NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 94, marzo de 2017, páginas 47-69

Nueva concepción del teorema de Pitágoras, más allá de los cuadrados. Trayectoria de aprendizaje analizada a partir de una organización cognitiva

Diana Isabel Quintero-Suica (Universidad Pedagógica Nacional. Colombia)
Natalia Valderrama Ramírez (Universidad Santo Tomás. Colombia)

Fecha de recepción: 18 de junio de 2016
Fecha de aceptación: 23 de febrero de 2017

Resumen El presente trabajo damos continuidad a nuestra propuesta de enseñanza sobre la generalización de una de las proposiciones más famosas de la Matemática: el teorema de Pitágoras. En dicho trabajo se propone una secuencia de actividades, atendiendo al tratamiento que presenta Euclides para este tema en *Elementos*, pretendiendo así contribuir con el desarrollo de un pensamiento cuantitativo no numérico. Posterior a la puesta en práctica, describimos algunos indicadores basados en la organización cognitiva del conocimiento matemático y las taxonomías SOLO, que nos permitiera detallar de forma cualitativa el razonamiento de los aprendices. Ilustrar la construcción de tales indicadores y el análisis de las evidencias con base en estos, se configura en el propósito de este documento.

Palabras clave Teorema de Pitágoras, conocimiento conceptual, conocimiento procedimental, taxonomías SOLO.

Title **New conception of the Pythagorean theorem, beyond the squares. Trajectory of learning analyzed from a cognitive organization**

Abstract The present work gives continuity to our teaching proposal on the generalization of one of the most famous propositions of mathematics: the Pythagorean theorem. In this work, we propose a sequence of activities, according to the treatment presented by *Euclid* for this theme in Elements, aiming to contribute to the development of quantitative non-numerical thinking. After the implementation, we described some indicators based on the cognitive organization of mathematical knowledge and SOLO taxonomy, which would allow us to qualitatively detail the reasoning of the apprentices. To illustrate the construction of such indicators and the analysis of the evidence based on these is configured in the purpose of this document.

Keywords Pythagorean theorem, conceptual knowledge, procedural knowledge, SOLO taxonomy

1. Introducción

El Teorema de Pitágoras se concibe, en el libro *Elementos*, como un mecanismo para la adición de magnitudes superficiales de cualquier tipo. Esta perspectiva, poco abordada en la enseñanza de la Matemática en la educación básica y media, se encara con los estudiantes de un curso de grado décimo del Colegio Técnico Comercial Manuela Beltrán (Bogotá-Colombia), cuyas edades se encuentran entre los 15 – 17 años. La implementación se lleva a cabo a través de una secuencia de tareas, de la cual generamos un referente constituido por indicadores de análisis, por medio de la implementación de una secuencia de tareas. Como producto de dicha implementación generamos un referente constituido por indicadores de análisis, que permiten describir cualitativamente los aprendizajes de los aprendices al resolver las actividades.

Para construir tal referente e indicadores de análisis, inicialmente, tomamos como referencia los dos campos del conocimiento matemático que plantea Rico (1997) (el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental), para luego hacer un paralelo entre el conocimiento procedimental (los razonamientos, específicamente) y la clasificación de los aprendizajes descrita en las taxonomías SOLO (*Structure Observed Learning Outcomes*), sugeridas por Biggs y Collis (1982), con los cuales se construyen los indicadores de análisis para las producciones de los aprendices. Seguido de esto, llevamos a cabo un análisis de actuación[1] contrastando los indicadores establecidos y las evidencias disponibles del trabajo, explicitando las observaciones que consideramos pertinentes.

2. Construcción del referente para el análisis de las evidencias

La elaboración del marco conceptual toma como referencia un marco teórico que contempla los campos de conocimiento de Rico (1997) y este se complementa en un punto específico con un segundo marco teórico dado por la taxonomía SOLO propuesta por Biggs y Collis (1982). Esto permite generar una visión más amplia del aprendizaje al ser este evaluado desde una perspectiva bidimensional y servirá para la determinación de los indicadores, con base en los cuales llevamos a cabo el análisis de las evidencias sobre el trabajo hecho por los aprendices que desarrollaron las actividades propuestas.

Tomamos como referencia para argumentar nuestra propuesta otras investigaciones en esta misma línea las cuales han presentado la elaboración de marcos conceptuales desde la intersección de dos o más marcos teóricos determinados, con el fin de generar relaciones que permitan evaluar el aprendizaje. Huertas (1997) por ejemplo, presenta un marco conceptual tridimensional a partir de los marcos teóricos dados por el Modelo de Van Hiele, la taxonomía de SOLO y los mapas conceptuales y desarrolla métodos independientes para evaluar a los estudiantes, ampliando la visión del aprendizaje. Cada marco teórico es representado en un eje del plano *x*, *y*, *z*, y mide aspectos distintos del aprendizaje determinando tres planos (XY, YZ y XZ) que razonablemente están relacionados y generan criterios más específicos para medir el aprendizaje. Así mismo en Huertas (1999) se especifica el método utilizado para evaluar el plano XY, las relaciones y conclusiones de análisis comparado entre los dos marcos teóricos involucrados.

Para nuestro caso seguiremos esta línea para proponer el marco conceptual bidimensional en el que, como ya se dijo, contamos con los marcos teóricos de los campos conceptuales y la taxonomía SOLO, sin embargo, se tienen algunas discrepancias en el método como estos se relacionan dado que el segundo marco teórico complementa el primero, por lo que no es posible representarse en ejes ni generar un plano (completo) de relaciones entre los dos. En el siguiente apartado se explicitan las generalidades de cada marco teórico y posteriormente se muestra el método usado para complementarse y generar las relaciones.

[1] Entendemos este análisis desde la perspectiva de Gómez (2006)

2.1. Generalidades de la propuesta de enseñanza

Antes de iniciar con el detalle de la construcción del referente que nos permitirá llevar a cabo el análisis, creemos pertinente ilustrar al lector sobre las generalidades de la propuesta que construimos, la cual se precisa en "autores" Quintero-Suica y Valderrama (2015-b). Para llevar a cabo esta empresa, asumimos al experimento de enseñanza como orientador de la actividad en el aula. Esto nos conduce a la construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje[2], la cual comporta la determinación de un objetivo de aprendizaje, las tareas que promoverán el aprendizaje de los conceptos matemáticos de interés, y la hipótesis sobre el aprendizaje de tales conceptos. Así, claramente, asumimos el rol de docentes y de investigadoras a la vez, lo que redunda en la modificación de la secuencia de enseñanza de acuerdo con las producciones de los estudiantes.

Teniendo en cuenta los aspectos que acabamos de señalar, definimos los objetivos de enseñanza. Uno de estos, pretende conducir a los aprendices a conjeturar y verificar el teorema de Pitágoras, inicialmente con superficies cuadradas (el cual es el caso usual en esta proposición), para luego ampliar tal conjetura y verificarla para cualquier polígono. Por último, las tareas conducen a los aprendices a generalizar tal teorema para superficies con simetría axial, e incluso sin algún tipo de simetría.

Toda vez que definimos los aspectos metodológicos y los objetivos que orientan el trabajo de la clase, construimos la secuencia de tareas, el cual se divide, *grosso modo*, en tres momentos específicos de la propuesta. Tales momentos los describimos a continuación, presentando las preguntas orientadoras en cada caso:

Primer momento: En este momento pretendemos que se efectúe una comparación entre superficies cuadradas con material concreto. Esta comparación debe producir la asociación de la suma de dos cantidades de superficie cuadradas determinadas con una tercera cantidad del mismo tipo. Las tareas de este primer momento se ilustran en la Tabla 1.

Primera tarea	Segunda tarea	Tercera tarea	Cuarta tarea
Tome los cuadrados nombrados cada uno con los literales A y B. Encuentre un cuadrado entre las opciones C, D y F tal que la cantidad de superficie de este último cuadrado represente la suma de las cantidades de superficie de los cuadrados A y B. Indique su respuesta y explique ¿cuáles fueron sus estrategias para elegir una de las opciones y descartar las otras dos?	Tome ahora los cuadrados nombrados con los numerales 1 y 2. Nuevamente, encuentre un cuadrado entre las opciones 3, 4 y 5 tal que la cantidad de superficie de este último cuadrado represente la suma de las cantidades de superficie de los cuadrados 1 y 2. Indique su respuesta y explique ¿cuáles fueron sus estrategias para elegir una de las opciones y descartar las otras dos?	Dados dos cuadrados cualesquiera, explique cómo obtener un tercer cuadrado de tal forma que la cantidad de superficie del tercero represente exactamente las cantidades de superficie de los dos primeros, sumadas.	En el caso anterior considere tener el tercer cuadrado y uno de los dos iniciales ¿cómo puede construir el segundo cuadrado de tal forma que al sumar su cantidad de superficie con el primero sea posible obtener el tercero?

Tabla 1. Tareas propuestas para el primer momento de la secuencia de tareas

[2] Concebida como una herramienta de planificación de la actividad en el aula, en la que se tiene en cuenta el conocimiento actual de los estudiantes, para la formulación de tareas matemáticas que modifiquen tal conocimiento (Simon, 1995; Simon y Tzur, 2004)

Segundo momento: Se conduce a que los aprendices verifiquen el teorema de Pitágoras para cualesquiera tres superficies poligonales a partir de la construcción realizada con material concreto y, posteriormente, con el apoyo del programa Geogebra; expresando en lenguaje simbólico-algebraico, paralelamente, las verificaciones hechas. Las preguntas orientadoras de este momento las ilustramos en la Tabla 2.

