) = 8 + \frac{1}{16}(x^3 - 12x^2 + 47x - 60)$ y, por ejemplo, para resolver la pregunta del inciso c) se debe interpretar la relación expuesta, y plantear y resolver la ecuación $8 = 8 + \frac{1}{16}(x^3 - 12x^2 + 47x - 60)$.

2. Se localizó a un globo meteorológico a cierta altura. A partir de ese momento, su altura sobre el nivel del mar puede describirse, en forma aproximada, por la fórmula $h(x) = 8 + \frac{1}{16}(x^3 - 12x^2 + 47x - 60)$ donde x es la cantidad de días y h es la altura en miles de metros. Se quiere averiguar:

a) ¿A qué altura estaba el globo cuando fue localizado?
 b) ¿Alcanzó otra vez esa altura?
 c) ¿Llegó en algún momento a una altura de 8000 m?

Figura 3: ejemplo de actividad con una ecuación que modeliza una situación problema.



En casos como el anterior, la ecuación expresa situaciones del problema y, el cambio en valores de las variables, tiene significado en la misma; por eso se acordó que se trata de un *significado de la ecuación como un modelo matemático asociado a un problema intra o extra matemático*.

Significado 3.

Si se quiere resolver la situación expresada en el siguiente enunciado “La altura de un triángulo es 2 cm menor que la base, su área es de 684 cm². ¿Cuáles son las medidas de la base y de la altura de dicho triángulo?”, es necesario hacer una operación cognitiva de traducción de expresiones del lenguaje coloquial a expresiones simbólicas que formarán parte de una ecuación, como se muestra en la Tabla 2:

Lenguaje coloquial	Expresiones simbólicas
longitud de la base del triángulo	x
longitud de la altura del triángulo es 2 cm menor que la base	x-2
el área es de 684 cm ²	$x \cdot (x-2)/2=684$

Tabla 2. Representaciones en los registros coloquial y simbólico asociados a una situación problema.

Por otra parte, para resolver el problema de la Figura 4, es necesario traducir la relación gráfica de pertenecer tanto a la curva sinusoidal como a la recta horizontal a la relación algebraica de satisfacer tanto la igualdad $y=\text{seno}(x)$ como la igualdad $y=0,5$; por otra parte, del conjunto solución hay que seleccionar sólo los valores entre 2π y 3π .

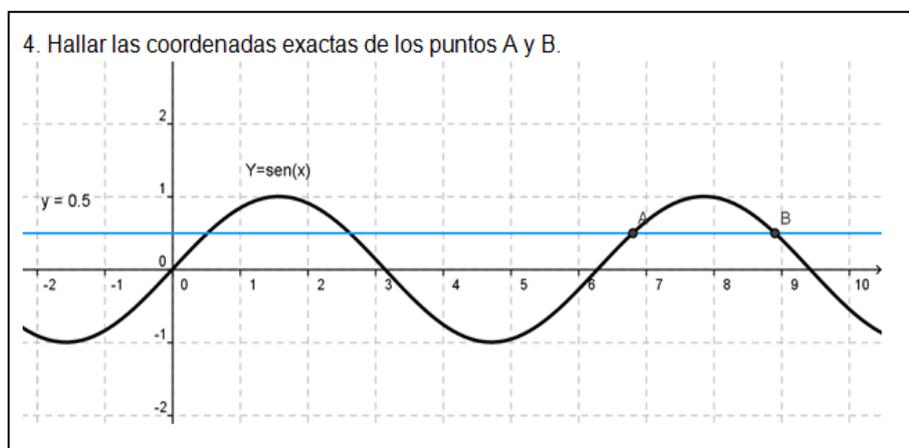


Figura 4: Ejemplo de actividad con una situación representada en el registro gráfico que puede representarse mediante ecuaciones.

En ambos ejemplos la ecuación traduce, en una igualdad de símbolos, una relación expresada en lenguaje coloquial o representada en un registro gráfico. Al considerar el rol de la ecuación en este tipo de prácticas convenimos en llamarlo *significado de la ecuación como expresión de una relación entre variables representada en distintos registros (gráfico, coloquial o simbólico)*.

