Recibido: martes, 04 diciembre 2007

cultura ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 3, nos. 4-5 (oct.-dic. 2007)

Nuevas esculturas para visualizar superficies cúbicas

Carmen Perea
Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática
Universidad Miguel Hernández de Elche
e-mail: perea@umh.es

Irene Polo-Blanco
Universidad de Cantabria
e-mail: poloi@unican.es

Cayetano Ramírez
e-mail: tano@hcsoft.net
página web: http://obratano.da.ru

Modelos de superficies cúbicas a lo largo de la historia

A partir de que Arthur Cayley y George Salmon probaron en 1849 que toda superficie cúbica suave contiene 27 rectas sobre los números complejos, el interés por parte de los matemáticos en la geometría algebraica creció enormemente en Europa. Se entiende por *superficie cúbica suave* el conjunto de ceros de un polinomio de grado tres en el espacio proyectivo que no contenga singularidades. Un ejemplo de dicha superficie, donde las 27 rectas son además reales, viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0,$$
$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Dicha superficie fue descubierta por Alfred Clebsch en 1871 [1]. Debido a la aparición progresiva de otras muchas superficies, los matemáticos se vieron en la necesidad de visualizarlas para estudiar sus propiedades, surgiendo así la construcción de modelos. El mismo Clebsch mandó construir en 1872 un modelo de escayola de la superficie mencionada anteriormente (Figura 1) ilustrando las 27 rectas (nótese que, al ser las 27 reales, éstas pueden ser representadas en un modelo).

Figura 1. Modelo de la superficie de Clebsch, por Adolf Weiler (1872).

El caso de las superficies cúbicas con singularidades fue considerado por Ludwig Schlafli y A. Cayley, quienes las clasificaron en 20 tipos en 1863 y 1869, respectivamente. Posteriormente, Carl Rodenberg presentó en su tesis en 1878 otro tipo de clasificación de estas superficies construyendo modelos para ilustrar cada tipo de singularidad. Su director de tesis, Felix Klein, fue el principal promotor de la producción y distribución de modelos matemáticos con propósito educativo en Alemania a finales del siglo XIX y principios del XX. Además, junto con el matemático Alexander von Brill fundó la compañía Brill-Schilling (que tuvo lugar desde 1888 hasta 1935), responsable de distribuir copias de los modelos por universidades, museos y escuelas en Europa. Colecciones de dichos modelos pueden encontrarse actualmente en varias universidades europeas. Una recopilación de fotos y explicaciones matemáticas de varias de estas colecciones puede encontrarse en [2]. La colección de la Universidad de Groningen (Holanda) ha sido también objeto de estudio en la tesis de Irene Polo-Blanco [3]. Parte de la serie dedicada a las superficies cúbicas de dicha colección se muestra en la Figura 2.

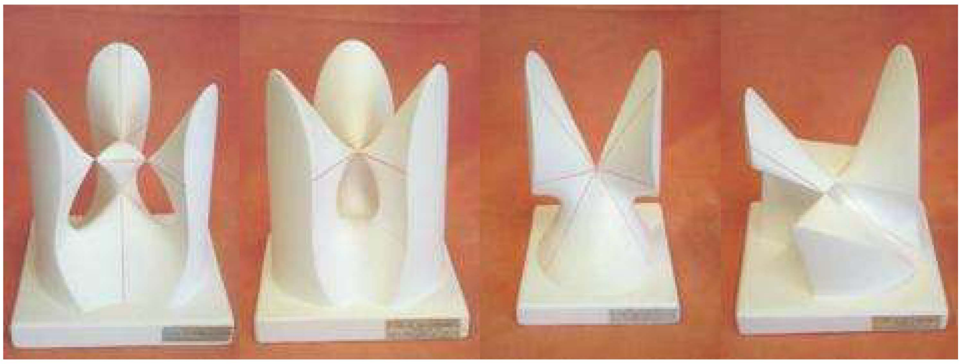


Figura 2. Superficies cúbicas con singularidades. Serie VII, catálogo Schilling.
(Inventario de la Universidad de Groningen).

Aunque estos modelos dejaron de construirse a partir de 1935, actualmente, gracias al desarrollo de software de visualización, se pueden representar fácilmente las superficies. Estas representaciones por ordenador, a diferencia de los modelos sólidos de escayola, permiten mostrar la superficie matemática exacta. Por ejemplo, la superficie de Clebsch contiene siete pasajes (o agujeros), de los cuales sólo tres aparecen en el modelo de escayola (pues el interior del modelo está relleno para conseguir una estructura sólida). A continuación mostramos una representación usando el software POV-Ray junto con el modelo de escayola. Los cuatro pasajes que no se pueden apreciar en el modelo aparecen indicados con flechas en la Figura 3.

