NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 92, julio de 2016, páginas 7-19

Interpretación y clasificación de la demanda cognitiva de actividades matemáticas que involucran a los números fraccionarios y decimales en Educación Primaria

Tere Cortadellas Benítez
(Universidad de Barcelona. España)

Fecha de recepción: 22 de abril de 2015
Fecha de aceptación: 29 de febrero de 2016

Resumen Presentamos una experiencia de aula acontecida en un cuarto curso de Grado de Maestro de Educación Primaria en torno al análisis de actividades matemáticas en función del nivel de demanda cognitiva. Las tareas propuestas versan sobre fracciones, la equivalencia de fracciones y su representación, y sobre la relación entre fracciones y números decimales. Reflexionamos sobre las respuestas ofrecidas por el alumnado de grado y las discusiones matemáticas que tuvieron lugar en el aula a raíz de sus producciones.

Palabras clave Maestro de Primaria, conocimiento matemático, tareas matemáticas, demanda cognitiva, números decimales, números fraccionarios.

Abstract We present a classroom experience occurred in fourth Primary Teacher Grade course around the analysis of mathematical tasks depending on the level of cognitive demand. The proposed tasks deal with fractions, equivalence of fractions and their representation, and the relationship between fractions and decimals. We reflect on the answers given by the students of grade and the math discussions that took place in the classroom as a result of their productions.

Keywords Primary Teacher, mathematical knowledge, mathematical tasks, cognitive demand, decimal numbers, fractions.

1. Introducción

Partimos de la cita de Miguel de Guzmán:

> La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones, en buena parte colindantes con la psicología cognitiva, que se refieren a los procesos mentales de la resolución de problemas. (Guzmán, 1989)

Combinar y encontrar un equilibrio entre la metodología heurística y los contenidos es labor del profesor de matemáticas. Fijado este objetivo, el modo en que el maestro dirige su actividad para que el alumno descubra la matemática es crucial para que éste sea capaz de activar su capacidad de razonamiento y creatividad.

Qué preguntas, tareas o actividades proponer a nuestros alumnos, en qué momento plantearlas y cómo presentarlas, teniendo en mente qué problemas, ideas, métodos y estrategias se pretenden activar, es labor del docente en matemáticas.

El principal objetivo del presente trabajo es mostrar una experiencia de observación del conocimiento matemático del futuro maestro, conocimiento para desarrollar las actividades adecuadas para el aprendizaje de los alumnos de primaria. Conocimiento que engloba tanto el contenido de la materia y su organización, como la forma particular de conocimiento matemático que incorpora los aspectos propios de la enseñanza. Este conocimiento capacita a los docentes para introducir, exponer y representar la materia de manera comprensible para sus alumnos y, a su vez, permite entender cómo éstos piensan y representan sus ideas. El conocimiento matemático del maestro es indispensable para poder ofrecer a los alumnos de primaria actividades que permitan, además de aprender; intuir, descubrir y construir la matemática.

Presentamos en este trabajo una experiencia de aula en un cuarto curso de Grado de Maestro de Educación Primaria. El trabajo expone una propuesta de actividad planteada para analizar la actividad de la matemática escolar, concretamente se propone al alumnado de Grado el análisis de cuatro tareas destinadas al alumnado de primaria; análisis centrado en el nivel de demanda cognitiva que exige al alumnado. El presente trabajo se centra principalmente en el análisis de las respuestas del alumnado de Grado a la propuesta y en el relato de las discusiones matemáticas desarrolladas en el aula a raíz de estas respuestas. Las cuatro tareas de primaria analizadas por el alumnado de Grado tratan un contenido curricular concreto, el de los números fraccionarios, principalmente el concepto de fracción como relación entre las partes y el todo y la relación entre fracción y número decimal. Este contenido involucra ideas matemáticas que, a menudo, resultan difíciles para el alumnado de formación de profesorado.

Entre los trabajos publicados que se ocupan de las cuestiones que se tratan en este trabajo nos gustaría comentar aquí algunos de ellos. Shulman (1986) distingue tres categorías de conocimiento del contenido para la enseñanza: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular. Posteriormente, Hill, Ball y Schilling (2008) proponen ampliaciones de esta categorización y modelos específicos para el conocimiento matemático de la enseñanza. Los que siguen son trabajos que tienen en común a los números decimales como objeto matemático de investigación. Julia Centeno (1988), en su bella monografía sobre los números decimales realiza un trabajo de síntesis sobre estos “números” atendiendo a su realidad social, su historia, su construcción matemática y su relación con los números enteros y racionales con el enfoque que ella denomina el “conocimiento para enseñar”. El texto se preocupa por el problema de la organización de la enseñanza de los números decimales, de cómo introducirlos, y de las dificultades y de los errores relacionados con su concepto, su escritura y sus operaciones. Se ocupa profundamente también la autora de las situaciones para enseñar diferentes aspectos de los números decimales. Konic, Godino y Rivas (2010) presentan el análisis de una lección introductoria a los números decimales en un libro de texto de cuarto curso de primaria. El trabajo de Llinares (2011) se centra en el conocimiento de matemáticas que debe ayudar al estudiante para maestro a desempeñar su labor profesional, ejemplificando la tarea profesional del maestro de analizar libros de texto.