- ¿Se cumple el teorema de Pitágoras para ternas de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos? ¿Cómo lo comprobó? Justifique su respuesta.
- Al hacer uso del lenguaje algebraico, el enunciado del teorema de Pitágoras utilizando cuadrados se simboliza como sigue: $a^2 + b^2 = c^2$, donde a, b representa la medida del lado de los cuadrados dispuestos en los catetos del triángulo rectángulo; c representa la medida del lado del cuadrado dispuesto en la hipotenusa; y a^2, b^2 y c^2 representan el área de cada uno de los cuadrados. Escriba ahora el enunciado en lenguaje algebraico equivalente al mismo teorema, pero cuando este hace uso de una terna de triángulos cualquiera.
- Compruebe la conjetura acerca de la validez del teorema de Pitágoras para cualquier otro polígono, como por ejemplo pentágonos, hexágonos, etc.
- Si la conjetura es válida para otros polígonos, exprese en lenguaje algebraico el teorema de Pitágoras de acuerdo con los polígonos que haya utilizado.

Tabla 2. Preguntas orientadoras para el segundo momento de la secuencia de tareas

Tercer momento: A partir de la generalización con polígonos, buscamos que los aprendices expresen, con apoyo del lenguaje simbólico-algebraico, la generalización del teorema para superficies con simetría axial para luego, expresarlo nuevamente de tal forma que se amplíe la proposición a superficies que no posean simetría alguna. Esta generalización se lleva a cabo por medio de la visualización sobre construcciones robustas hechas previamente en Geogebra por las docentes investigadoras. En la Tabla 3 ilustramos las preguntas orientadoras de este momento.

- ¿Funciona el teorema de Pitágoras para semicircunferencias? Compruebe con ayuda de software matemático y justifique su respuesta.
- En caso de que el ítem anterior sea cierto ¿Cuál es el enunciado en lenguaje algebraico del teorema de Pitágoras cuando se utiliza una terna de semicircunferencias?
- Enuncie una expresión general del teorema de Pitágoras teniendo en cuenta nuevas formas geométricas y verifíquelo por medio del software matemático.

Tabla 3. Preguntas orientadoras para el tercer momento de la secuencia de tareas

Estas tres etapas conducen al alcance del objetivo de enseñanza propuesto y proveen el sustento para la estructuración de las instrucciones específicas que realizan los aprendices.

Ahora bien, luego de implementar la propuesta, nos vemos en la necesidad de elaborar un referente que nos permita describir de forma cualitativa el progreso en el razonamiento de los aprendices, teniendo en cuenta las asunciones que, en su momento, admitimos para la elaboración de la secuencia de tareas. Tal referente lo hacemos atendiendo al trabajo realizado por Luis Rico (1997), en su caracterización de los campos de conocimiento; y por Biggs y Collis (1982), en la elaboración de un tipo particular de taxonomías para la clasificación de los razonamientos denominada SOLO (*Structure Observed Learning Outcomes*). A continuación, se detalla cada uno de estos estudios.

2.2. Los campos del conocimiento y las taxonomías de clasificación SOLO

Como lo hemos referido, para este análisis tenemos en cuenta principalmente las herramientas didácticas ofrecidas por los referentes teóricos y didácticos asumidos para la construcción de la propuesta de enseñanza. Una de tales herramientas se basa en el denominado conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental que utiliza Rico (1997) para la organización cognitiva de los contenidos. A continuación, exponemos de forma sucinta tales campos de conocimiento.

2.2.1. Campo de conocimiento conceptual

El campo de conocimiento conceptual se caracteriza por ser un conocimiento rico en relaciones. Desde esta perspectiva una unidad de conocimiento conceptual no puede ser una pieza aislada de información, es una pieza del conocimiento conceptual pero solo si se reconocen relaciones con otras piezas de información (Hiebert y Lefevre. citados en Rico, 1997). En el campo de conocimiento conceptual se identifican los conceptos, con lo que pensamos y según su concreción se distinguen en tres niveles: *i*) los **hechos** que hacen referencia a unidades de información para registrar acontecimientos, *ii*) los **conceptos**, que describen relaciones entre un conjunto de hechos y poseen una representación simbólica y, *iii*) las **estructuras conceptuales**, que relacionan conceptos y permiten generar unos de orden superior.

2.2.2. Campo de conocimiento procedimental

El conocimiento procedimental consiste, básicamente, en las formas de ejecutar una tarea que constituye algoritmos, reglas o procedimientos secuencial y linealmente organizados (Hiebert y Lefevre citados en Rico, 1997). En el campo de conocimiento procedimental se establecen igualmente tres niveles: *i*) las **destrezas** que por lo general procesan hechos o transforman expresiones simbólicas en otras a partir de una secuencia de reglas y manipulación de símbolos, *ii*) los **razonamientos**, que establecen relaciones de inferencia entre los conceptos y constituyen relaciones entre estos y, *iii*) las **estrategias**, que operan dentro de una estructura conceptual y suponen diferentes tipos de procedimientos a partir de las relaciones y conceptos implicados.

En la Figura 1 se presenta un esquema de los elementos constituyentes de estos campos de conocimiento.

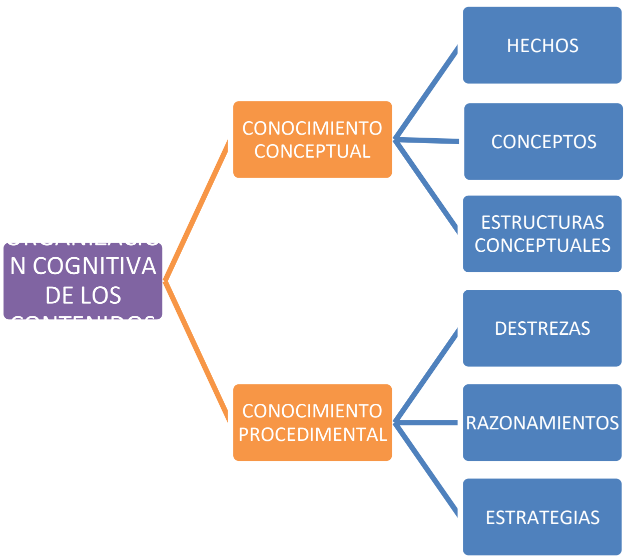


Figura 1. Propuesta de Luis Rico para la organización cognitiva de los contenidos

2.3. Structure Observed Learning Outcomes – SOLO

Otra de las herramientas utilizadas para el análisis de instrucción es la clasificación de los resultados de aprendizaje que plantean Biggs y Collis (1982), por medio de las denominadas taxonomías SOLO. Tales taxonomías buscan describir el nivel de comprensión y razonamiento de un aprendiz sobre cualquier tipo de tema, por medio de cinco etapas crecientes de complejidad. Cabe aclarar que no es necesario que el aprendiz alcance los cinco niveles, pues no son indicadores de logro u objetivos propuestos. A continuación, presentamos, *grosso modo*, una explicación de cada una de las cinco etapas contempladas en esta taxonomía (Tabla 4):

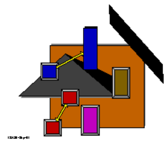
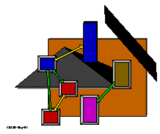
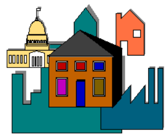
Etapa	Descripción	Gráfico
Pre-estructural	El aprendiz adquiere conceptos e información que no se encuentra relacionada entre sí, que no tiene organización o sentido	
Uni-estructural	El aprendiz realiza conexiones simples y obvias, pero la información no adquiere mayor significado respecto a la etapa anterior	
Multi-estructural	El aprendiz realiza un número considerable de conexiones pero la relación entre ellas aún no se identifica y por lo tanto no se adquiere un sentido global de estas	
Relacional	El aprendiz puede apreciar el significado de las partes en relación con el todo	
Abstracta	El aprendiz realiza conexiones no solo entre los objetos dados sino con otros elementos conocidos, generalizando y transfiriendo los principios establecidos en el nuevo conocimiento a algunas otras instancias	

Tabla 4. Niveles de comprensión y razonamiento de las taxonomías SOLO

Ahora bien, nuestra intención es complementar la propuesta de Rico con la taxonomía SOLO, integrando las etapas de esta última en el campo procedimental, específicamente en los niveles de **razonamientos** y **estrategias**, teniendo en cuenta que encontramos una relación directa entre las pretensiones de estas taxonomías y la generación de dichos niveles, tal y como lo describe este nivel. Así, dichas etapas detallarán y especificarán el nivel de razonamiento en el que posteriormente se puede clasificar a un aprendiz.

Presentamos a continuación las especificidades de los elementos descritos anteriormente, atendiendo al tema central abordado por la propuesta de enseñanza.

2.4. Interrelación entre el referente y el tema central de la propuesta

Luego de las generalidades para los referentes teóricos contextualicémoslos atendiendo a la propuesta de enseñanza planteada. Para ello, especificamos: i) los hechos, conceptos y estructuras conceptuales que emergen en el marco de la propuesta, ii) los indicadores para cada una de las destrezas y estrategias consideradas, y iii) los indicadores para las cuatro primeras etapas que integran las taxonomías SOLO, las cuales actúan como un refinamiento de los razonamientos, y las cuales particularizamos únicamente para la construcción de la unidad denominada **Teorema de Pitágoras – Cuadrados**.

2.4.1. Conocimiento conceptual

Como hemos aludido, el conocimiento conceptual es uno de los elementos considerados por Rico (1997) para describir el conocimiento general. Aquí ilustramos lo que consideramos como **hechos**, **conceptos** y **estructuras conceptuales**, en el marco de nuestra propuesta de enseñanza.