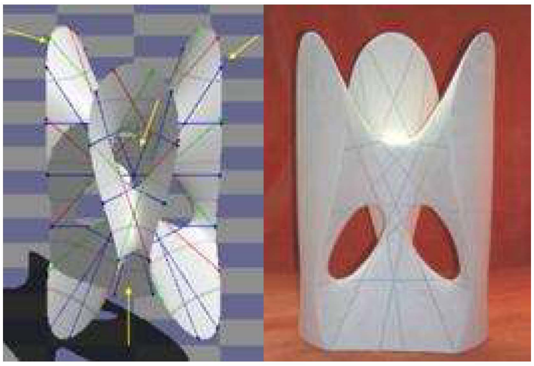


Figura 3. Izquierda: representación de la superficie de Clebsch en POV-Ray.
Derecha: modelo de la superficie de Clebsch en escayola por Cayetano Ramírez (2005).

Muchas de las colecciones de modelos vendidas por estas compañías se conservan hoy en día, no tanto quizás por su valor didáctico sino, sobre todo, por su belleza artística. Además, podemos encontrar otros ejemplos más recientes de construcción de esculturas o modelos de superficies cúbicas. Concretamente, el matrimonio Claudia Carola Weber y Ulrich Forster construyeron, con motivo del 150 aniversario del nacimiento de Klein, una escultura de barro cocido de la superficie de Clebsch, actualmente situada en la cafetería de la Universidad de Düsseldorf. Posteriormente, Oliver Labs y Johnatan Chertok realizaron la serie de Rodenberg en escayola utilizando una impresora 3D (Figura 4).

Figura 4. Izquierda: modelo de barro de la superficie de Clebsch
(Universidad de Dusseldorf). Derecha: serie de Rodenberg con impresoras 3D.

Nueva generación de modelos de superficies cúbicas

En la primavera de 2005, a raíz de que el escultor Cayetano Ramírez restaurara los modelos de escayola de la colección de la Universidad de Groningen, surgió la idea de realizar otros modelos con una técnica y material diferentes, con el fin de que se pudiera representar la superficie matemática exacta. El resultado se presenta en detalle a continuación donde describimos el proceso de creación, desde la técnica utilizada en las representaciones por ordenador hasta la obtención de las esculturas finales.

Proceso de creación artística

El software utilizado para la representación es POV-Ray. Después de seleccionar tres superficies de la serie de Rodenberg, se representaron utilizando este programa como se ve en la Figura 5.

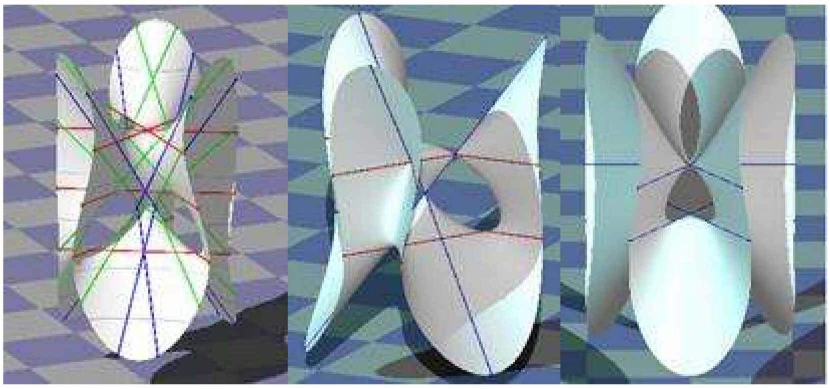


Figura 5. Tres superficies cúbicas en POV-Ray.

La superficie de la izquierda es la *superficie de Clebsch* con sus 27 rectas. La superficie del centro, conocida como *superficie de Cayley*, contiene 4 puntos singulares A_1 (el máximo posible en una superficie cúbica) y 9 rectas. Finalmente, la superficie de la derecha muestra un tipo de singularidad D_4 y contiene 6 rectas.

Además, se dibujaron distintas secciones de cada modelo así como sus respectivos bordes, resultado de intersecar la superficie con un cilindro (ver Figura 6).

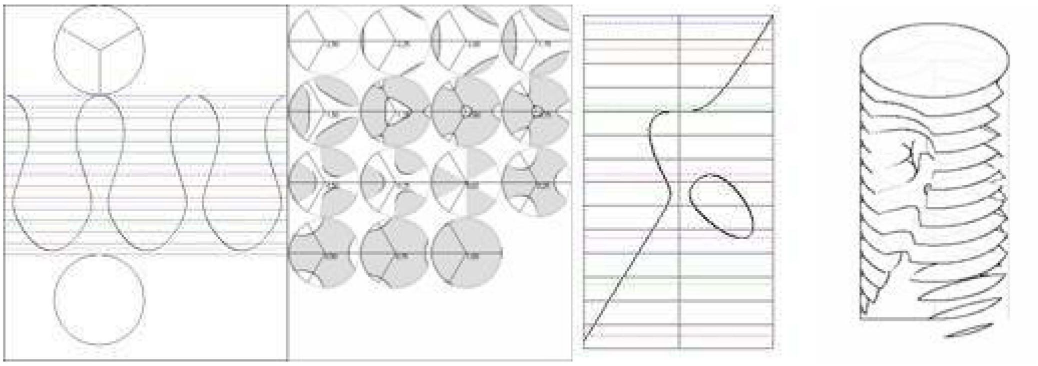


Figura 6. Planos de la superficie de Clebsch.