Significado 4.

Desde un punto de vista lógico, una ecuación puede ser considerada como la expresión de una relación de igualdad que, de acuerdo al valor con el que se sustituya a la o las variables, puede resultar una afirmación verdadera o falsa.

Así, para la ecuación $2x+5=y-3$ si se sustituye x por 0 e y por 1 la expresión es falsa ya que $2 \cdot 0 + 5 \neq 1 - 3$. En cambio, si se sustituye x por 0 e y por 8 resulta verdadera ya que $2 \cdot 0 + 5 = 8 - 3$.

A este rol elemental y lógico de la ecuación es al que llamaremos *significado proposicional de la ecuación*, esto es como una *relación de igualdad entre expresiones que contienen una o más incógnitas, que al ser reemplazadas por valores puedan resultar verdadera o falsa*.

Como tarea final del encuentro presencial, se proporcionó un material con ejercicios de ecuaciones de diferentes unidades temáticas para los cuales los cursantes debían identificar el significado predominante y, de ser posible, los significados secundarios.

Se propuso una tarea domiciliaria para el tercer encuentro:

Elegir un tipo de ecuación de las que trabaja actualmente y luego:

- Para cada uno de los significados definidos, diseñar una actividad en la que ese significado sea predominante.
- Describir las dificultades y/o errores más frecuentes de los estudiantes al abordar las actividades planteadas en el inciso anterior.

3.3. Tercer encuentro

Se retomó, en una exposición dialógica, el concepto de idoneidad didáctica y sus distintas dimensiones (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica).

Dado que uno de los objetivos del taller fue el de usar las idoneidades como instrumentos de autoevaluación, se consideró apropiado realizar una adaptación en la descripción de cada una de ellas. Dicha adaptación consiste básicamente en expresar la idea a la que está orientada cada una de las idoneidades, en forma de pregunta. De este modo, la formulación que se presentó es la siguiente:

Idoneidad epistémica: las prácticas que se implementan en clase, ¿forman una muestra representativa de las prácticas consideradas fundamentales respecto de ese objeto matemático?

Idoneidad cognitiva: las prácticas que se pretende que los estudiantes hagan propias, ¿están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos? ¿Los aprendizajes logrados se acercan a lo que se pretendía?

Idoneidad mediacional: los recursos materiales y temporales otorgados a esta secuencia didáctica, ¿son adecuados?

Idoneidad interaccional: las formas de interacción, ¿permiten identificar y resolver conflictos de significado?, ¿favorecen la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas?

Idoneidad afectiva: ¿se favorece el interés y la motivación en los alumnos?

Idoneidad ecológica: en la secuencia didáctica, ¿se contemplan el proyecto educativo de la escuela, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional?



Bajo la idea de considerar un sistema de autoevaluación de las propias prácticas docentes se propuso el estudio de los indicadores de cada dimensión, en particular los de la idoneidad epistémica. Uno de los indicadores de dicha dimensión impone la necesidad de evaluar si una secuencia didáctica posee una muestra **representativa y articulada** de situaciones de contextualización, ejercitación, aplicación y problematización. Para considerar ese indicador se formuló a los cursantes una pregunta disparadora: *las prácticas que se implementan en clase, ¿forman una muestra representativa de las prácticas consideradas fundamentales respecto de las ecuaciones?* En un trayecto de búsqueda de respuestas a ese interrogante, se hizo una puesta en común de lo realizado en la tarea domiciliaria propuesta en la clase anterior. Para fomentar un debate enriquecedor se plantearon los siguientes interrogantes a lo largo de la puesta: *¿Qué criterios utilizaron para elegir las actividades asociadas a cada significado? ¿Cuáles son los significados habitualmente más trabajados? ¿Qué significados ofrecieron más dificultad para el diseño de actividades?*