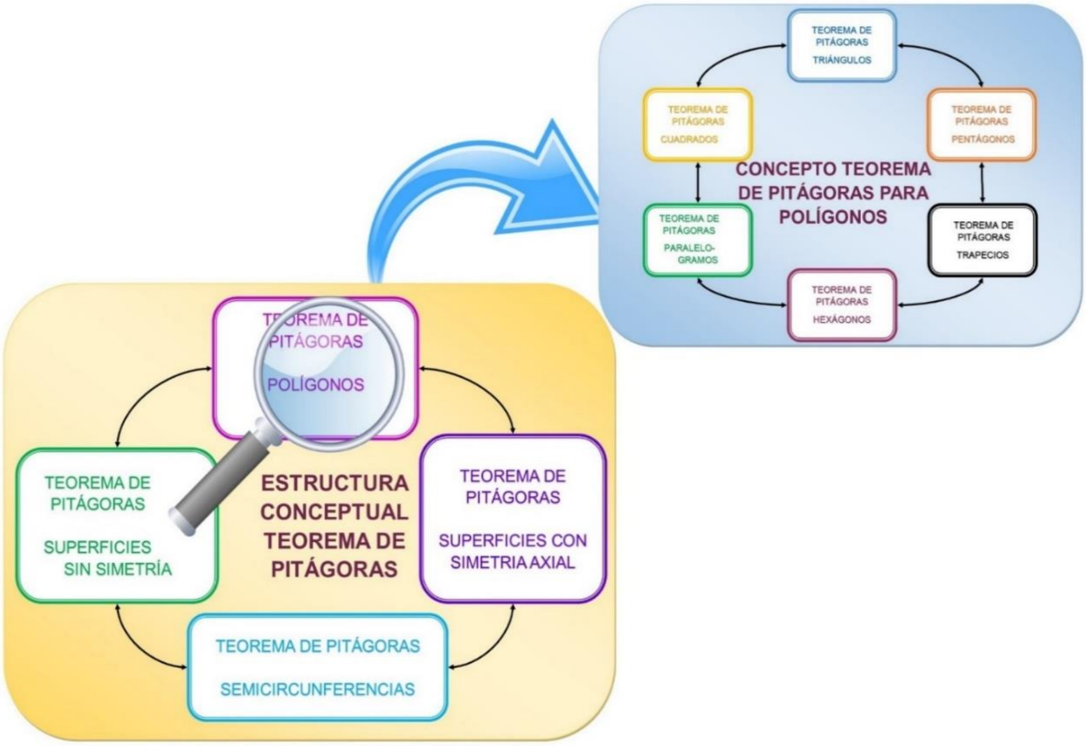


Figura 2. Estructura conceptual denominada **Teorema de Pitágoras**

Para iniciar se hace necesario esbozar una mirada global, como la ilustrada en la Figura 2, en la que se observa la estructura conceptual que denominaremos “Teorema de Pitágoras”. Tal estructura se compone a partir de los conceptos y las interrelaciones que se pueden establecer entre los mismos. En la Figura 3 se ilustran de forma más amplia algunos de los conceptos que, desde nuestro punto de vista, integran la estructura mencionada. Aunque a tales conceptos subyace el papel manejado de este teorema en la matemática griega, cada uno atiende a un tipo de superficie específica, por lo cual hemos asignado un nombre concreto para cada uno, a saber: **Teorema de Pitágoras - Polígonos**, **Teorema de Pitágoras – Superficies sin simetría**, **Teorema de Pitágoras – Superficies con simetría axial** y **Teorema de Pitágoras – Semicircunferencias**. El conocimiento y manejo de cada uno de estos conceptos por parte del aprendiz, le permite a este tener una amplia noción acerca de esta proposición matemática.

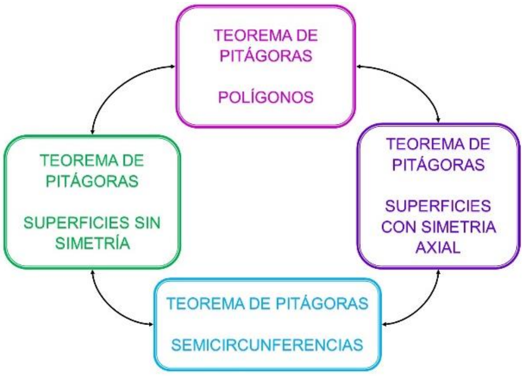


Figura 3. Conceptos que constituyen la estructura conceptual Teorema de Pitágoras

Ahora bien, si realizamos un acercamiento a alguno de los conceptos para ver en detalle los hechos o unidades que lo conforman (*v.g.* en la Figura 2 se centra la atención en el **Teorema de Pitágoras–Polígonos**) obtenemos un esquema como el que mostramos de forma amplia en la Figura 4.

En este concepto se movilizan las diferentes versiones del teorema de Pitágoras que abordamos por medio de las actividades planteadas (y que es posible abordarlas) en el aula de clase para las superficies poligonales. Por ejemplo, dentro de este conjunto tenemos un hecho que alude al teorema de Pitágoras para cuadrados el cual, consideramos, es el caso paradigmático en la enseñanza de la Matemática a nivel secundario. No obstante, lo anterior, también contemplamos los casos del teorema para otros cuadriláteros diferentes al cuadrado, y para los cuales hemos asignado los nombres **Teorema de Pitágoras–Paralelogramo** y **Teorema de Pitágoras–Trapecio**. Igualmente examinamos los casos de otros polígonos, con lo cual surgen los hechos **Teorema de Pitágoras - Triángulos**, **Teorema de Pitágoras–Pentágonos** y **Teorema de Pitágoras–Hexágonos**.

Es importante notar que, aunque hemos ilustrado en la gráfica un número finito de hechos que integran el concepto tratado, en realidad tal número debe ser infinito debido a la cantidad de polígonos existentes. Las instancias de la proposición que se ilustran en la Figura 4 permiten apoyar el proceso de generalización, al menos para las superficies poligonales.

Claramente, si se procura la integración de al menos uno de los conceptos señalados en la estructura cognitiva de los aprendices, se hace necesario abordar mediante tareas y actividades cada uno de los hechos que integren el concepto y los vínculos que son susceptibles de ser establecidos entre tales hechos. En particular, en nuestra propuesta de enseñanza se decidió abordar con mayor énfasis los hechos que integran el concepto **Teorema de Pitágoras-Polígonos**, debido a las potencialidades que estos ofrecen para construir la estructura conceptual descrita.

Teniendo en cuenta esta especificación de los **hechos**, **conceptos** y **estructura conceptual** que definimos, seguiremos con la descripción de los indicadores para las **destrezas**, **razonamientos** y **estrategias**, los cuales nos permitirán realizar los análisis de las producciones de los aprendices.

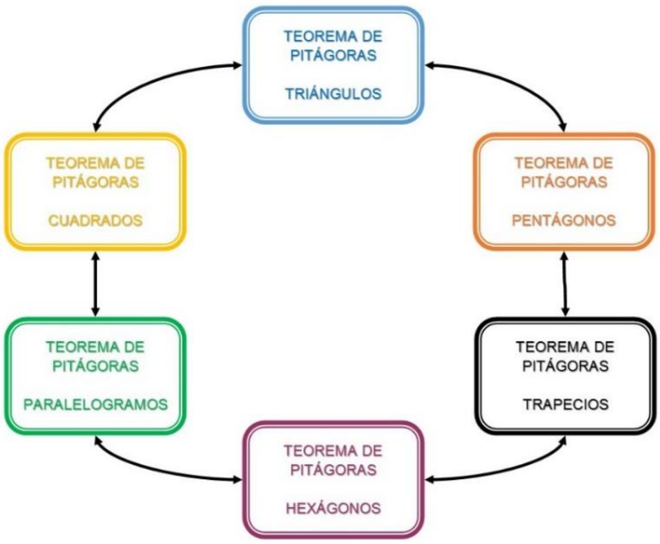


Figura 4. Unidades o hechos que integran el concepto Teorema de Pitágoras para polígonos

2.4.2. Conocimiento procedimental y taxonomías SOLO

Antes de ilustrar los indicadores que construimos con el fin de realizar el estudio minucioso y crítico de las producciones de los aprendices al desarrollar las tareas propuestas, debemos aclarar ciertos aspectos sobre su construcción. En primer lugar, recordemos que al procurar el aprendizaje de la estructura conceptual **Teorema de Pitágoras**, elegimos el concepto **Teorema de Pitágoras - Polígonos** para organizar las actividades y tareas en el diseño de instrucción. Un docente puede elegir también este concepto, o puede elegir cualquier otro. En particular nosotras seleccionamos el ya mencionado. Además, del conjunto de hechos que integran el concepto **Teorema de Pitágoras – Polígonos**, fijamos nuestra atención en el caso paradigmático **Teorema de Pitágoras – Cuadrados**, asumiéndolo como caso inicial. A partir de este caso se construyen los demás hechos que integran el concepto elegido.

Dado que el punto de inicio de las tareas y actividades es el estudio del teorema de Pitágoras con cuadrados, pretendemos que los aprendices, atendiendo a esta versión del teorema, formulen una generalización (por ejemplo: *la cantidad de superficie del cuadrado dispuesto en la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las cantidades de superficies de los cuadrados dispuestos en los catetos del mismo triángulo*) la cual, a su vez, fuese una conjetura apta de refutar o comprobar al disponer otras superficies poligonales en un triángulo rectángulo.

Por lo anterior, hemos establecido los indicadores para las **destrezas** y los **razonamientos** teniendo en cuenta el estudio del hecho **Teorema de Pitágoras – Cuadrados**. Para las refutaciones o comprobaciones con otros polígonos establecimos indicadores de análisis diferentes, los cuales hemos relacionado con las estrategias que plantea Luis Rico.