El trabajo se estructura como sigue. El modelo de clasificación de la tarea matemática que se trabajó en el curso de Grado en el que tiene lugar la experiencia es el presentado en la sección 2. Esta clasificación aparece en artículo de Smith y Stein (1998) y considera cuatro categorías de demanda cognitiva; estas categorías distinguen el nivel de demanda cognitiva que exige una tarea al alumnado para su resolución. La experiencia en aula se desarrolla en la sección 3; en ella, presentamos la tarea propuesta al alumnado de Grado, exponemos y analizamos las respuestas ofrecidas, así como las discusiones matemáticas que tuvieron lugar en el aula en torno a los conceptos e ideas sobre los que versan las tareas. Concluimos, en la sección 4, que el análisis de las producciones y de las discusiones matemáticas del alumnado de Grado de Maestro de Primaria permite determinar, corregir si es necesario, y desarrollar el conocimiento matemático del futuro maestro, necesario para el buen ejercicio de la profesión de la enseñanza.

2. Análisis y clasificación de actividades atendiendo al nivel de demanda cognitiva

En el curso de Grado en el que se desarrolla la experiencia que nos ocupa se trabaja la clasificación de actividades o tareas matemáticas y, entre ellas, la clasificación presentada en el artículo de Smith y Stein (1998) que atiende al nivel de demanda cognitiva exigida por la actividad. El artículo está centrado en la selección y creación de tareas matemáticas a partir de experiencias con docentes. Las autoras distinguen cuatro categorías:

1. Memorización
2. Procedimientos sin conexión.
3. Procedimientos con conexión.
4. Hacer matemáticas.

A continuación, se definen estas categorías atendiendo a la caracterización que propone el artículo citado.

Las tareas de <u>memorización</u>:

- Reproducen hechos, reglas, fórmulas y definiciones aprendidas o dadas previamente.
- No pueden ser resueltas utilizando un procedimiento porque no existe o porque en el marco en que se pide no prevé suficiente tiempo para efectuarlo.
- No son ambiguas. Implican la reproducción exacta de tareas hechas con anterioridad.
- No tienen conexión con los conceptos o significados que son el fundamento de las reglas, hechos o definiciones aprendidos o reproducidos.

Las tareas de <u>procedimientos sin conexión</u>:

- Son algorítmicas. Se dice concretamente lo que hay que usar o es muy evidente por las actividades previas.
- Reclaman poca demanda cognitiva para ser resueltas. Hay poca ambigüedad sobre lo que hay que hacer y cómo hacerlo.
- No hay conexión con los conceptos o significados que subyacen en el procedimiento utilizado.
- Están enfocadas a producir respuestas correctas en lugar de desarrollar comprensión matemática.
- No piden explicaciones o solo las piden enfocadas a describir el procedimiento usado.

Las tareas de <u>procedimientos con conexión</u>:

- Están enfocadas al uso de procedimientos con la intención de desarrollar niveles más profundos de comprensión de conceptos y de ideas matemáticas.
- Sugieren implícita o explícitamente pautas a seguir que son procedimientos más generales que tienen conexiones propias con las ideas subyacentes.
- Requieren cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque pueden utilizar procedimientos

generales, éstos no se aplican automáticamente. El alumnado necesita establecer una relación con las ideas que fundamentan el procedimiento para poder resolver la actividad con éxito y desarrollar su comprensión.

Las tareas de hacer matemáticas:

- Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. No sugieren ninguna aproximación predecible ensayada con anterioridad a la propuesta de la tarea.
- Requieren que el alumnado entienda y explore la naturaleza de los conceptos.
- Exigen auto-regulación del propio proceso cognitivo.
- Fomentan el acceso a conocimiento relevante y a utilizarlo en la tarea.
- Requieren analizar la actividad y las restricciones que pueden limitar las posibles estrategias para su resolución.
- Exigen un considerable esfuerzo cognitivo y pueden implicar ansiedad por parte del alumnado a causa de la naturaleza impredecible que el proceso de resolución requiere.

No se debe pretender que todas las actividades propuestas en las aulas sean de alto nivel cognitivo. Si el objetivo es recordar definiciones, hechos básicos, reglas o propiedades, las tareas de memorización serán las adecuadas. Si el objetivo es incrementar la velocidad y destreza en la resolución de ejercicios rutinarios, las actividades de procedimientos sin conexión serán las apropiadas. De hecho, la habilidad en este tipo de ejercicios puede favorecer la eficiencia en tiempo y esfuerzo para la resolución de las cuestiones rutinarias de tareas más complejas. No obstante, el alumnado debe tener la oportunidad de enfrentarse a tareas que conduzcan a la comprensión más profunda de la naturaleza matemática de los procedimientos, ideas, conceptos y relaciones.

