GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA, ¿SÓLO UNA TEORÍA MATEMÁTICA MÁS?

Juan Carlos Marrero González

La geometría simpléctica es hoy día uno de los campos activos de investigación en matemáticas pero, ¿es sólo una disciplina matemática más? A lo largo de estas líneas intentaremos dar, modestamente y en la medida de lo posible, argumentos que sugieran al lector una respuesta a esta cuestión.

El término simpléctico viene del griego *symplektikos* que significa "que entrelaza" o "que une". Este nombre fue usado por primera vez en 1939 por H. Weyl. En cualquier caso, el origen de la geometría simpléctica habría que buscarlo en el siglo XIX con los trabajos de Lagrange sobre mecánica analítica. De todas formas, durante el siglo XIX la naturaleza geométrica y cualitativa de la mecánica no estaba nada clara. Fue Poincaré, a principios del siglo XX, quien inicia la era cualitativa con el estudio de las órbitas en el problema de los n-cuerpos. Después de Poincaré, las técnicas simplécticas empiezan a ser usadas y la geometría simpléctica va avanzando de manera que en los años 60 está consolidada como una rama de las matemáticas y el nexo de unión con la mecánica ha sido definitivamente establecido. Finalmente, en los últimos 30 años, un crecimiento espectacular de las investigaciones ha convertido a la geometría simpléctica en una de las producciones matemáticas y físicas más importantes del siglo XX.

De forma elemental, podríamos decir que la geometría simpléctica es *la geometría de las áreas orientadas.* A continuación, intentaremos justificar esta afirmación de una manera intuitiva. Comencemos con el ejemplo más sencillo: el plano $\mathbb{R}^2$. La forma simpléctica usual Ω del plano $\mathbb{R}^2$ es un objeto matemático que a un par de vectores $\overline{u} = (u_1, u_2)$ y $\overline{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ les asocia el área orientada del paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ generado por los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$, esto es, $\Omega(u,v) = u_1v_2 - u_2v_1$. Ω es antisimétrica y no degenerada en el sentido de que las únicas áreas nulas resultan cuando $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son colineales. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores uno puede construir, de manera sencilla, una forma simpléctica lineal sobre $\mathbb{R}^{2n}$ (una aplicación ω: $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-bilineal, antisimétrica y no degenerada). Es suficiente ver a $\mathbb{R}^{2n}$ como el producto de planos $\mathbb{R}^2 x ... x\, \mathbb{R}^2$. Entonces el área orientada de un paralelogramo es la suma de las áreas orientadas de sus proyecciones sobre cada uno de estos planos. Sin embargo, no es posible definir un concepto de área orientada sobre un espacio de dimensión impar como $\mathbb{R}^3$ sin introducir degeneraciones. De la discusión anterior se deduce que sólo los espacios de dimensión par son los candidatos que pueden admitir una forma simpléctica. Parece entonces lógico que además de $\mathbb{R}^{2n}$, otros posibles espacios simplécticos sean las variedades diferenciables de dimensión par. Las variedades diferencia-