En la Tabla 5 organizamos tales indicadores, los cuales creamos para medir las **destrezas** o métodos; los **razonamientos** (en cada una de las etapas: pre-estructural, uni-estructural, multi-estructural y relacional); y las **estrategias** (etapa relacional o abstracta), a partir de las producciones de los aprendices en la construcción de la estructura conceptual **Teorema de Pitágoras**. Tales indicadores son:

Destrezas	Razonamientos		Estrategias	
	Etapa	**Indicador**	**Etapa**	**Indicador**
I1. Decide la transformación adecuada de dos superficies cuadradas en una tercera, por medio de la selección entre tres opciones	**Pre-estructural**	Identifica que las figuras involucradas en el trabajo son cuadrados	**Abstracta I**	Comprueba el Teorema de Pitágoras con superficies no cuadradas (triángulos, paralelogramos, etc)
I2. Explica las razones por la cuales descartar algunas de las opciones presentadas como superficies cuadradas posibles de representar la suma de otras dos del mismo tipo	**Uni-estructural**	Relaciona una determinada cantidad de superficie con la suma de dos cantidades de superficie adicionales	**Relacional I**	Generaliza el Teorema de Pitágoras de acuerdo con la comprobación hecha con superficies poligonales alternas
I3. Describe un método para realizar la transformación de dos superficies cuadradas en una tercera superficie del mismo tipo	**Multi-estructural**	Asocia las medidas de cada uno de los lados de cada cuadrado con las medidas de los lados de un triángulo rectángulo	**Abstracta II**	Comprueba el teorema de Pitágoras con superficies no poligonales
I4. Identifica la obtención de uno de los tres cuadrados a partir de otros dos dados, acudiendo al Teorema de Pitágoras como instrumento	**Relacional**	Da significado a la relación entre una terna de cuadrados y un triángulo rectángulo, reconociendo la conjunción de estos elementos como el teorema de Pitágoras	**Relacional II**	Generaliza el Teorema de Pitágoras de acuerdo con la comprobación hecha en superficies no poligonales.

Tabla 5. Indicadores para la medición de destrezas, razonamientos y estrategias del hecho **Teorema de Pitágoras - Cuadrados**

Con base en la tabla anterior de los indicadores constituidos para el conocimiento procedimental, iniciamos la pormenorización del análisis sobre las evidencias recolectadas durante las secciones de trabajo.

3. Análisis de actuación

En la presente sección procuramos la exposición de las evidencias con las respectivas descripciones que emergen al momento de contrastarlas con los indicadores establecidos. Para llevar a cabo esta iniciativa, primero describiremos las características del contexto en el que se implementó la secuencia de actividades y la forma de recolección de las evidencias. Después de esto, entraremos en materia explicando los análisis hechos por parte nuestra.

3.1. Contexto de aplicación y recolección de la información

Una primera puesta en práctica de esta secuencia la llevamos a cabo con un grupo de veintisiete estudiantes, de grado décimo, del Colegio Técnico Comercial Manuela Beltrán IED (Bogotá, Colombia), dirigido por las docentes autoras del presente trabajo. Este grupo de estudiantes presentan algunas características comunes tales como: tener bajos niveles de asimilación y conceptualización del conocimiento matemático, bajo interés por la adquisición de conocimientos propios de las Matemáticas y bajos niveles de razonamiento. Algunas características positivas son: actitudes receptivas, aptos para seguir instrucciones, capaces de verificar procedimientos algorítmicos propios de las Matemáticas y, en algunos casos, capacidades de abstracción.

La información la recolectamos por medio de videos grabados de las sesiones de clase, en el que se registran algunos de los comentarios más importantes en el desarrollo de las tareas. Las evidencias de estos videos las presentamos aquí por medio de las transcripciones de los diálogos relevantes. Otro instrumento que utilizamos para recolectar la información fueron las guías de trabajo en las que los aprendices hacían los gráficos y consignaban las respuestas pertinentes a cada una de las tareas.

Precisando el contexto de trabajo y formas de recolección de la información, a continuación contrastamos las evidencias obtenidas durante las sesiones de clase con los indicadores establecidos. Tales evidencias las presentamos, en imágenes que ilustran la realización de las actividades por parte de los aprendices o, en unos pocos casos, en un texto que es transcripción fiel de alguno de los videos tomados en dichas sesiones.

3.2. Análisis de las evidencias

Antes de llevar a cabo las especificidades del análisis de las evidencias, en este punto cabe una primera reflexión general. Como indicamos anteriormente, la propuesta de enseñanza se encuentra dividida en tres grandes momentos. Al llevar a cabo la puesta en práctica evidenciamos que, relacionado con el **primer momento**, los aprendices logran llegar, por medio de las tareas propuestas, a identificar explícitamente el teorema de Pitágoras. Aludimos este suceso al conocimiento previo por parte de ellos del teorema como herramienta para la solución de triángulos. El aludir a este teorema, les permite resolver el problema de asociar una superficie cuadrada como la suma de otras dos superficies del mismo tipo.

En el **segundo momento**, los aprendices llegan a conjeturar acerca de la aplicación del teorema de Pitágoras con otros polígonos regulares diferentes a los cuadrados, e incluso con los polígonos en general, aun cuando estos no sean regulares.

Ya en el **tercer momento**, los aprendices establecen la semejanza[3] como una condición necesaria entre las superficies dispuestas en los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo para que el teorema se siga satisfaciendo. Iniciemos el análisis detallado de los diferentes elementos constitutivos del conocimiento procedimental con base en los indicadores y evidencias disponibles.

[3] Desde una aproximación intuitiva (misma forma pero diferente tamaño) y no formal de la semejanza de figuras.

3.2.1. Análisis de las destrezas

En las Tablas 6 a 9 presentamos las evidencias para los indicadores de las destrezas. Posteriormente presentamos nuestra reflexión.

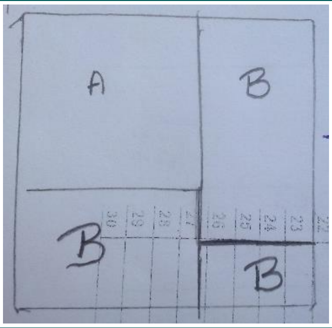
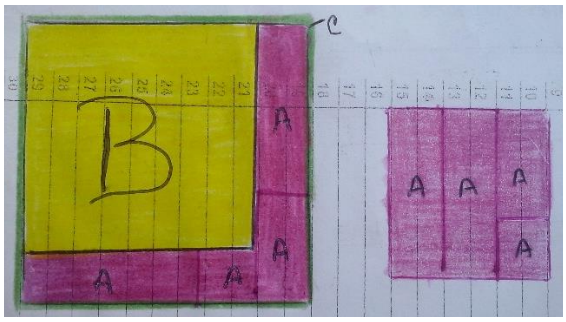
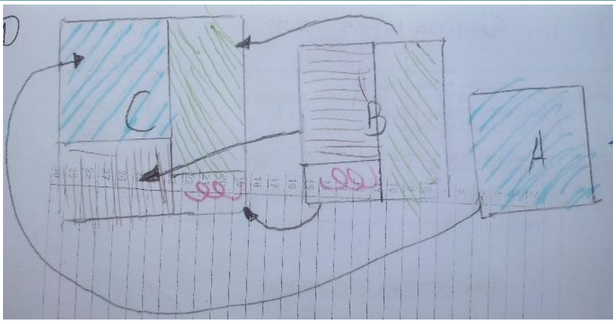
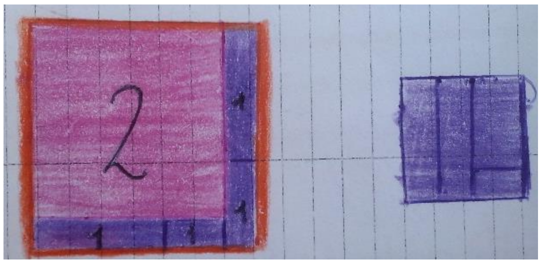
Indicador 1: Decide la transformación adecuada de dos superficies cuadradas en una tercera, por medio de la selección entre tres opciones	
L.M. La figura que se puede formar es 3 sobreponiendo 1 y 2.	**D.H. R1.** Los cuadrados A y B son iguales a la superficie C porque al iniciar se ponen sobre la superficie C el cuadrado B, y el cuadrado A se divide en 4; así se complementaría el cuadrado.
	
D.G. R1. El cuadrado C es el que cumple con las medidas de A y B porque sus medidas, al ser bien ubicados, da para cubrir con el [cuadrado] A y B el C. **R2.** El cuadrado 3 cumple con las medidas de 1 y 2, ya que la superficie de 1 y 2 es compatible con el cuadrado 3.	**D.H. R2.** Los cuadrados 1 y 2 son iguales a la superficie 3 porque al poner sobre la superficie 3 el cuadrado 2, y el cuadrado 1 se divide en 4; así se complementaría el cuadrado.
	

Tabla 6. Evidencias del primer indicador de destrezas

Como mencionamos anteriormente, en primera instancia, solicitamos a los estudiantes que, por medio de la selección sobre una terna de cuadrados elaborados en material concreto, decidieran cuál de ellos representaba adecuadamente la suma de dos cantidades superficiales, igualmente cuadradas. En un primer caso, dábamos a los estudiantes los cuadrados denominados con los literales A y B, y la terna de opciones estaba conformada por los cuadrados denominados con los literales C, D y F. En el segundo caso, los cuadrados iniciales se denominaban con los numerales 1 y 2, y la terna de opciones con los numerales 3, 4 y 5.

Las imágenes presentadas en la Tabla 6, son un ejemplo de las evidencias recolectadas que nos permiten verificar el primer indicador. Con el fin de seleccionar la figura correcta, la estrategia empleada por parte de los aprendices fue sobreponer los dos cuadrados iniciales sobre aquel que consideraran, tenía mayor posibilidad de ser el representante adecuado.

Como puede observar el lector de este documento, en la Tabla 6 presentamos varias formas, construidas por los aprendices, de sobreponer los dos cuadrados iniciales sobre el candidato seleccionado, como una forma de comprobación. En cualquiera de los casos la primera acción es sobreponer primero, en el cuadrado candidato, el cuadrado más pequeño que le ha sido dado. Luego, cubren las zonas faltantes del cuadrado candidato con el área del segundo cuadrado dado.