Posteriormente se destinó un tiempo de este encuentro a la reflexión sobre la tarea de búsqueda de material para el diseño de actividades de una secuencia didáctica; específicamente se consideró el análisis de recursos ofrecidos en sitios educativos de Internet. Se mostró a los docentes cursantes una serie de sitios educativos, en idioma español, cuyos materiales vinculados al tema ecuaciones previamente habían sido evaluados de acuerdo a algunos criterios tales como: la existencia de situaciones de ecuaciones aplicadas a dominio extra-matemático, la exposición de desarrollos teóricos, la presencia de ejercicios resueltos, el uso de tecnologías de información y comunicación (presentaciones de diapositivas, videos, applets, etc.), el destinatario de los materiales (docente o alumno), tipo de actividades propuestas en el material (contextualización, ejercitación, aplicación o problematización), momentos de la secuencia didáctica para los que serían apropiados los materiales del sitio. La categorización fue expuesta a los docentes cursantes mediante presentación de diapositivas y fue recibida y valorada positivamente.

Se proporcionó a los docentes material de lectura domiciliaria sobre los indicadores de idoneidad epistémica (Godino, 2011).

3.4. Cuarto encuentro

Este encuentro se segmentó en dos momentos. Un primer momento destinado a profundizar en el estudio de la idoneidad epistémica; un segundo momento para propiciar la metacognición respecto de la tarea docente de diseño de secuencias didácticas.

Se inició la jornada retomando la noción de idoneidad didáctica. También se evocaron, de manera general, los indicadores que permiten evaluar la adecuación y pertinencia de cada una de las dimensiones que componen la idoneidad didáctica.

Cada uno de los indicadores dio lugar al intercambio y discusión con los cursantes, en relación a la forma de ponerlos en práctica a la hora de diseñar y construir materiales didácticos para trabajar con los alumnos, y también para evaluar materiales ya elaborados. En particular se focalizó la atención sobre algunos de los indicadores de idoneidad epistémica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007); los mismos figuran a continuación:

- Selección de una **muestra representativa y articulada** de situaciones de contextualización, ejercitación, aplicación y problematización.
- Uso de **diferentes modos de expresión** (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos con el nivel del lenguaje adecuado para los estudiantes.
- Propuesta de **situaciones de expresión e interpretación**

- **Definiciones, enunciados y procedimientos clara y correctamente expresados**, según el significado de referencia, adaptados al nivel educativo al que se dirigen
- Propuesta de situaciones para la **generación y negociación de las reglas**.
- **Adecuación** de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen.
- Se promueven **momentos de validación**.

Posteriormente se realizó con los docentes una primera actividad de evaluación de idoneidad. Se les proporcionó una guía de trabajos prácticos extraída de un sitio de Internet referida al tema ecuaciones exponenciales y logarítmicas; se les propuso a los cursantes que, por grupos, consideraran los indicadores para evaluar la idoneidad epistémica de la guía proporcionada. Posteriormente se realizó una puesta en común.

Al finalizar se destinó un tiempo para discutir en grupos *cuáles serían los posibles pasos para construir una secuencia didáctica buscando que tenga un buen nivel de idoneidad*. Se hizo una puesta en común.

3.5. Quinto encuentro

Este encuentro tuvo como objetivo el inicio del trabajo final enmarcado en los criterios de idoneidad estudiados en encuentros anteriores, en particular de idoneidad epistémica. Dicho trabajo implicaba el diseño de una secuencia didáctica, a ser realizado por uno o dos docentes. La misma abordaría un tema relativo a ecuaciones destinado a estudiantes de alguno de los docentes autores del trabajo y debería reflejar los pasos acordados incluyendo objetivos, actividades, recursos y evaluación. Se les pidió enviar, en un mes, una primera versión digital del trabajo por correo electrónico. Sobre esa versión se hicieron observaciones para ir mejorándolo.

3.6. Sexto encuentro

Se desarrolló una charla sobre el tema: “Analizando nuestras secuencias didácticas: ¿Cómo prevenimos y abordamos los errores de los estudiantes?”. La misma estuvo a cargo del Doctor Marcel Pochulu, investigador de renombre nacional e internacional de la Universidad Nacional de Villa María. El Doctor Pochulu desarrolló la charla abordando el tema de diferentes estilos de intervenciones docentes cuando los estudiantes formulan conjeturas erróneas en la clase. En ese aspecto, se centró en la valoración de algunas cuestiones de la idoneidad interaccional pues hay diferentes maneras de "resolver un conflicto", en el sentido de asignación de diferentes significados de objetos matemáticos, en una clase.