Es evidente que la asignación de tareas a las categorías puede ser discutible. En todo caso, en la caracterización de la categoría, deberán tenerse en cuenta las circunstancias, la edad y los conocimientos previos del alumnado

Dada una tarea, para poder clasificarla, previamente hay que realizar un análisis de la misma. Para clasificar una tarea, es determinante preguntarse cómo el alumnado puede resolver la tarea, qué debe haber memorizado el alumnado o qué procedimiento debe utilizar, si creemos que nos encontramos ante una tarea de bajo nivel (de memorización o de procedimientos sin conexión) y; en el caso de tareas de alto nivel (de procedimientos con conexión o de hacer matemáticas), qué ideas matemáticas pueden desarrollar o qué conexiones pueden establecer.

El artículo de Smith y Stein (1998) y el capítulo de libro de Smith, Stein, Arbaugh, Brown y Mossgrove (2004) presentan ejemplos de análisis de tareas destacando la importancia de este análisis con el fin de determinar el nivel de pensamiento requerido. El libro de Stein, Smitth, Henningen y Silver (2000) muestra cómo la demanda cognitiva de la tarea puede evolucionar y cambiar durante su implementación en aula.

3. Experiencia

La experiencia que exponemos tiene lugar en un aula de cuarto curso del Grado de Maestro de Educación Primaria durante el desarrollo de una asignatura de didáctica de la matemática. El alumnado ha cursado, en su segundo y tercer curso de grado, sendas asignaturas de matemáticas y su didáctica centradas en los contenidos curriculares, las metodologías para su enseñanza y la heurística para la resolución de problemas. El grupo clase está formado por 60 alumnos y las sesiones, dos por semana, son de 90 minutos; para las actividades que se realizan en grupos se forman 16 (sub)grupos de trabajo.

3.1. La experiencia en su contexto

Aunque nos centramos en el presente trabajo en los aspectos relacionados con las respuestas ofrecidas por el alumnado ante una propuesta de clasificación de tareas matemáticas de primaria, secuenciamos a continuación las actividades realizadas en torno a la experiencia.

- En la primera sesión se presenta el modelo de clasificación por Smith y Stein (1998) y se debate sobre el análisis y clasificación de las tareas que aparecen en el texto. Finaliza la sesión con la presentación de una actividad que se realizará en grupos, como actividad fuera de aula, y se entregará en la próxima sesión. Detallamos esta propuesta en la sección 3.2.
- En la segunda sesión se analizan y clasifican, en el conjunto de toda la clase, las tareas que aparecen en el trabajo de Smith et al. (2004).
- En la tercera sesión se discuten las respuestas a la actividad propuesta y surge en la clase un diálogo sobre los números decimales.

Cabe señalar que en el artículo de Smith y Stein (1988) presentado en la primera sesión, se analizan, entre otras, cuatro tareas que versan sobre los números fraccionarios, concretamente sobre la multiplicación de estos números.

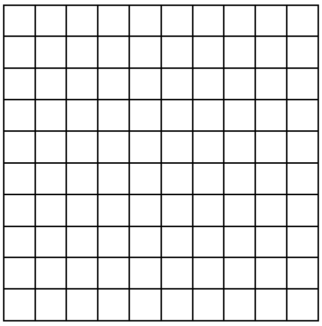
Las tareas de Smith et al. (2004) están propuestas por los autores del texto para su clasificación. En la primera mitad de la segunda sesión el alumnado realiza la clasificación individualmente o en grupos. Insistimos en el aula en que, previamente a la categorización, deben realizar la tarea de tantas maneras como les sea posible, previendo los posibles errores que podrían cometer los alumnos de primaria e identificando qué conceptos o ideas matemáticas pueden utilizar; así mismo, insistimos en que la clasificación debe ser razonada y argumentada en base al análisis realizado. En la segunda parte de la sesión se abre un debate sobre las clasificaciones realizadas en todo el grupo de clase.

3.2. La actividad

La actividad propuesta al alumnado de Grado de Maestro de Educación Primaria, y del que surge la idea de este trabajo de investigación, es la clasificación razonada de las tareas de la Figura 1. Las cuatro tareas aparecen en el texto de Smith et al. (2000, p. 13).

En el momento de presentar la actividad se precisa un aspecto fundamental, a quien van dirigidas las tareas objeto de análisis. Son actividades propuestas para un aula de sexto de primaria; se supone que en ella se han trabajado los siguientes contenidos relativos a la investigación: la fracción como parte de una unidad o de una colección, la equivalencia de fracciones, los números fraccionarios y su relación con los números decimales y los porcentajes, y la representación de fracciones utilizando diversos modelos, entre ellos la recta numérica.

1. Determina la expresión decimal y el porcentaje equivalente a las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.
2. Determina la expresión decimal y el porcentaje equivalente a la fracción $\frac{3}{8}$.
3. Utiliza la cuadrícula 10×10 siguiente para determinar el porcentaje equivalente a la fracción $\frac{3}{5}$ y su valor numérico.



