La resolución de problemas y la formación y desarrollo de conceptos. El concepto de media numérica

Otilio B. Mederos Anoceto y José Enrique Martínez Serra

Resumen

En el trabajo se realiza el estudio del concepto de media numérica con dos objetivos fundamentales:

- Contribuir a la preparación de los profesores de matemática en la utilización de la resolución de problemas como un medio para facilitar la formación, el desarrollo y la generalización de conceptos matemáticos.
- Profundizar en las características particulares de los procesos de formación, desarrollo y generalización de los conceptos matemáticos.

Se ha escogido el concepto de media numérica porque en muchos cursos, su estudio sólo se limita a dar la definición de pocos objetos de su extensión como las medias aritmética, geométrica y armónica. El trabajo consta de cinco secciones con contenidos correspondientes a diferentes niveles de enseñanza.

Abstract

The study of the concept of numerical mean is carried out in this article with two main objectives:

- To contribute in the preparation of mathematical teachers using problems resolution to facilitate the formation, the development and the generalization of mathematical concepts.
- To understand the particular characteristics of the formation, development and generalization processes of the mathematical concepts.

The concept of numerical mean has been chosen because in many courses, its study is only limited to give the definition of few elements of its extension, as the arithmetic, geometric and harmonica means. The article contains five sections with contents corresponding to different teaching levels.

§1. La enseñanza y el aprendizaje de la matemática por medio de la resolución de problemas

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática por medio de la resolución de problemas están dirigidos a insistir en los procesos de pensamiento y de aprendizaje, tomando como campo de acción los contenidos matemáticos. Desde hace mucho tiempo en Psicología se han estudiado profundamente los procesos de formación, desarrollo (Vygotski, 1998) y generalización (Davidov, 1981) de conceptos; no obstante, consideramos que hay mucho que hacer en esta dirección con relación a la utilización de la resolución de problemas con este fin en matemática.

En este sentido Miguel de Guzmán (1993) plantea: «Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida; otras, un tanto confusamente perfilada y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra». Siguiendo la idea de Guzmán, tenemos el criterio que algunas de las características que debe tener un problema son: ser accesible a los estudiantes; o sea, que estos conozcan recursos y contenidos matemáticos para su solución y de esta forma estén en condiciones de desarrollar diferentes estrategias para acceder y utilizar dichos recursos en la resolución del problema; que propicien que los estudiantes sientan una motivación intrínseca y que se diviertan con la actividad mental que requiere su solución; que se vean obligados a utilizar diferentes objetos matemáticos y que permitan la aplicación de ideas matemáticas importantes; que faciliten el desarrollo de la intuición y la creatividad; que puedan generalizarse a otros contextos y de esta forma facilitar que los estudiantes planteen nuevos problemas, en particular de su vida, etc.

Algunas de las acciones que hemos aplicado con buenos resultados al utilizar la resolución de problemas como un medio para la enseñanza - aprendizaje de la matemática son las siguientes:

1. Insistir en que la obtención de la solución de un problema no debe considerarse como la etapa final del mismo. Una vez que se haya obtenido su solución, se debe realizar un análisis de las ventajas, calidad o deficiencias de las estrategias o métodos utilizados en el proceso de resolución; ya que este tipo de análisis desempeña un papel fundamental en el desarrollo y aprendizaje de la matemática.

2. Aconsejar varias formas de resolución de un problema teniendo en cuenta los diferentes estilos de aprendizajes de los estudiantes, mediante la orientación de su análisis desde el punto de vista de diferentes contextos matemáticos, por ejemplo, geométrico, algebraico, aritmético, funcional, etc. De acuerdo a nuestra experiencia, por lo general, los estudiantes que llegan a la universidad han desarrollado muy pocas habilidades en la utilización de diferentes vías para resolver un problema, y lo que resulta más preocupante, terminan su carrera sin esta habilidad.

3. Utilizar problemas adecuados que motiven y faciliten la formación y desarrollo de conceptos.

4. Utilizar cadenas de del tipo (problema planteado – problema resuelto – nuevos problemas planteados) que motiven y faciliten diferentes gene-

ralizaciones de un concepto teniendo en cuenta el desarrollo del tipo de pensamiento que corresponde a cada nivel de enseñanza.