3.7. Séptimo encuentro

Para este encuentro se les solicitó a los docentes participantes traer una versión impresa y una digital del trabajo final mejorado. Las actividades se dividieron en dos etapas.

En la etapa inicial, cada uno de los grupos presentó su trabajo mediante un cañón de proyección. La consigna fue mostrar una actividad asociada a cada uno de los significados de ecuaciones y la evaluación final de la secuencia. Esta puesta en común permitió, no solamente que cada grupo conociera el trabajo de sus compañeros, sino también el intercambio enriquecedor entre los docentes.



En la segunda etapa, se repartieron versiones impresas de los trabajos de manera tal, que cada equipo pudiera evaluar la idoneidad didáctica de la secuencia diseñada por otro mediante una grilla de co-evaluación (Figura 3). En dicha grilla, se proponen tres niveles de valoración: muy satisfactorio, satisfactorio y poco satisfactorio, con la finalidad de evaluar el grado de cumplimiento de los distintos indicadores de cada idoneidad. Así también se anexó una columna destinada a sugerencias y pareceres.

Idoneidad	Indicador	Muy satisfactorio	Satisfactorio	Poco satisfactorio	Sugerencias
epistémica	Utiliza una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación, aplicación y problematización,				
	En las tareas y actividades, aparecen los distintos significados de ecuaciones.				
	Utiliza diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos, con el nivel del lenguaje adecuado para los estudiantes.				
	Las definiciones, los enunciados y los procedimientos están clara y correctamente expresados, de acuerdo al nivel educativo al que se dirigen				
	Se planifican momentos de validación.				
cognitiva	Se prevén instancias de evaluación de los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema				
	Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable).				
afectiva	Se proponen tareas de interés o situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.				
mediacional	Se prevé el uso de materiales manipulativos y/o informáticos que permitan introducir situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido.				
	El número y la distribución de los alumnos permiten llevar a cabo la secuencia planteada.				
	Las actividades son acordes a los horarios de la clase y a los espacios disponibles.				
	Los significados pretendidos /implementados son acordes al tiempo previsto (presencial y no presencial)				
	La distribución del tiempo prioriza los contenidos más importantes o nucleares del tema o los que presentan más dificultad de comprensión.				
ecológica	Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.				
	Se integran nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en la secuencia propuesta.				
	Los significados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.				
	Los significados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios.				
interaccional	Se describen actividades docentes y discentes en las que se propicia el diálogo y comunicación.				

Tabla 3. Planilla de evaluación de las secuencias didácticas. Fuente: Baccelli et al, 2017.

En el cierre de este último encuentro, con el objetivo de que los docentes participantes evaluaran el curso, se les entregó una tabla para completar con observaciones de aspectos que consideraran positivos, negativos y/o interesantes.

El proceso de evaluación y mejora de los trabajos continuó, vía mail, con el aporte de los docentes que impartieron el curso y la co-evaluación realizada por los pares.

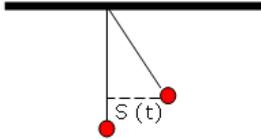
3.8. Ejemplo de uno de los trabajos presentados por los participantes del taller

En este apartado se pretende mostrar, a modo de ejemplo, uno de los trabajos presentados en el que se aplicaron los significados que emergieron del taller y la aplicación de los descriptores de la idoneidad epistémica, para el análisis de una actividad didáctica, y su posterior mejora. Dicha actividad corresponde al tema ecuaciones trigonométricas, para ser implementadas en el último año de la Escuela Media.

Se exponen dos versiones de la misma actividad. La primera versión (Figura 5) fue entregada, por los docentes en el séptimo encuentro y tuvo la co-evaluación de todo el grupo, buscando analizar el cumplimiento de los descriptores de la idoneidad epistémica (Tabla 1), procurando con ello abordar la mayor cantidad de significados acordados. La segunda de las versiones (Figura 6) es la mejorada con las modificaciones realizadas.