Utilizando estos planos, se construyeron patrones de madera a tamaño natural que ayudarían al escultor durante el proceso de creación. La realización de la figura comienza con un cilindro de poliespan que se va modelando hasta obtener el modelo deseado (ver Figura 7).

Figura 7. Proceso de creación artística del modelo.

Posteriormente, se recubrió la figura de poliespan con una capa muy fina de resina líquida (Figura 8) y fibra de vidrio. Sobre ésta, con el fin de representar las rectas contenidas en cada superficie, se superpusieron hilos de colores.

Figura 8. Modelos de poliespan de las tres superficies cúbicas.

Al destruir el interior de poliespan se obtuvo la escultura final, que se muestra en la Figura 9.

Figura 9. Esculturas finales de las tres superficies cúbicas.

Referencias

[1] A. Clebsch: Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5ten Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits. *Math. Ann*. 4 (1871), pp. 284-345.

[2] G. Fischer: *Mathematische Modelle / Mathematical Model.* Vieweg, 1986. Bildband, Kommentarband.

[3] I. Polo-Blanco: *Theory and History of Geometric Models*. Tesis Doctoral, Universidad de Groningen, 2007.

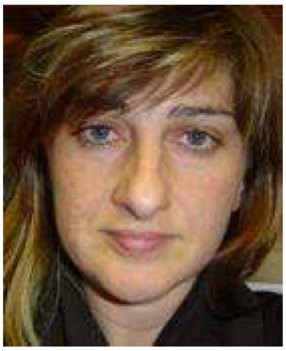
[4] C. Rodenberg: *Zur Classification der Flächen dritter Ordnung.* Math. Ann. 14 (1879).

[5] L. Schläfli: *On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species.* En Reference to the Presence or Absence of Singular Points and the Reality of their Lines. *Philos. Trans. Royal Soc.* CLIII (1863), 193-241.

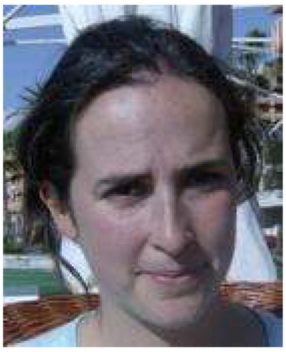
Sobre el escultor

Cayetano Ramírez nació en 1968. Vive en Abanilla, provincia de Murcia. Ha realizado esculturas en diferentes materiales como piedra natural, piedra artificial, escayola, bronce, resina, etc., aunque reconoce tener predilección por la piedra natural. En el año 2002 comenzó utilizando las matemáticas como una herramienta para realizar la serie *Caracoles fósiles*. Tras ocuparse de la restauración de la colección de modelos matemáticos de la Universidad de Groningen (Holanda) y realizar una superficie de Clebsch para la misma universidad en el año 2005, ha creado diferentes esculturas matemáticas en las que el arte ha pasado de ser el fin a ser la herramienta. Para más información sobre la obra en general del artista, véase su página personal.

Sobre las autoras



Mari Carmen Perea Marco es licenciada en Matemáticas por la Universidad de Valencia y doctora en Matemáticas por la Universidad de Alicante. Actualmente es profesora titular de Escuela Universitaria del Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática de la Universidad Miguel Hernández de Elche. Su actividad investigadora se desarrolla en el campo del Álgebra Lineal en general y, concretamente, en la aplicación de la teoría de control a los códigos convolucionales. Además de contar con varias publicaciones en este campo en revistas internacionales, ha escrito artículos de educación y divulgación matemática.



Irene Polo-Blanco es licenciada en Matemáticas por las Universidades del País Vasco y Groningen (Holanda) y doctora en Matemáticas por esta última universidad. Escribió su tesis bajo la dirección de Marius van der Put, Jaap Top y Jan van Maanen sobre el tema *Modelos de superficies algebraicas*, donde combina los ámbitos de la geometría algebraica y la historia de las matemáticas. Es autora de varios artículos en revistas internacionales y *proceedings*. Ha participado en numerosos congresos internacionales, entre los que se encuentran: Research in Progress (Oxford, 2005), ICM (Madrid, 2006), Novembertagung (Paris, 2006) y Bridges (Londres, 2006). Actualmente se encuentra trabajando para la Universidad de Cantabria.