4. Sombrea seis de los cuadrados de la tabla que se muestra a continuación. Utilizando la tabla, explica como determinar el porcentaje de área de rectángulo correspondiente a la parte sombreada.

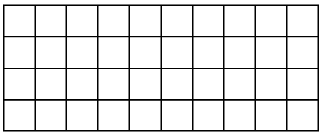


Figura 1. La actividad propuesta al alumnado de Grado: clasificación de las tareas

3.3. Análisis de las respuestas del alumnado

En el curso de Grado de Maestro de Primaria se insiste en que el docente debe tener en cuenta cómo el alumnado de primaria podrá responder a la tarea, qué procesos puede desencadenar, qué conexiones permite establecer; es decir, hasta donde puede dar de sí. La mayoría de alumnos clasifica acertadamente cada una de las actividades siendo éstas una de cada categoría y presentadas en orden creciente en requerimiento de nivel de demanda cognitiva. Sin embargo, la previsión que ofrece el alumnado del curso sobre la resolución de las actividades por parte del alumnado de primaria se reduce básicamente a la siguiente:

1. $\frac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow 50\%, \frac{1}{4} = 0{,}25 \rightarrow 25\%$
2. $\frac{3}{8} = 0{,}375 \rightarrow 37{,}5\%$
3. $\frac{3}{5} = 0{,}6 \rightarrow 60\%$ y pintar posteriormente 60 cuadraditos
4. $\frac{6}{40} = 0{,}15 \rightarrow 15\%$ o bien $\frac{6}{40} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} \rightarrow 15\%$

Figura 2. Resolución de las tareas por parte del alumnado de Grado

Es decir, en todas ellas el alumnado aplica directamente un procedimiento general, el mismo en la mayoría de casos, sin establecer relaciones con los conceptos subyacentes. La actividad se realiza en grupos de trabajo, 16 grupos, y en este caso:

- En la de previsión de las posibles respuestas de alumnado de primaria a la tarea 3, 9 de los 16 grupos muestran únicamente la respuesta que aparece en la Figura 2.
- En la previsión de posibles respuestas de alumnado de primaria a la tarea 4, 12 de los 16 grupos no ofrecen en su análisis otras respuestas que las que aparecen en la Figura 2.

En el caso de las dos primeras actividades de nivel bajo (de memorización y de procedimientos sin conexión), los argumentos que ofrece el alumnado del Grado para clasificar las actividades en cada categoría no responden al nivel de demanda cognitiva requerido, sino que atiende a la menor o mayor dificultad en la división del numerador entre el denominador de la fracción dada. El argumento para considerar las actividades 3 y 4 como actividades de alto nivel (de procedimientos con conexión y de hacer matemáticas) se soporta en la representación de la fracción dada como parte de una unidad; sin embargo, en la resolución presentada no se utiliza este concepto como base del procedimiento mediante el que se determina el valor numérico o porcentaje equivalente. Por tanto, atendiendo a las respuestas ofrecidas por el alumnado de Grado, la clasificación de las cuatro tareas sería de “procedimientos sin conexión”.

Ante estas respuestas nuestra labor es preguntar y analizar qué pretende un maestro al proponer en su aula de primaria estas tareas. Respecto la tarea 1 la pregunta adecuada es si, al proponerla en un aula de sexto de primaria, creemos que el maestro pretende que sea una actividad algorítmica, si es necesario que el alumno realice algún procedimiento aprendido previamente, o si el maestro pretende observar si su alumnado ha interiorizado que $0{,}5$ y $0{,}25$ son, respectivamente, las expresiones decimales de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ así como que 50% y 25% son, respectivamente, los porcentajes equivalentes. Esta observación nos permite clasificar la actividad como de memorización. Las diferentes acepciones de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ es un ejemplo de tarea que puede plantearse a alumnos de primaria de distintos cursos. Es decir, dado un contenido matemático, según se plantee la tarea, se desarrollará un tipo de conocimiento conceptual y se activarán unos procedimientos cognitivos concretos. Por tanto, dado un contenido matemático, la tarea se plantea según la capacidad cognitiva o competencia que se quiere desarrollar en el alumno, de acuerdo con su desarrollo intelectual, es decir, su nivel educativo. Resulta así, que la clasificación depende del nivel educativo en el que se plantea.

En el caso de la tarea 2 hay consenso en que pretende observar si el alumnado de sexto de primaria ha aprendido algún procedimiento general explicado y trabajado en el aula con anterioridad; por ejemplo, la realización de una división utilizando el algoritmo estándar de división (decimal) o estrategias propias de cálculo, para obtener el valor numérico decimal y su posterior conversión a porcentaje multiplicando éste por cien. También hay consenso en que para su resolución no es necesario que el alumno de primaria utilice los conceptos e ideas matemáticas que validan el procedimiento. Estas reflexiones son las que permiten clasificar la tarea 2 como una actividad de procedimientos sin conexión.