17

bles son espacios muy interesantes desde el punto de vista matemático y físico que engloban a los espacios euclídeos y que constituyen una generalización natural (para dimensión mayor que dos) de las superficies en $\mathbb{R}^3$. Aquí, por razones obvias, consideraremos un ejemplo muy simple. Se trata de una superficie en $\mathbb{R}^3$, la esfera $\mathbf{S}^2$ de radio unidad. Es obvio que la forma de medir áreas en el plano $\mathbb{R}^2$ y en la esfera $\mathbf{S}^2$ no coinciden. Así, el área de un círculo C de radio r en el plano es $\pi\ r^2$. Sin embargo, si aplicamos C sobre $\mathbf{S}^2$, el área del círculo resultante, para r pequeño, es $\pi\ \mathrm{sen}^2 r = \pi\ [r^2 - (1/3)\, r^4 + \ldots]$. Estas diferencias en el cálculo de las áreas se deben a que R^2 y $\mathbf{S}^2$ son variedades simplécticas diferentes. Si [, ,] denota el producto mixto o triple en $\mathbf{S}^2$, la forma simpléctica w en $\mathbf{S}^2$ está definida por $w_x\ (u, v) = [x, u, v]$, para x un punto de $\mathbf{S}^2$ y u, v vectores del plano tangente a $\mathbf{S}^2$ en x. En esta definición de ω se ponen de manifiesto algunos hechos: (i) la dependencia *suave* de w del punto de aplicación; (ii) la restricción de w al plano tangente de $\mathbf{S}^2$ en un punto x ($\mathbb{R}^2$) es una forma simpléctica lineal. Así, uno podría pensar que para definir una forma simpléctica sobre una variedad de dimensión par se puede proceder de forma similar que en $\mathbf{S}^2$ (reemplazando el plano tangente a $\mathbf{S}^2$ en x por el espacio tangente a la variedad en cada uno de sus puntos). Pero hay una restricción esencial en dimensión mayor que dos: la suma de las áreas orientadas de superficies que bordean no importa qué región cerrada (compacta) de dimensión 3, debe ser nula. Esta restricción es la causante de la existencia de variedades diferenciables de dimensión par que no admiten estructuras simplécticas. Además, ha originado la aparición relativamente reciente de una nueva disciplina matemática (*la topología simpléctica)*
17 sobre la cual giran las investigaciones de algunos matemáticos de primera línea. Grosso modo, se trata de investigar qué tipos de variedades de dimensión par admiten una estructura simpléctica.

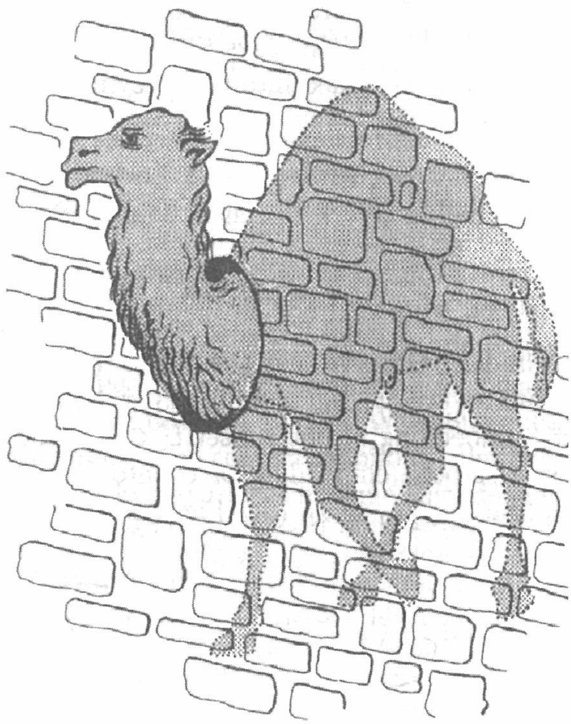
Un aspecto importante en el mundo simpléctico es el estudio de las transformaciones simplécticas, es decir, las aplicaciones entre variedades simplécticas que conservan áreas orientadas. Es un hecho familiar, usado frecuentemente en cartografía, que un entorno suficientemente pequeño de un punto de la esfera puede aplicarse sobre un entorno de un punto del plano sin que se distorsionen las áreas. En consecuencia, la esfera y el plano como variedades simplécticas son localmente (no globalmente) iguales. Este resultado es general para dos variedades simplécticas de la misma dimensión y es justamente lo que establece el *teorema de Darboux*. El estudio de las transformaciones simplécticas también ha supuesto la introducción de algunos problemas famosos, como el del *Camello simpléctico.* Se trata de ver si seríamos capaces de pasar un *camello* a través del *ojo de una aguja* sin distorsionar las áreas (la geometría simpléctica ha dado una respuesta negativa a este problema).

Hasta ahora hemos comentado algunos aspectos relacionados directamente con la geometría (topología) simpléctica. Pero, en realidad, en los últimos 20 o 30 años la geometría simpléctica ha estado relacionada directa o indirectamente con diversas ramas de las matemáticas. Una prueba de ello es que a finales de los 80 surge una corriente de pensamiento (véase

[Ar]) que sugiere que la mayor parte de las matemáticas debían reformularse en términos simplécticos (*la simplectificación de las matemáticas*).