Estos métodos para comprobar si la cantidad de superficie de un cuadrado determinado es equivalente a la cantidad de superficie de otros dos, cobran importancia en tanto que son utilizados por ellos, posteriormente, para resolver algunas de las restantes tareas.

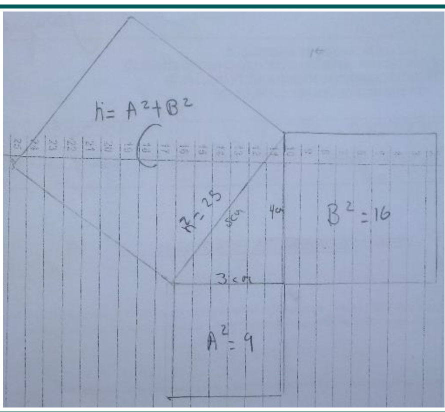
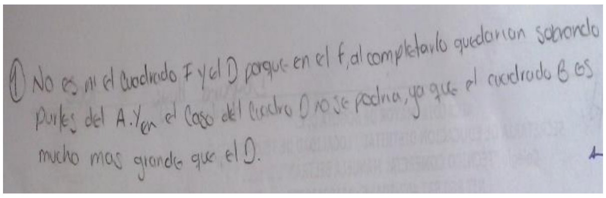
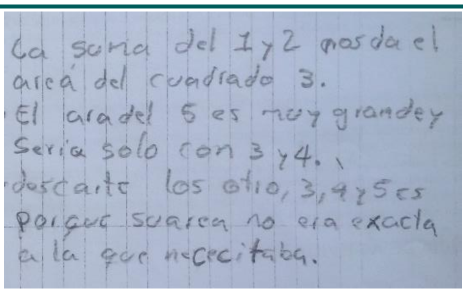
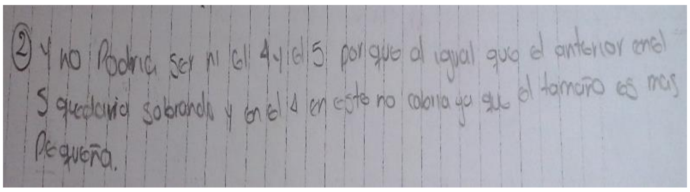
Indicador 2: Explica las razones por la cuales descartar algunas de las opciones presentadas como superficies cuadradas posibles de representar la suma de otras dos del mismo tipo.	
H.Y. [En el primer caso] D y F no eran porque no daba la hipotenusa que se necesitaba.	**D.H. R1.** No es el cuadrado F y el D porque en el F, al completarlo quedarían sobrando partes del A. Y en el caso del cuadrado D no se podría ya que el cuadrado B es mucho más grande que el D.
	 ① No es ni el cuadrado F y el D porque en el F, al completarlo quedarian sobrando partes del A. Y en el caso del cuadro D no se podria, ya que el cuadrado B es mucho mas grande que el D.
J.P. El área del 5 es muy grande y sería solo con 3 y 4. Descarté los otros es porque su área no era exacta a la que necesitaba.	**D.H. R2.** Y no podría ser ni el 4 y el 5 porque al igual que el anterior en el 5 quedaría sobrando y en el 4 en este no cabría ya que el tamaño es más pequeño.
 La suma del 1 y 2 nos da el area del cuadrado 3. El area del 5 es muy grande y seria solo con 3 y 4. descarte los otro, 3, 4 y 5 es porque su area no era exacta a la que necesitaba.	 ② Y no Podria ser ni el 4 y el 5 porque al igual que el anterior en el 5 quedaria sobrando y en el 4 en esto no cabria ya que el tamaño es mas pequeño.

Tabla 7. Evidencias del segundo indicador de destrezas

Y así como en la Tabla 6 ilustramos algunos de los procedimientos gráficos utilizados por los aprendices para resolver una de las tareas, en la Tabla 7 presentamos las evidencias que nos permite constatar el criterio usado por ellos para descartar, en cada uno de los casos, las opciones restantes.

En tres de los cuatro casos presentados en la tabla, los aprendices descartaron en la terna de cuadrados las opciones que no se ajustaban, debido a que la cantidad de superficie de estos, evidentemente, no los hacía candidatos posibles. Lo que acabamos de mencionar es la respuesta esperada por nosotras a esta actividad, pues los cuadrados los construimos de tal forma que la cantidad de superficie de estos fuese, o mucho menor al cuadrado dado más pequeño, o mucho mayor al cuadrado dado más grande.

Por otro lado, presenciamos una situación particular con uno de los aprendices. Así como tal aprendiz usó el Teorema de Pitágoras para decidir cuál de las opciones dadas era la adecuada, también lo utilizó para descartar las otras dos opciones. Las medidas de los lados de los cuadrados dados las utilizó él, como medidas de los catetos de un triángulo rectángulo. Luego, comparó la medida de la hipotenusa del tal triángulo con las medidas de los lados de la terna de cuadrados que servían como opción. Esta respuesta a la actividad propuesta, fue una sorpresa para nosotras, debido a que no estimamos en esta primera parte la alusión al teorema.

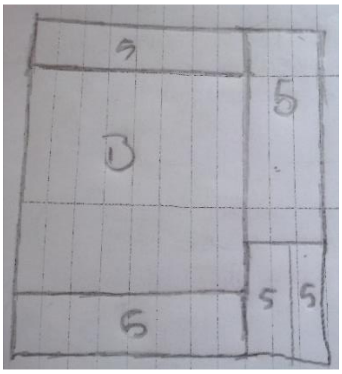
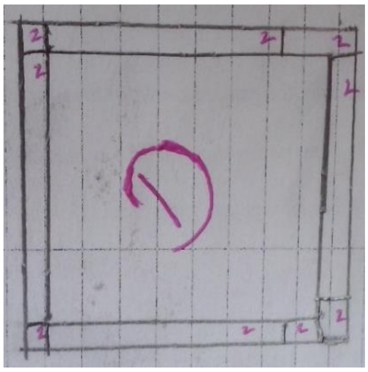
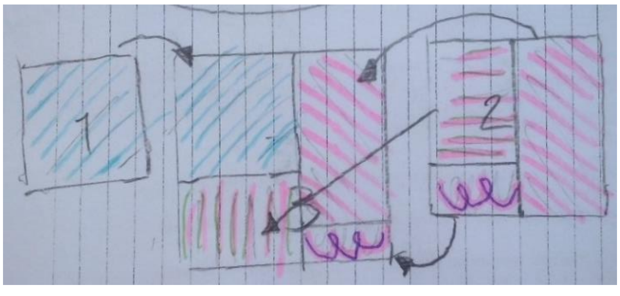
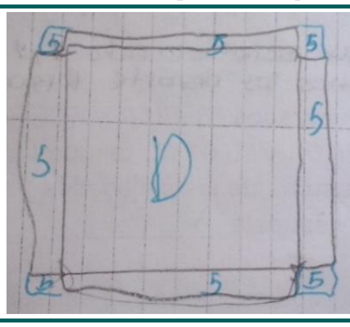
<table>
<tr><td colspan="2">Indicador 3: Describe un método para realizar la transformación de dos superficies cuadradas cualesquiera, en una tercera superficie del mismo tipo.</td></tr>
<tr><td>J.P. Lo encontré con el B y 5 acomodando el cuadrado B en el centro y dividiendo el cuadrado 5 en tres partes iguales y dos más pequeñas, y así mismo encontrar el tercer cuadrado.</td><td>P.T. Caso 1: Un cuadrado tendría que ser más pequeño [que el otro]</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D.G. [Se toma el cuadrado 1 y 2. Al segundo de estos lo divido en tres partes, de forma conveniente, tal que al sobreponer el cuadrado 1 y cada una de las partes en la que se dividió el 2, encajen con el cuadrado de literal B]</td><td>P.T. Caso 2: [cuando ambos cuadrados son del mismo tamaño] La base es la D. [A] la ficha número 5 la partí, le hice la[s] cuatro tiras de los lados, y con un pedazo que sobró hice cuatro cuadrados para las esquinas.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 8. Evidencias del tercer indicador de destrezas

El tercer indicador al que hacemos mención, se encuentra relacionado con la descripción, hecha por parte de los aprendices, de un método para la transformación de dos superficies cuadradas cualesquiera, en una tercera del mismo tipo, la cual representara su suma. En la tabla 8 presentamos las evidencias de este indicador, teniendo en cuenta que, en la parte inferior izquierda de esta, presentamos la evidencia de uno de los aprendices que si bien, expuso gráficamente el procedimiento para construir este tercer cuadrado, no lo explicó con palabras. El texto entre llaves es una interpretación nuestra de la imagen que construyó este aprendiz.

Un primer asunto a comentar tiene que ver con la dificultad de los estudiantes para comprender la tarea rápidamente, por lo cual fue necesario explicarla de varias formas, tal que les fuera posible llevar a cabo la actividad. Es posible que uno de los factores que determine esta dificultad, se relacione con la naturaleza de la actividad inmediatamente anterior, pues los estudiantes se mudan de una situación en que las opciones están dadas, y solo es necesario elegir una de ellas; a una en la que ya no tienen las opciones, sino que por el contrario debe construir la opción adecuada. En este caso vale la pena reestructurar la tarea anterior con el fin de verificar si es este el factor determinante.

Otro posible factor puede deberse a los escasos espacios de indagación y proposición en que los aprendices se han podido ver inmersos. Debido a algunas variables inherentes a las dinámicas institucionales y sociales, en muchas ocasiones debemos prestar mayor atención a la cantidad de contenidos enseñados, y no a la generación de espacios en los que ellos propongan soluciones a tareas y actividades previamente elaboradas.