Las respuestas ofrecidas en la actividad 3 ponen de manifiesto que más de la mitad de los alumnos del curso del Grado no reconoce el objetivo de la actividad —utilizar la cuadrícula para determinar el porcentaje equivalente a la fracción dada— puesto que este alumnado calcula en primer lugar el porcentaje con el mismo procedimiento que en la actividad 2 para, posteriormente, sombrear el número de cuadraditos en la tabla. De nuevo, la pregunta que debe hacerse el futuro maestro es qué se pretende con el planteamiento de la actividad, en este caso profundizar en la idea de fracciones equivalentes utilizando una representación, la cuadrícula dada, como registro semiótico. Por ejemplo, pintar $\frac{3}{5}$ de la cuadrícula dada, considerando que dos columnas son un quinto de la misma, según se muestra en la Figura 3, permite observar que marcar $\frac{3}{5}$ de la cuadrícula se corresponde con marcar 60 de los 100 cuadrados de la tabla y, por tanto, se puede deducir que la fracción $\frac{3}{5}$ es equivalente a la fracción $\frac{60}{100}$.

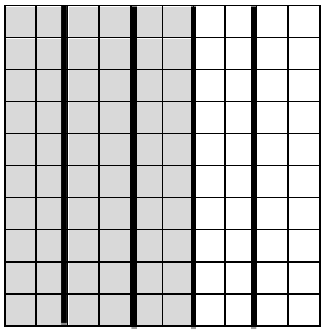


Figura 3. Representación de la tarea 3

Esta equivalencia permite observar, sin un cálculo explícito, tanto el valor numérico decimal como el porcentaje que representa la fracción $\frac{3}{5}$. Así, la actividad permite utilizar procedimientos generales como es la representación de una fracción en un cuadrado, pero éste no se utiliza automáticamente, ya que observar en la tabla que dos columnas representan un quinto de la misma no es un procedimiento directo. Esta anticipación de respuesta del alumnado de primaria nos da argumentos para clasificar la actividad como de procedimientos (representación de fracciones como parte de una unidad) con conexión. La conexión se pone de manifiesto al establecer una relación entre el procedimiento y el concepto de fracciones equivalentes.

En el análisis realizado por los alumnos del Grado de la tarea 4, 12 de los 16 grupos no observan la instrucción de sombrear seis de los cuadrados y utilizar su disposición para determinar el porcentaje de área del rectángulo que ocupan. Sin esta observación, el objetivo de la actividad pierde todo su sentido. Los 4 grupos restantes desarrollan la estrategia que sigue del sombreado por columnas que representa la Figura 4; pintando 4 cuadrados de una columna tenemos un 10% del rectángulo o $\frac{1}{10}$ del mismo, por tanto 2 cuadrados ocupan media columna, es decir un 5% o equivalentemente $\frac{1}{20}$ del rectángulo.

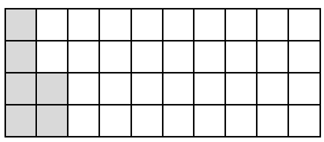
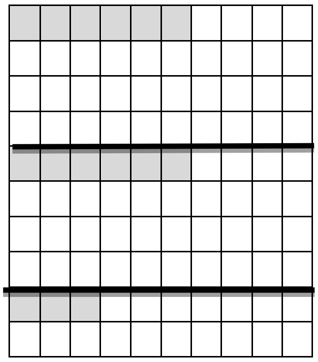


Figura 4. Representación de la tarea 4 por columnas

En la sesión de debate se mostraron algunas de las estrategias de resolución de la cuarta actividad realizadas por alumnado de primaria, y que aparecen en el texto de Stein et al. (2000). Entre ellas, la expuesta anteriormente y la que parte de la idea de que si la tabla fuese 10×10 el número de cuadrados pintados nos daría el porcentaje. Se proyectó la resolución de la actividad tal y como aparece en el texto citado y que aparece en la Figura 5. A continuación, pedimos a los alumnos del Grado que interpretasen, utilizando números fraccionarios, el razonamiento que aparecía proyectado.



Si la cuadrícula fuese de 100 cuadrados el número de cuadrados sombreados nos daría el porcentaje de área de rectángulo sombreado. En la cuadrícula de 40 tenemos 6 cuadrados sombreados. Si añadimos 40 cuadrados más, tendremos 6 cuadrados más sombreados. Como 20 es la mitad de 40, si añadimos 20 cuadrados más tendremos 3 cuadrados más sombreados. En total tenemos $6 + 6 + 3 = 15$ cuadrados sombreados de 100 y, por tanto, el área sombreada es un 15% del área total de rectángulo.

Figura 5. Resolución de la tarea 4 tomada de Stein et al. (2000)

Una parte considerable del alumnado de Grado interpreta el razonamiento de la Figura 5 como $\frac{6}{40} + \frac{6}{40} + \frac{3}{20}$ en lugar de $\frac{6}{40} = \frac{12}{80} = \frac{15}{100}$, confundiendo la suma de fracciones y la equivalencia de fracciones en la representación.