Actividad 9

El péndulo de un reloj se mueve periódicamente y se separa 5 cm de la vertical. La ecuación que describe el movimiento es: $S(t) = 5\text{sen}(4t)$, esta ecuación representa la distancia de la pesa a la vertical, en función del tiempo (t).



a) Representen gráficamente $s(t)$ en Geogebra.

b) Decidan a qué distancia de la vertical y de qué lado de ella (derecho o izquierdo) estará la pesa: Posición original

A los $4/3$ seg. A los 2 seg. A los $17/8$ seg.

c) ¿Qué distancia máxima alcanza el péndulo con respecto a la posición original?

d) ¿En qué instante el péndulo del reloj alcanza la distancia máxima por primera vez en el lado derecho? ¿y en el izquierdo?

e) Indiquen el período en el que se mueve el péndulo.

Figura 5. Primera versión de la actividad

Al analizar los descriptores de idoneidad epistémica (Tabla 1), los docentes, pudieron apreciar que se proponen situaciones de interpretación y se utilizan diferentes modos de expresión (descriptores 3 y 5). Sin embargo, observaron ciertas falencias que evidencian el no cumplimiento de algunos descriptores, que se describen a continuación:

- Los incisos a) y e) no están contextualizados. La actividad no está correctamente articulada (descriptor 1).
- Cuenta con escasas propuestas de situaciones para analizar frente a un problema del que se puede sacar más provecho (descriptor 7).
- Al ejercicio le faltan datos a tener en cuenta (descriptor 6).
- No tiene propuestas para la generación y negociación de las reglas (descriptor 8).
- No se promueven momentos de validación (descriptor 10).



De acuerdo a las observaciones realizadas, los docentes, efectuaron las modificaciones pertinentes para mejorar la idoneidad epistémica de la actividad (Figura 6). Las mejoras presentadas se argumentaron de la siguiente manera:

- Se modificaron los incisos a) y e) (este último pasó a ser el c) en la última versión) para contextualizar los mismos en relación al problema planteado.
- Se modificó el orden de los incisos para lograr correcta secuenciación de la actividad.
- Se adicionó el f) y se completaron los incisos a) y d) (que pasó a ser el e) en la versión modificada) para lograr el significado de la ecuación como práctica algorítmica, como un modelo matemático y como una expresión de una relación entre variables representada en distintos registros.
- Se incluyeron los ítems e) y f) para encontrar las infinitas soluciones a partir de una forma general.

Actividad 9

El péndulo de un reloj se mueve periódicamente y se separa 5 cm de la vertical. Si se desprecia la fricción, la ecuación que describe el movimiento es: $S(t) = 5\text{sen}(4t)$, esta ecuación representa la distancia de la pesa a la vertical, en función del tiempo (t).

a) Representen en Geogebra el movimiento del péndulo. ¿Qué sucede con el péndulo en los momentos en los que la función alcanza los máximos y mínimos?

b) Decidan a qué distancia de la vertical y de qué lado de ella (derecho o izquierdo) estará la pesa:

A los $\frac{4}{3}$ seg. A los 2 seg. A los $\frac{17}{8}$ seg.

c) ¿Cada cuántos segundos se repite el movimiento?

d) ¿Qué distancia máxima alcanza el péndulo con respecto a la posición original?

e) ¿En qué instante el péndulo del reloj alcanza la distancia máxima por primera vez en el lado derecho? ¿y en el izquierdo? ¿En qué otros momentos llegará a la misma altura?

f) ¿En qué momento/s el péndulo llegará a los 4 cm de distancia respecto a la vertical?

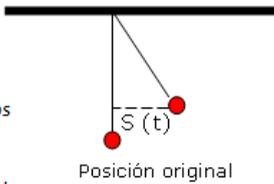


Figura 6. Versión mejorada de la actividad

4. Resultados

La posibilidad que brindó el taller de compartir las experiencias docentes en torno a la enseñanza de ecuaciones en el aula representó uno de los principales logros vivenciados.