Por otra parte, teniendo en cuenta sus orígenes, sería injusto no hacer al menos un breve comentario sobre algunos de los diferentes contextos en mecánica donde las estructuras simplécticas juegan (directa o indirectamente) un papel importante.

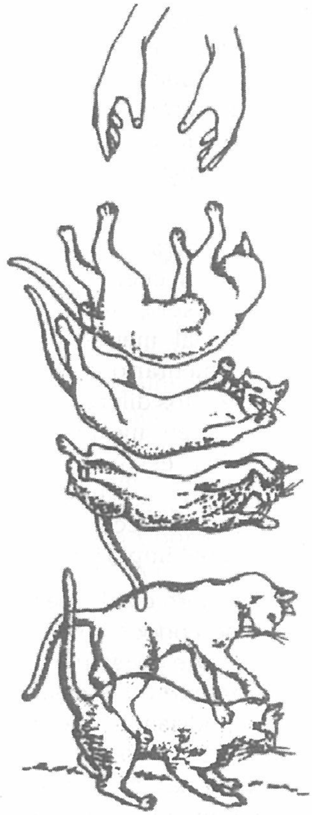
El primero de ellos es lo que se conoce con el nombre de *mecánica hamiltoniana*. Grosso modo, podríamos decir que la Mecánica Hamiltoniana es el estudio del movimiento de un objeto sometido a diferentes fuerzas. Uno puede imaginar que este movimiento es similar al del flujo de un fluido. Pero el flujo de un fluido tiene una peculiaridad interesante: las áreas de *trozos de fluido de dimensión 2* se conservan cuando se mueven a lo largo del fluido. Así, si las áreas se conservan, debe existir una forma simpléctica en el espacio de fases (el espacio donde se desarrolla la dinámica). Deducimos entonces un hecho que tiene consecuencias importantes: el espacio de fases es una variedad simpléctica.



El camello simpléctico.

17

En algunas ocasiones, el cálculo explícito de las trayectorias de un sistema mecánico puede ser una tarea altamente complicada. El problema matemático consiste en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, es posible reducir el mismo y obtener un sistema más simple. La determinación de las soluciones del sistema reducido nos proporciona información sobre las soluciones del sistema original. En estos procedimientos de reducción las estructuras simplécticas juegan un papel importante. Un ejemplo sencillo donde estos procedimientos pueden ser aplicados es el movimiento de un cuerpo rígido. Pero las estructuras simplécticas pueden usarse también para prever el comportamiento de sistemas complicados. Un caso extremadamente curioso en este contexto es el *gato de Yang-Mills*: usando técnicas simplécticas relativamente complicadas uno puede justificar matemáticamente por qué un gato cuando cae desde una cierta altura siempre aterriza con las patas. Así que la expresión "siete vidas tiene un gato" tiene una explicación puramente científica.



El *gato de Yang-Mills*

Otro contexto donde las estructuras simplécticas (y sus generalizaciones) juegan un papel importante es en la descripción geométrico-diferencial de los sistemas mecánicos con ligaduras. Hablando sin rigor, un sistema con ligaduras es aquél para el que el movimiento no está perfectamente determinado o está, de antemano, sujeto a algunas condiciones adicionales. Un ejemplo típico de sistema mecánico con ligaduras es el de un disco vertical rodando sin deslizamiento sobre un plano.

Aparte de en la mecánica clásica, las técnicas simplécticas son usadas en otras ramas de la física (mecánica cuántica, óptica, termodinámica, teorías de integrabilidad, caos, dinámica de satélites...). En definitiva, por el lugar que ocupa dentro de las matemáticas y por su fructífera relación con otras ciencias, en particular con la física, me atre-
17 vo a opinar que la geometría simpléctica es hoy algo más que una teoría matemática.

Bibliografía

Arnold, V. I.: *Teoría de Catástrofe*. Alianza, Madrid, 1987.

Gotay, M. J., Isenberg, J. A.: "La symplectification de la science", *Gazette des Mathematiciens* 54 (1992), pp. 59-79.

[Deseo agradecer al Prof. Raúl Ibáñez de la Universidad del País Vasco el haberme hecho llegar esta última referencia].