Éstas y otras estrategias desarrolladas por alumnado de primaria muestran como una tarea puede activar el razonamiento y profundizar en conceptos e ideas matemáticas.

3.4. Debate en torno a los números fraccionarios y decimales

En este apartado exponemos episodios del diálogo que tuvo lugar en la sesión de debate de la experiencia. Presentamos extractos del diálogo mantenido en relación a los números decimales. La sesión de aula nos permitió detectar los conocimientos del alumnado sobre los números decimales y profundizar en las ideas subyacentes en sus representaciones y en los procedimientos aprendidos en torno a ellos. La discusión matemática se inicia a raíz de una serie de preguntas que inciden en los objetivos de las tareas analizadas (Figura 1), entre ellas:

- ¿Considerarías la fracción $\frac{3}{7}$ en la tarea 2?,
- ¿Qué pasa si en la tarea 3 cambiamos la fracción $\frac{3}{5}$ por la fracción $\frac{2}{3}$? ,
- ¿Qué pasa si en la tarea 4 pedimos sombrear 3 cuadrados?

El primer episodio de la sesión de debate pone de manifiesto las dificultades del alumnado del Grado para expresar qué es un número decimal y diferenciar entre número decimal y expresión decimal (o valor numérico) de una fracción. Ante la ausencia inicial de respuestas preguntamos qué son los números decimales. El alumnado sabe cómo son y ofrece ejemplos de ellos, siempre en su expresión decimal. Entre los ejemplos dados escogemos uno y escribimos en la pizarra diversas expresiones de éste, cómo muestra la Ecuación 1, observando que la coma es simplemente una expresión, una forma de escribir un tipo particular de fracciones, aquellas que pueden escribirse de manera equivalente a una fracción con denominador potencia de 10.

$$203{,}05 = 2 \times 100 \ + 3 + 5 \times \frac{1}{100} = \frac{20305}{100} = \frac{4061}{20}$$

Ecuación 1. Expresiones de un número decimal

Insistimos en que éstos, los números decimales, son fruto de la manera en que escribimos los números naturales, expresiones que indican sumas de agrupaciones en potencias de 10 y en cuya expresión es determinante la posición de cada potencia; y que algunos de los números racionales, los decimales, son aquellos que podemos escribir como sumas de agrupaciones en potencias de 10 y particiones de la unidad en potencias de 10. Observamos también, leyendo la Ecuación 1 de derecha a izquierda, que $\frac{4061}{20}$ es un número fraccionario (o racional) y, a su vez, un número decimal; y que la fracción decimal representante permite obtener inmediatamente su expresión decimal.

Tras estos comentarios, un alumno da la primera de las respuestas a la primera de las preguntas planteadas: "no, porque la división de 3 entre 7 no es exacta". Observamos también, paseando por el aula, que la mayoría de alumnos están realizando la división. Preguntamos entonces:

- ¿Qué quiere decir que una división sea exacta? ¿La división de 3 entre 8 es exacta?

Esta pregunta permite puntualizar a otro alumno: "porque la división de 3 entre 7 bajando ceros no acaba nunca". Ambas respuestas ponen de manifiesto las dificultades que tiene el alumnado para explicar qué son los números decimales. La afirmación del alumno es equivalente a que $\frac{3}{7}$ no es un número decimal, pero resulta evidente la necesidad que tiene el alumnado de realizar la división de numerador entre denominador de una fracción para decidir si ésta representa a un número decimal. Llegados a este punto preguntamos:

- ¿En qué momento aparecen los números decimales en un aula de primaria?
- ¿Qué conocimientos previos e ideas necesita el alumnado para su comprensión?
- ¿Qué contextos pueden utilizarse para su ejemplificación y utilidad?

La mayoría de respuestas, expresadas en el lenguaje de los alumnos son: "que los números decimales aparecen como resultado de divisiones no exactas y que el contexto de la medida es el adecuado para su aplicación". El diálogo deriva entonces hacia discusiones relacionadas con la contextualización, y que expondremos posteriormente. En cierto momento interviene un alumno para señalar que: "los alumnos de primaria necesitan entender la idea de parte de la unidad; décima, centésima…" parte de la unidad insistimos, e instamos a nuestros alumnos a observar la primera de las igualdades en la Ecuación 1. Destacamos aquí, como hacen los autores en (Konic, Godino y Rivas, 2010) la necesidad de ser argumentado el valor, el significado, que asume una cifra en un número decimal.

Los dos siguientes episodios de aula enlazan las respuestas del alumnado de Grado a la tarea 2 con la primera parte de la sesión de debate con el objetivo de reflexionar sobre el algoritmo de división decimal, y sobre las ideas que permiten caracterizar cuando una fracción representa un número decimal sin realizar esta división.