Además, emergieron acuerdos importantes a partir del análisis conjunto realizado durante los encuentros. Tal es el caso de la categorización de significados asociados a ecuaciones. Como se detalló en la descripción de la experiencia, surgieron cuatro significados fundamentales:

- Como práctica algorítmica
- Como expresión de un modelo matemático asociado a un problema intra o extra matemático
- Como expresión de una relación entre variables representada en distintos registros (gráfico, coloquial o simbólico)
- Como relación de igualdad entre expresiones que contienen una o más incógnitas (proposicional)

Otro resultado, derivado del trabajo conjunto con los docentes, fue la enumeración de los posibles pasos para construir una secuencia didáctica buscando que tenga un buen nivel de idoneidad. De la puesta en común se consensuó e institucionalizó el siguiente listado de pasos:

- Responder a la pregunta: ¿Qué se quiere enseñar?
- Diagnosticar conocimientos previos
- Definir recursos materiales y temporales disponibles
- Plantear objetivos dentro del eje que se está tratando
- Diseñar actividades
- Evaluar las idoneidades a priori y a posteriori de la implementación de la secuencia en el aula como retroalimentación para su mejora.

El último paso señalado en el párrafo anterior, manifiesta otro resultado importante: haber puesto en práctica una herramienta teórico-metodológica como es el conjunto de indicadores de idoneidad didáctica para evaluar, al menos parcialmente, una secuencia didáctica diseñada. En los últimos encuentros se utilizaron estos indicadores tanto para evaluar la propia secuencia diseñada como para evaluar la secuencia elaborada por colegas en las instancias de co-evaluación.

La mejora de la actividad que se muestra en esta publicación, representa un ejemplo y un resultado de lo trabajado con los participantes del taller. Asimismo, el uso que ellos realizaron, tanto de los significados asignados a ecuaciones, como de los descriptores de la idoneidad didáctica, constituyen un aporte orientado a la mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones.

Finalmente, los docentes participantes del taller expresaron sus opiniones, en forma individual y escrita, sobre los aspectos Positivos, Negativos e Interesantes (PNI) con el objetivo de realizar una evaluación sintética del curso que también sirvió de devolución para quienes diseñaron, impartieron y evaluaron el taller.

Los aspectos señalados como Positivos se pueden sintetizar en las siguientes frases expresadas por los docentes participantes del taller: los temas innovadores, las “buenas enseñanzas”, la interacción con los pares, los diferentes aspectos para el abordaje de las ecuaciones (significados), el compromiso de quienes asumieron el dictado del taller, el enfoque (EOS) como novedoso/ameno/didácticamente presentado, la posibilidad de realizar una mirada sobre las propias prácticas a partir de las idoneidades, el taller dictado por el especialista Pochulu.

Los aspectos Negativos se refirieron a cuestiones operativas tales como: tardanza en entrega de certificados, el no reconocimiento de la inasistencia a los colegios de parte de algunas autoridades, el poco interés de algunos docentes que abandonaron el curso.

Los aspectos Interesantes giraron en torno a la posibilidad de participar del Taller brindado por el Dr. Marcel Pochulu y al buen material entregado durante el curso.

5. Reflexiones finales

La dinámica cambiante de la sociedad y la educación como fenómeno inherente a ella plantea constatemente problemáticas. Las instituciones educativas en los distintos niveles deben adaptarse a esa dinámica y coordinar saberes, puntos de vista y abordajes. Por otra parte, desde el campo de la investigación educativa surgen elementos y herramientas cuya aplicación en las aulas no se traslada fácilmente.



La idea del taller surgió como primer intento de articulación entre escuela secundaria y nivel universitario para abordar distintas problemáticas de los estudiantes en relación a las ecuaciones. Su implementación brindó la enriquecedora oportunidad de compartir experiencias docentes de los dos niveles antes mencionados.

Al mismo tiempo el taller fue un escenario de difusión y aplicación de algunas herramientas didácticas proporcionadas por el EOS para trabajar en dicho abordaje. El taller se focalizó en los conceptos de significado de objetos matemáticos e idoneidad didáctica. La determinación de los significados, de los objetos matemáticos que se pretenden abordar en una secuencia didáctica, es el paso inicial imprescindible para su diseño. En este sentido es de destacar el surgimiento, a partir del acuerdo entre los docentes participantes del taller, de cuatro significados fundamentales asociados a ecuaciones.