Hubo, también, dificultad para abstraer la actividad por parte de los aprendices. Al solicitarles construir un tercer cuadrado cuya cantidad de superficie fuera equivalente a la suma de las cantidades de superficie de otros **dos cualesquiera**, recurrieron al material concreto para llevar a cabo la actividad. No se percataron de que al usar, por ejemplo, dos cuadrados del material concreto, estaban construyendo el método para esos cuadrados particulares, y no para **dos cualesquiera**. Además de que, con el fin de utilizar la misma estrategia que habían planteado en la actividad anterior, eligieron los cuadrados de material concreto de tal forma que uno fuese más pequeño que el otro.

En la parte izquierda de la Tabla 8 se ilustran las evidencias de lo mencionado anteriormente. La evidencia de la parte superior izquierda es de un aprendiz que, tomando el cuadrado de literal B y el cuadrado de numeral 5, construye el tercero solicitado. Cuando se le pide argumentar la razón por la que la figura resultante es en realidad un cuadrado, la acción de él es tomar una regla y medir los lados de tal figura, advirtiendo que dichas medidas no son iguales, por lo cual no era un cuadrado.

La evidencia de la parte inferior izquierda es de un aprendiz que, al igual que el anterior, toma dos cuadrados del material concreto: aquellos denominados con los numerales 1 y 2. La diferencia de este aprendiz respecto al anterior, es que “acomoda” las partes de los cuadrados 1 y 2, de tal suerte que las encaja con la superficie del cuadrado denominado con el literal B. En este caso, sugerimos al estudiante revisar el enunciado de la actividad pues, solicitábamos construir un nuevo cuadrado, y el procedimiento ofrecido por él no daba por resultado un nuevo cuadrado, sino una acomodación de una terna de cuadrados específica.

Debido a las dos evidencias presentadas anteriormente (y a la situación generalizada), en la que los aprendices seleccionaban dos cuadrados, tal que uno tuviese menor cantidad de superficie que el otro; pusimos a prueba los métodos de los estudiantes para una pareja de cuadrados con la misma cantidad de superficie. El resultado: en cada caso obteníamos la construcción de un rectángulo y no de un cuadrado.

Aunque buscábamos con esto que los estudiantes lograran la abstracción requerida de tal forma que idearan un método para cualquiera de las dos situaciones, la reacción de los aprendices fue buscar el procedimiento de construcción atendiendo a dos casos: el primero, en el que la cantidad de superficie de un cuadrado fuera menor que la del otro; y el segundo, en el que la cantidad de superficie de ambos cuadrados fuese la misma.

Las evidencias de la parte derecha de la Tabla 8 son una muestra de lo expresado anteriormente. Ambas imágenes muestran las respuestas de un aprendiz. La evidencia de la parte superior es la construcción para el primer caso, mientras que la evidencia de la parte inferior es para el segundo caso. No obstante, aunque hizo el intento de discriminar, le sugerimos revisar la construcción pues era la misma en cada caso, y si este era el suceso, entonces no era necesario pensar en dos casos diferentes.

Aunque la construcción presentada por este último aprendiz era convincente (pues al medir las longitudes de los lados del cuadrado resultante con una regla, eran "casi" iguales), no era en realidad acertada. Fue necesario que nosotras realizáramos las construcciones en Geogebra para comprobarlo, y con esto modificar las actividades de acuerdo con las producciones obtenidas en cada clase.

En la siguiente sesión de clase presentamos a los aprendices la construcción en Geogebra mencionada anteriormente. El procedimiento para obtener el tercer cuadrado es: tomar uno de los dos cuadrados y dividirlo en cinco partes iguales, trazando rectas paralelas sobre tal cuadrado. Luego, en uno de los quintos obtenidos trazar, igualmente, rectas paralelas de tal forma que divida tal quinto en cuatro partes. Disponga cada una de estas partes, convenientemente, alrededor del otro cuadrado, obteniendo así el cuadrado solicitado. El procedimiento anterior admite las dos configuraciones de la Figura 5.

Si se respetan los pasos de construcción, la imagen de la derecha es la adecuada. Sin embargo, es fácil ver que las secciones naranja, violeta, verde y lila, no se corresponden en los tamaños que adquieren en el $\boxdot\, ABCD$, y los que luego tienen en el $\boxdot\, IJKL$. La sugerencia para superar la dificultad es la presentada en la imagen de la parte derecha, pero en esta configuración queda un espacio faltante por cubrir, el cual se corresponde con el espacio de color blanco.

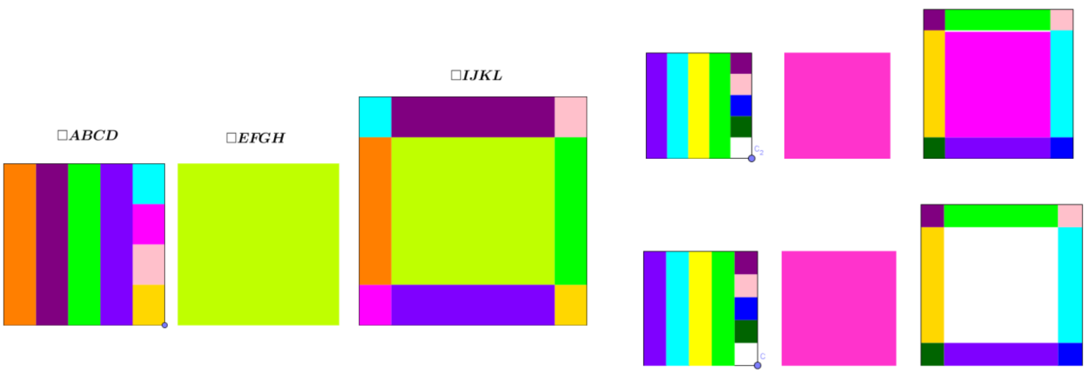


Figura 5. Configuraciones para el método de construcción

Afortunadamente para nosotras, uno de los aprendices hizo alusión al Teorema de Pitágoras como una herramienta para la construcción del cuadrado solicitado.

Como lo hemos indicado, uno de los aprendices hizo mención al Teorema de Pitágoras como instrumento para la construcción de un cuadrado cuya cantidad de superficie fuese igual a la suma de las cantidades de superficie de otros dos. Las evidencias de la Tabla 9 son imágenes de las construcciones hechas por él y la justificación de la funcionalidad del procedimiento.

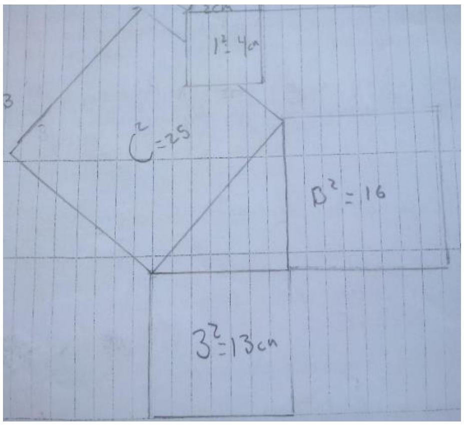
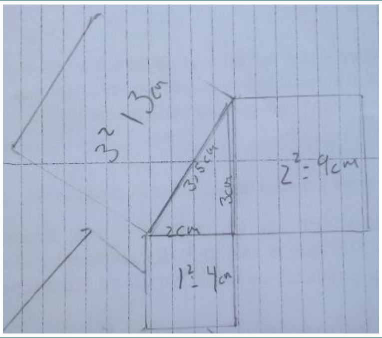
<table>
<tr><td colspan="2">Indicador 4: Identifica la obtención de uno de los tres cuadrados a partir de otros dos dados, acudiendo al Teorema de Pitágoras como instrumento.</td></tr>
<tr><td>H.Y. [la respuesta es] C, ya que si utilizamos el teorema de Pitágoras hallamos que el cuadrado construido con el cateto A y el cuadrado del cateto B, la hipotenusa nos da como resultado C.</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

Tabla 9. Evidencias del cuarto indicador de destrezas

3.2.2. Análisis de los razonamientos

En las Tablas 10 a 12 presentamos las evidencias para los indicadores de las destrezas. Posteriormente presentamos nuestra reflexión.

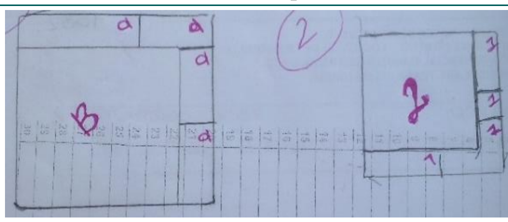
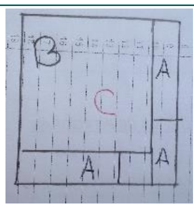
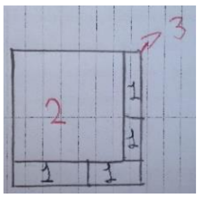
<table>
<tr><th colspan="3">Uni-estructural</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Relaciona una determinada cantidad de superficie con la suma de dos cantidades de superficie adicionales</td><td colspan="2">P.T. [elijo] la ficha 3 porque recortando la ficha 1 y [sobre]poniendo la ficha 2 tiene la misma cantidad de superficie.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">A.R. Al elegir el cuadrado C me di cuenta que este era el que tenía más probabilidades de que fuera el indicado. Cuando sobrepuse el cuadrado A y el B sobre el C llegué a la conclusión de que B ocupaba gran parte de este y A podría llenar los espacios que quedaban.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 10. Evidencia de los razonamientos en el nivel uni-estructural

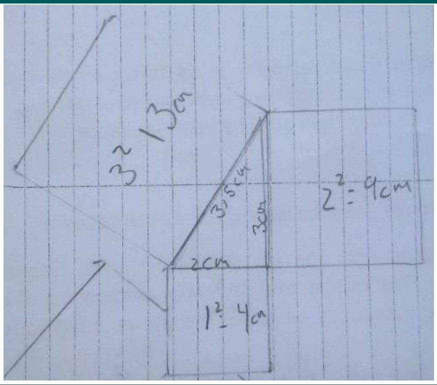
Multi-estructural	
Asocia las medidas de cada uno de los lados de cada cuadrado con las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.	