Recordamos en el aula que en sus previsiones de respuestas para el análisis de la tarea 2 todos ellos resuelven, correctamente, la división de 3 entre 8, utilizando el algoritmo aprendido, seguramente, en su etapa escolar de educación primaria y cuya apariencia es, salvo la aparición u omisión de ceros tras la coma en el dividendo, la que sigue:

$$\begin{array}{r|l} 3{,}000 & \underline{\;8\qquad\quad} \\ 60\; & 0{,}375 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Tras escribir la división en la pizarra y ante la petición de una expresión relacionada con este algoritmo y su escritura los alumnos de Grado nos ofrecen, entre otras equivalentes, $3 = 8\ \times\ 0{,}375$ y $\frac{3}{8} = 0{,}375 = \frac{375}{1000}$. Borramos ahora parte de la división y nos quedamos con la que aparece en Ecuación 2 planteando la misma cuestión.

$$\begin{array}{r|l} 3{,}0 & \underline{\;8\qquad\quad} \\ 6 & 0{,}3 \end{array}$$

Ecuación 2

Ahora, las respuestas no son inmediatas. Se produce en el aula el error previsible, producido por la llamada prueba de la división (entera), con la expresión $3 = 8\ \times\ 0{,}3 + 6$. Descartada la igualdad, insistimos en que razonen el significado de ese 6 que aparece en la Ecuación 2. Entonces, aparecen respuestas como $3 = 8\ \times 0{,}3 + 0{,}6$, ya tenemos la 6 décimas, que pone de manifiesto la comprensión del algoritmo; comprensión de cómo funciona y porqué funciona. Como explica un alumno: “repartir tres unidades entre 8 es lo mismo que repartir 30 décimas de la unidad entre 8”. Escribimos en la pizarra la Ecuación 3 para compararla con Ecuación 2.

$$\frac{3}{8} = \frac{30}{80} = \frac{1}{10} \times \frac{30}{8} = \frac{1}{10} \times \frac{24+6}{8} = \frac{3}{10} + \frac{6}{80}$$

Ecuación 3

Observamos que en el algoritmo de división decimal la posición de una cifra nos indica su valor posicional y que las expresiones con números fraccionarios siempre se refieren a fracciones de una unidad fijada. Así, mientras que leemos 6 décimas entre 8 en la Ecuación 2, en la Ecuación 3 leemos 6 unidades entre 80. El camino está ya abierto para interpretar la expresión:

$$\begin{array}{r|l} 3{,}00 & \underline{8\qquad\quad} \\ 60 & 0{,}37 \\ 4\; & \end{array}$$

De ella, deducimos en el aula $3 = 8\ \times 0{,}37 + 0{,}04$ y $\frac{3}{8} = \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{4}{800}$ y, finalmente:

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = 0{,}375$$

Cerramos así la reflexión sobre el procedimiento del algoritmo de división decimal, que tuvo lugar en el aula de Grado, que proporciona la expresión decimal de un número racional, para abrir el episodio que nos permitió caracterizar cuándo una fracción representa un número decimal en términos de la factorización (entera) de su denominador. Para ello mostramos la Ecuación 4 en clase.

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{3\cdot 5\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 5} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$$

Ecuación 4

Las ideas que se manifiestan en la Ecuación 4 permiten razonar a nuestros alumnos de Grado que si la factorización del denominador de la fracción en números primos solo contiene los números primos 2 y 5, entonces es un número decimal. Recíprocamente, expusimos el siguiente razonamiento que demuestra que el número racional $\frac{3}{7}$ no es un número decimal (aunque sí tenga una expresión decimal) sin la necesidad de verificar que "la división no acaba nunca": *"si fuese un número decimal lo podríamos escribir como una fracción con denominador potencia de 10; esto es, $\frac{3}{7} = \frac{\mathrm{a}}{10^{\mathrm{n}}}$ que daría lugar a la igualdad $3 \times 10^{\mathrm{n}} = 7 \times \mathrm{a}$. Pero en la factorización de 10, y por tanto en la de cualquier potencia de 10 no aparece el 7 por lo que la igualdad de fracciones que hemos escrito no puede existir y queda demostrado que $\frac{3}{7}$ no es un numero decimal."*

El anterior argumento muestra, de manera sencilla y clara, a nuestro alumnado de Grado la razón por la que las fracciones que representan números decimales son, únicamente, aquellas que admiten como fracción representante irreducible una fracción cuyo denominador solo contiene los primos 2 y 5 en su factorización. Así mismo, les permitirá generalizar el anterior argumento para la demostración de este hecho. Coincidimos con Llinares (2011) en que la comprensión de los conceptos matemáticos y de sus relaciones es necesaria para poder realizar de manera competente el análisis de las tareas matemáticas y que la discusión de resultados como el ofrecido contribuye a ello.