Por otra parte, los indicadores de idoneidad didáctica aplicados, orientaron tanto la evaluación como la co-evaluación de las secuencias diseñadas, al mismo tiempo que guiaron su mejora. Esto brindó un espacio de reflexión sobre la propia práctica docente a fin de tener una actitud crítica y valorar esta evaluación como una instancia de producción de nuevos conocimientos didácticos.

Queda pendiente la propuesta de completar esta experiencia abarcando el análisis de otras dimensiones de la idoneidad didáctica que sólo podrían abordarse a partir de secuencias implementadas en el aula.

Bibliografía

- Agüero, M. F.; Pennisi, E.; Baccelli, S.; Moler, E. (2016) Análisis y mejora de una secuencia didáctica sobre ecuaciones trigonométricas. *2do. Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática – 3er. Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática* (2 CIECyM - 3 ENEM) Tandil. Argentina.
- Aznar, A.; Baccelli, S.; Prieto, G.; Figueroa, S.; Distéfano, M. L. y Moler, E. (2012) Habilidades matemáticas en ingresantes a carreras de ingeniería: un análisis de las dificultades desde el enfoque ontosemiótico. *Actas del Foro Mundial de Educación en Ingeniería World Engineering Education Forum (WEEF 2012)* Buenos Aires. Recuperado el 1 de agosto del 2016 de, <http://weef2012.edu.ar/archivos/papers/WEEF2012.pdf>
- Baccelli, S. G. y Moler, E. (2017). Significados e idoneidad de secuencias didácticas en un taller de capacitación sobre ecuaciones. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (CIVEOS). Recuperado el 30 de agosto de 2017 de, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html
- Distéfano, M.L., Aznar, M., Pochulu, M. (2016). Prácticas matemáticas y funciones semióticas en la significación de representaciones simbólicas de la matemática superior. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 11(2), 1-16.
- Godino, J., Batanero, C., Font, V. (2009). *Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 1 de agosto del 2016 de, http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado el 1 de agosto del 2016 de, http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf
- Godino, J. (2011) *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado el 1 de agosto del 2016 de, http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Serrano Gómez, Wladimir. (2005). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía*, 26(75), 131-166.

Recuperado en 14 de septiembre de 2017 de, http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922005000100006&lng=es&tlng=es

Sandra Graciela Baccelli. Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP), Argentina. Juan B. Justo 4302 (CP 7600), Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. Prof. Universitaria en Matemática, Especialista en Investigación Educativa por la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Docente-investigadora en la Facultad de Ingeniería y profesora en el nivel medio, miembro del Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (GIEMI). E-mail: sbaccelli@gmail.com

María Andrea Aznar. Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP), Argentina. Juan B. Justo 4302 (CP 7600), Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. Profesora Universitaria en Matemática, Especialista en Investigación Educativa y Magister en Enseñanza de la Matemática en el nivel superior por la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Docente-investigadora en la Facultad de Ingeniería y en el nivel medio, miembro del Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (GIEMI). E-mail: maznar@fi.mdp.edu.ar

María Laura Distéfano. Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP), Argentina. Juan B. Justo 4302 (CP 7600), Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. Profesora en Matemática, Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior por la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Docente-investigadora en la Facultad de Ingeniería de la UNMDP. Integrante del Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería (GIEMI). E-mail: mldistefano@fi.mdp.edu.ar

Stella Maris Figueroa. Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP), Argentina. Dirección Postal: Juan B. Justo 4302 (CP 7600), Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. Profesora en Matemática, Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior por la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Profesora Adjunta con dedicación exclusiva en la asignatura Estadística Básica de la Facultad de Ingeniería de la UNMDP. Integrante del Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería (GIEMI). E-mail: stellafigueroa@gmail.com

Emilce Moler. Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP), Argentina. Dirección Postal: Juan B. Justo 4302 (CP 7600), Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. Doctora en Bioingeniería, especialista en Procesamiento Digital de Imágenes, Mg en Epistemología y Metodología de la Ciencia y Profesora Universitaria en Matemática. Docente-investigadora de la UNMdP, Directora del grupo de investigación Grupo de Investigación de Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería (GIEMI).