Tabla 11. Evidencia de los razonamientos en el nivel multi-estructural

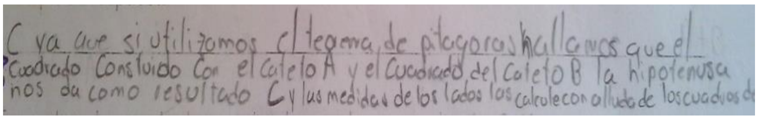
Relacional	
Da significado a la relación entre una terna de cuadrados y un triángulo rectángulo, reconociendo la conjunción de estos elementos como el teorema de Pitágoras.	

Tabla 12. Evidencia de los razonamientos en el nivel relacional

En las tablas anteriores presentamos las evidencias de un proceso de razonamientos que lleva a los aprendices a relacionar una terna de cuadrados y un triángulo rectángulo, no solo como el teorema de Pitágoras, sino como un procedimiento para la adición de superficies.

En la primera etapa de razonamiento (uni-estructural), los aprendices logran identificar que la cantidad de superficie de un cuadrado es equivalente a la adición de las cantidades de superficie de otros dos. La forma predilecta por ellos para llegar a esta conclusión, es sobreponiendo en un cuadrado determinado, otros dos, tal que estos últimos completen toda la cantidad de superficie del primero.

Ya en la segunda etapa (multi-estructural), los aprendices asocian la medida de la longitud de cada uno de los lados de los cuadrados, con la medida de la longitud de los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo de forma adecuada.

Finalmente, identifican una relación entre un triángulo rectángulo y la terna de cuadrados, en el que uno de ellos cumple la condición de representar la suma de los otros dos. A esta relación la designan Teorema de Pitágoras, tal y como ellos ya la conocían. Con esto podemos ubicar a los aprendices en un razonamiento relacional.

3.2.3. Análisis de las estrategias

En las Tablas 13 a 16 presentamos las evidencias para los indicadores de las destrezas. Tales evidencias las agrupamos en dos parejas (Pareja 1: Tabla 13 y 14; Pareja 2: Tabla 15 y 16), debido a que en cada una plasmamos dos etapas (relacional y abstracta), que se sucedieron en el proceso de generalización del teorema.

Relacional I: Comprueba el Teorema de Pitágoras con superficies no cuadradas (triángulos, paralelogramos, etc.)

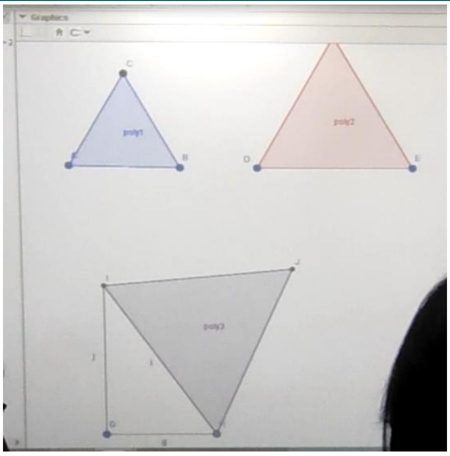
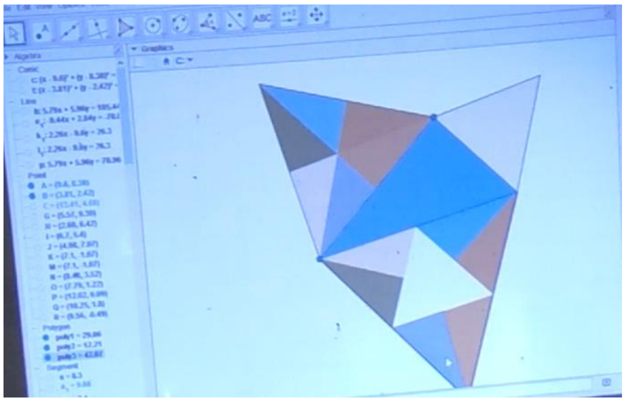
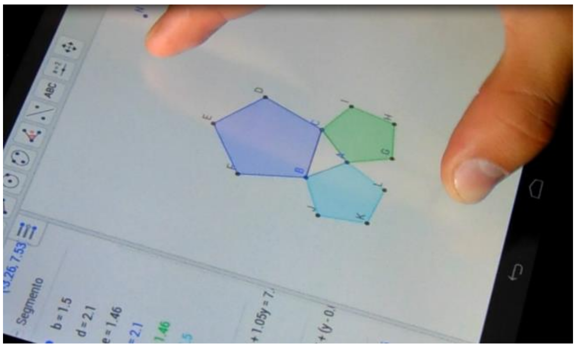
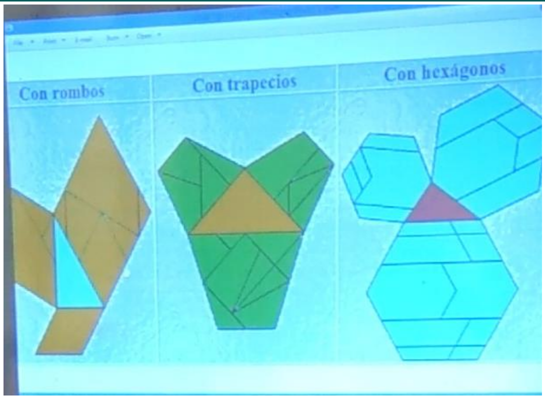
	
	

Tabla 13. Evidencias de las estrategias relacionales I

Dado que uno de los estudiantes propone una conjetura relacionada con la validez del Teorema de Pitágoras para cualquier polígono, en el primer conjunto de evidencias (Tablas 13 y 14) mostramos la comprobación por parte de los aprendices y de las profesoras titulares, del teorema para algunas superficies poligonales. Los aprendices lo comprueban, por medio de Geogebra, para una terna de triángulos equiláteros; de isósceles y de escalenos. Posteriormente, ellos verifican la proposición para pentágonos regulares, igualmente asistidos por Geogebra.

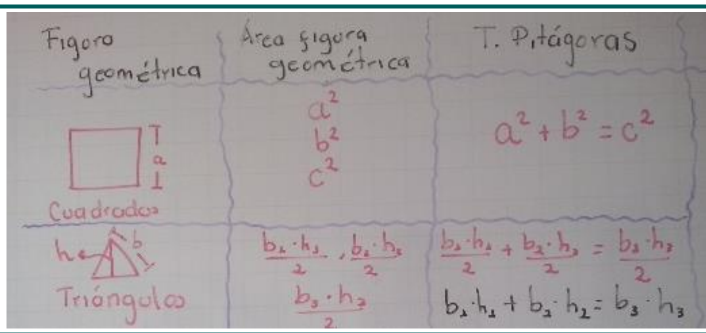
Abstracta I: Generaliza el Teorema de Pitágoras de acuerdo con la comprobación hecha con superficies poligonales alternas.	

Tabla 14. Evidencias de las estrategias abstractas I

Por su parte, nosotras ilustramos a los aprendices sobre algunas comprobaciones gráficas de la proposición para dos cuadriláteros que no son cuadrados (paralelogramo y trapecio), y para un hexágono. A partir de esto, promovemos en ellos la participación para establecer la representación simbólico-algebraica, para cada una de las instancias que se comprobaron para los polígonos. Ellos proponen tales representaciones para las gráficas en las cuales se dispone una terna de cuadrados o una terna de triángulos.

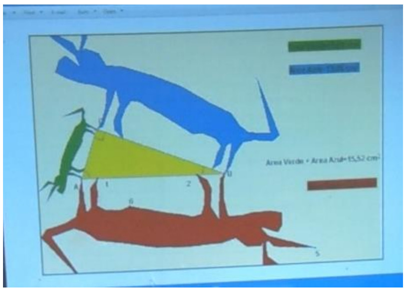
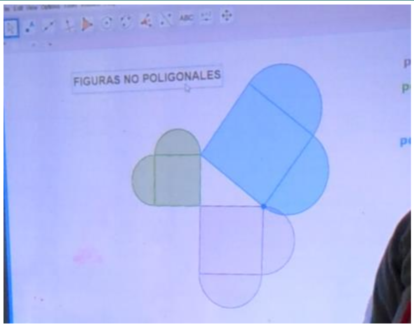
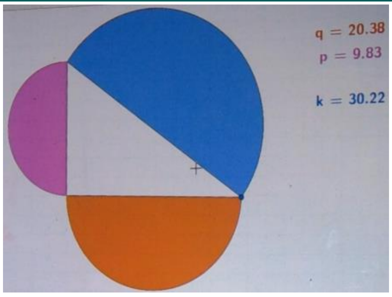
Relacional II: Comprueba el teorema de Pitágoras con superficies no poligonales.	
	
	

Tabla 15. Evidencias de las estrategias relacionales II

En el conjunto de evidencias presentadas en las Tablas 15 y 16, mostramos las comprobaciones realizadas en la sesión de clase, por parte de los aprendices, para superficies no poligonales. Uno de los casos llamativos es la verificación que hace uno de ellos para el caso de la semicircunferencia. La imagen de las lagartijas dispuestas en los lados de un triángulo rectángulo, fue llevada por nosotras para presentarles a ellos una terna de superficies no poligonales que, igualmente, satisfacen la proposición.