Finalizamos esta sección con uno de los episodios del diálogo mantenido en el aula de Grado en torno a la contextualización de los números decimales en el aula de primaria. La mayoría de alumnos escoge, acertadamente, como situación de la vida real para mostrar el uso o necesidad de los conceptos y procedimientos utilizados al hallar el valor numérico de $\frac{3}{8}$, la de reparto; así el alumnado ofrece respuestas como: "repartir 3 kilogramos de caramelos entre 8 amigos" y comentarios como: "repartir 3 kilogramos de caramelos entre 8 amigos es lo mismo que repartir 3000 gramos de caramelos entre 8 amigos" y observan que: "podemos resolver sin decimales obteniendo 375 gramos de caramelos" para concluir: "0,375 kilogramos de caramelos". En este momento nos pareció interesante traducir estas expresiones al lenguaje de fracciones; con esta intención escribimos en la pizarra:

$$\frac{3}{8} \qquad \frac{3000}{8}$$

Y, preguntamos si podemos escribir una igualdad entre las dos fracciones. La respuesta es contundente, un no que se apoya en el distinto valor numérico. Preguntamos si pueden escribir la expresión "repartir 3 kilogramos de caramelos entre 8 amigos es lo mismo que repartir 3000 gramos de caramelos entre 8 amigos" utilizando una ecuación que contenga las dos fracciones escritas en la pizarra. Esperamos respuestas del tipo:

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{1000} \times \frac{3000}{8}$$

Ecuación 5

$$1000 \times \frac{3}{8} = \frac{3000}{8}$$

Ecuación 6

Sin embargo, nos ofrecen $\frac{3}{8}\ kilos = \frac{3000}{8}\ gramos$. La respuesta es totalmente correcta y nos permite insistir, como pretendíamos al plantear las cuestiones en este episodio, en que si no especificamos la unidad, las fracciones que aparecen en un texto se refieren todas a una unidad fijada. Así, en la situación particular del ejemplo, las fracciones de Ecuación 5 son fracciones de kilogramo mientras que las de Ecuación 6 son fracciones de gramo.

5. Reflexiones y conclusiones

Son diversos los aspectos que deben tenerse en cuenta para definir y valorar el conocimiento del docente para el buen ejercicio de la profesión de la enseñanza. El conocimiento matemático del maestro proporciona, en particular, los recursos necesarios para considerar las expectativas de cómo los alumnos de primaria pueden interpretar matemáticamente una actividad cognitivamente exigente, prever el conjunto de estrategias que pueden usar en su resolución, y para establecer relaciones de las interpretaciones y estrategias con los conceptos matemáticos, las representaciones y los procedimientos que el maestro quiere que sus alumnos aprendan. Este conocimiento capacita al maestro para distinguir de entre las actividades matemáticas, aquellas que promueven el pensamiento y razonamiento matemático del alumnado de primaria.

El presente trabajo se ocupa del conocimiento matemático del futuro maestro y utiliza, como herramienta para observar este conocimiento, las respuestas a una actividad propuesta en un cuarto curso de Grado de Maestro de Primaria. El análisis de las producciones de los alumnos de Grado en torno a una tarea matemática concreta, diseñada para el alumnado de Educación Primaria, permite determinar el conocimiento personal del alumnado de Grado, detectar el conocimiento común y específico respecto a los conceptos involucrados en la tarea, así como el conocimiento en relación al alumnado de Educación Primaria. A su vez, este análisis, permite profundizar en las ideas que proporcionan un buen conocimiento, más amplio que el propio de Educación Primaria, de un contenido matemático específico y desarrollar el conocimiento pedagógico del mismo.

Bibliografía

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Guzmán, M. de (1989). Tendencias actuales de la enseñanza matemática. *Studia Pedagógica. Revista de Ciencias de la Educación,* 21, 19-26. Recuperado de: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/

Hill H. C., Ball D. L., & Schilling S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39 (4), 372-400.

Konic, P. M., Godino J. D., & Rivas M. A., (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 74, 57-74.

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestro. Caracterizando perspectivas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 78, 5-16.

Shulman L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15 (2), 4-14.

Smith M. S., & Stein, M.K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 3, 344-350.

Stein M. K., Smith, M. S., Henningen M. A., y Silver E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for Professional Development*. New York: Teachers College.

Smith, M.S., Stein, M.K., Arbaugh, F., Brown, C.A., y Mossgrove, J. (2004). Characterizing the cognitive demands of mathematical tasks: A sorting task. En G.W. Bright and R.N. Rubenstein (Eds.) *Professional development guidebook for perspectives on the teaching of mathematics,* 45-72. Reston, VA: NCTM.

Tere Cortadellas Benítez, licenciada y doctora en matemáticas por la Universidad de Barcelona (UB). Ha trabajado en el Departamento de Álgebra y Geometría de la UB. Actualmente es profesora asociada del Departamento de Didáctica de la Ciencias Experimentales y de la Matemática de la UB y el de Economía y Empresa de la Universidad Pompeu Fabra. Ha publicado artículos en el área de álgebra conmutativa y actualmente está ampliando sus líneas de investigación en el campo de la Didáctica de la Matemática.