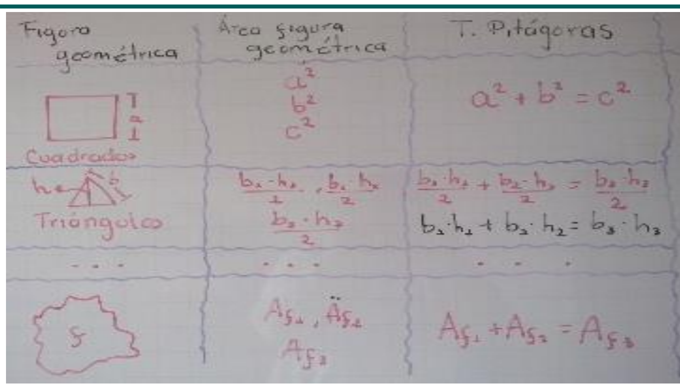
Abstracta II: Generaliza el Teorema de Pitágoras de acuerdo con la comprobación hecha en superficies no poligonales.	

Tabla 16. Evidencias de las estrategias abstractas II

Tomando en conjunto estas instancias, los aprendices generalizan el Teorema de Pitágoras, proponiendo la representación simbólico-algebraica que presentamos en la evidencia de las estrategias abstractas II. Con esta última agrupación de evidencias, concluimos el análisis de los indicadores establecidos.

4. Resultados

En este apartado pretendemos realizar algunas reflexiones acerca de la puesta en práctica de la secuencia de actividades que consideramos importantes para el docente interesado en llevar a cabo la implementación de este trabajo en su aula de clase.

4.1. Reflexión docente

Un comentario es pertinente para poder introducir el primer aspecto sobre el cual queremos llamar la atención. Cuando decidimos llevar a cabo este trabajo, procuramos en un principio que las actividades condujeran a los aprendices a razonar geométricamente, es decir, que no acudieran a la representación de las medidas y cantidades de superficie por medio de los números arábigos, sino a través de la representación simbólico geométrica. Por ejemplo, se les solicitaba evitar medir con la regla los lados de los cuadrados concretos proporcionados en el primer momento del taller de instrucción, para que en cambio centraran su atención en hacer la superposición de las áreas de dos cuadrados en el área de un tercer cuadrado de forma que coincidieran las partes físicas, de tal forma que asociaran la cantidad de superficie de un cuadrado con la suma de las cantidades de superficie de otros dos.

No obstante lo anterior, al intentar comprobar la conjetura de si la proposición se satisfacía, por ejemplo, con una terna de triángulos cualesquiera (siempre que fueran semejantes), la forma de superponer las áreas no era en sí evidente, por lo cual los aprendices recurrieron a tal comprobación por métodos numéricos hallando las áreas de cada uno de los triángulos involucrados, y verificando que la suma de las áreas de los dos triángulos más pequeños fuese igual al área del triángulo más grande.

Cuando los aprendices conjeturaron y generalizaron el teorema para polígonos sucedió una situación similar. Es decir, evidenciamos la poca posibilidad de separar el lenguaje simbólico-geométrico del lenguaje simbólico-numérico. Sin embargo, y aunque no era nuestro propósito inicial, tomamos ventaja de esta circunstancia para reformular las tareas específicas del tercer momento del taller de instrucción, con el fin de involucrar la simbolización geométrica y algebraica por medio de la numérica. Con esto, los estudiantes realizaban transformaciones entre la representación geométrica y la representación algebraica asociada a la geométrica, con cada nueva comprobación.

Por ejemplo, ellos conocían que la representación simbólico-algebraica del teorema de Pitágoras para cuadrados es $a^2 + b^2 = c^2$, donde a, b y c representan la medida de la longitud de los lados de los cuadrados involucrados. Luego establecieron que una misma representación para el teorema cuando se usan triángulos es $b_1h_1 + b_2h_2 = b_3h_3$, donde b_i y h_i representan las medidas de uno de los lados del triángulo y las alturas correspondiente a dicho lado para cada caso. Así con esto, expresaron por medio del lenguaje simbólico-algebraico la generalización del teorema para una terna de superficies cualesquiera como sigue: $A_{s1} + A_{s2} = A_{s3}$, donde A_{si} corresponde con el área de la superficie i dispuesta en un determinado lado del triángulo rectángulo.

Otro asunto que nos llamó la atención al momento de realizar el trabajo con los aprendices, emerge en el momento en que uno de ellos formula el siguiente cuestionamiento: si el teorema de Pitágoras es "universal" (en el sentido de ser un método para la obtener la suma [o diferencia según sea el caso] de cualesquiera dos superficies) ¿por qué se nos enseña siempre la versión para cantidades superficiales cuadradas? Esta pregunta nos generó gran sorpresa, principalmente porque no teníamos una respuesta concreta y plausible a tal cuestionamiento.

Luego de documentarnos, creemos que una respuesta admisible se basa en el estudio que hizo Euclides de este teorema en *Elementos*, al demostrarlo únicamente cuando las superficies dispuestas son cuadradas. Además, de acuerdo con Muñoz (2012), cuando él trabajaba con superficies de algún otro tipo, recurría a cuadrarlas para poder hacer uso de la proposición. Con base en esto, si bien abordamos en la propuesta de enseñanza el disponer las superficies en su forma original en los lados del triángulo rectángulo, también hubiésemos podido construir las tareas de forma que toda superficie no cuadrada, se cuadrara para poder hacer uso del teorema.

4.2. Momentos relevantes del trabajo llevado a cabo por los aprendices

Aquí haremos mención sobre dos momentos relevantes que sucedieron durante las sesiones de clase, en las cuales llevamos a cabo las actividades ilustradas a lo largo de este documento. Uno de tales momentos fue la conjetura propuesta por uno de los aprendices sobre la posibilidad de que el Teorema de Pitágoras se satisficiera para una terna de polígonos cualquiera.

Debemos reconocer que, al construir las actividades, no esperábamos que algún estudiante formulara la conjetura mencionada, teniendo en cuenta que en ese momento, solo habíamos abordado la situación para una terna de cuadrados. Estimábamos, quizás, que tal conjetura emergiera luego de cuestionar a los aprendices sobre la validez del teorema para una terna de cuadriláteros no necesariamente cuadrados, o de una terna de triángulos. Sin embargo, la producción de este aprendiz fue aprovechada por nosotras para conducir las actividades a la generalización del teorema, de una forma más ágil.

El segundo momento relevante surge cuando uno de los aprendices establece una condición supremamente necesaria para que el teorema de Pitágoras se satisfaga: las tres figuras dispuestas en los catetos del triángulo rectángulo deben ser semejantes. Parece apenas obvia la condición pero, desde un punto de vista estricto si, por ejemplo, elegíamos una terna de triángulos conformada por un triángulo isósceles, uno escaleno y uno equilátero; al disponerlos en los lados de un triángulo rectángulo, el teorema no se satisface necesariamente.

4.1. Posibles prospectivas del trabajo

Para terminar, vale la pena llamar la atención sobre un asunto importante. La propuesta de enseñanza sobre una concepción particular del Teorema de Pitágoras, y su correspondiente evaluación de acuerdo con los resultados obtenidos, nace como una necesidad al momento de abordar la noción de razón de proporcionalidad y de proporcionalidad, desde la perspectiva expuesta en Quintero-Suica y Valderrama (2015-a) para un par o pares de parejas de magnitudes superficiales.

Ahora bien, desde nuestra perspectiva, consideramos que el estudio de la noción de proporcionalidad constituye en sí misma una estructura conceptual, en tanto que se encuentra conformada por conceptos que se interrelacionan, y a su vez estos conceptos están constituidos de unos hechos o unidades, igualmente interrelacionados. Tal y como describimos el trabajo anteriormente, es importante notar la posibilidad de efectuar vínculos entre la estructura conceptual **Teorema de Pitágoras** y la estructura conceptual, que podemos denominar, **Noción de proporcionalidad**.

La conexión que puede ser constituida entre las dos estructuras conceptuales antes mencionadas, tiene su génesis en resaltar que, si bien el Teorema de Pitágoras es un instrumento que permite la obtención de la suma entre dos magnitudes superficiales, también permite conseguir la diferencia, igualmente entre dos superficies del mismo tipo. Al tener la capacidad de substraer dos superficies, se evoca el proceso de *antanairesis* (sustracción reiterada de una de las magnitudes a la otra) con el fin de obtener la razón de proporcionalidad entre tales magnitudes y, por tanto, poder “comparar” razones de proporcionalidad entre pares de parejas de superficies. Esta última prospectiva puede ser abordada por cualquier docente interesado en explorarla.

Bibliografía

Biggs, J., Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Gómez, P. (2006). *Análisis Didáctico en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*. En Bolea, María Pilar; Moreno, Mar; González, María José (Eds.), Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Muñoz, D. (2012). Análisis histórico y epistemológico de la noción de suma en Euclides. Santiago de Cali, Colombia. (Tesis de pregrado).

Quintero-Suica, D., & Valderrama, N. (2015-a). Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad. Tuxtla, Chiapas. México: CIAEM.

Quintero-Suica, D., & Valderrama, N. (2015-b). Una concepción del Teorema de Pitágoras y su enseñanza en la educación básica y media. Bogotá. Colombia: ENHEM5.

Rico, L. (1997). *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria*. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M.M. (Eds.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 15-38). Madrid: ice - Horsori.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114- 145.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 91-104.

Diana Quintero Suica. Licenciada en Matemáticas y estudiante de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Ha producido documentos tipo ponencia en eventos académicos nacionales e internacionales, y artículos en el ámbito de la enseñanza del Álgebra, la Estadística, la Historia de la Matemática como recurso didáctico y la Teoría de números.
Email: diquinteros@upn.edu.co

Natalia Valderrama Ramírez. Licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Colombia. Actualmente profesora de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad Santo Tomas de Colombia y profesora de Educación Básica y Media para la Secretaria de Educación. Ha producido artículos y ponencias a nivel nacional e internacional en el ámbito de la educación matemática.
Email: nataliavalderrama@ustadistancia.edu.co