5. Ofrecer impulsos y adecuados niveles de ayuda para que los estudiantes sientan la necesidad, una vez solucionado el problema, de plantear nuevos problemas dirigidos, por ejemplo, a eliminar alguna restricción bajo la cual fue resuelto, a un contexto más general dentro de la matemática, o a resolver un problema de su vida relacionado con el problema resuelto.
6. Motivar el estudio de un nuevo tema mediante el planteamiento de un conjunto de problemas que le permitan a los estudiantes comprender la importancia de dicho tema, y que resolverán durante el desarrollo del mismo. Estos problemas pueden estar relacionados con el desarrollo histórico del tema, con aplicaciones, con situaciones del contexto de los estudiantes, etc.
7. Tener presente que el método de enseñanza–aprendizaje mediante la resolución de problemas debe desarrollar habilidades para que los estudiantes resuelvan problemas de su vida.
8. Utilizar la resolución de problemas para que los estudiantes participen en la construcción de la matemática que aprenden y para que le encuentren un adecuado sentido a sus técnicas, ideas, objetivos, estructuras, etc.

§2. Ideas generales sobre los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos

La formación de un pensamiento científico – teórico en los estudiantes es una exigencia del carácter científico en la educación. Para ello se requiere de un estudio amplio del sentido lógico y teórico – cognitivo de los procesos y formas de pensamiento, sobre todo de los procesos de abstracción, generalización y de formación de conceptos. Estos procesos, independientemente de sus singularidades, tienen una extraordinaria relación y unidad.

Algunas acciones que son útiles para que los estudiantes participen en estos procesos son las siguientes:

- Se le presenta a los estudiantes cierto número de objetos, especialmente seleccionados, con el objetivo que los analicen y los comparen.
- Se ayude (de impulsos) a los estudiantes para que seleccionen propiedades de cada objeto, los comparen con los otros objetos y no consideren las propiedades no comunes.

– Determinar finalmente un conjunto de propiedades comunes a todos los objetos analizados.

– Del conjunto de propiedades comunes se debe seleccionar un conjunto mínimo de propiedades (esenciales), a partir de las cuales se puedan obtener todas las demás propiedades comunes.

– Utilizar una palabra para nombrar la clase de todos los objetos que cumplen las propiedades esenciales.

En la figura 1 se ilustra como se relacionan algunos de los procesos que intervienen en los procesos de formación y de las primeras generalizaciones del concepto en estudio en este trabajo.

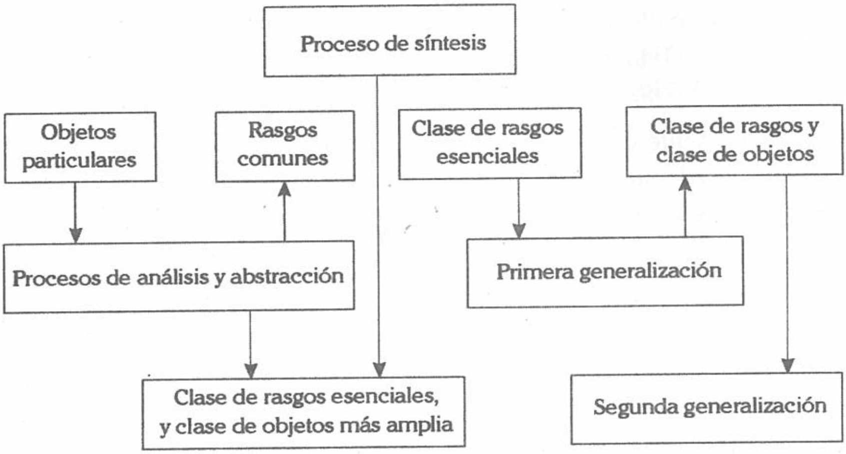

Figura 1

§3. Problemas sencillos de geometría plana que conducen a diferentes medias de dos números reales positivos

El objetivo de estos problemas es mostrar a los profesores cómo es posible facilitar la presentación de un conjunto de objetos numéricos que constituyen su solución, y de esta forma comenzar a llamar la atención de los estudiantes sobre estos números. Si se presentan colecciones de problemas cuya solución numérica también conducen a cada uno de estos números, los estudiantes comenzarán a tener interés por ellos y entonces pueden ser guiados para que sientan la necesidad de encontrar algunos rasgos comunes. El problema que a continuación se plantea ha sido tomado del artículo (Maor, 1977).

Problema 1

Dado un rectángulo de lados a y b, se quiere construir un cuadrado equivalente de lado l, que cumpla una de las propiedades siguientes:

1. El cuadrado tiene el mismo perímetro que el rectángulo.-

Esta propiedad se expresa matemáticamente por la igualdad $2(a + b)=4l$, de donde resulta que $l= \frac{1}{2}(a + b)$.

Una vez que se ha obtenido esta solución, es muy importante que se plantee a los alumnos el ejercicio siguiente:

Ejercicio 1. Probar que si se representan en el eje real los números a, b y $\frac{1}{2}(a + b)$, el punto correspondiente a $\frac{1}{2}(a + b)$ ocupa el punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos correspondientes a los números a y b.

Otra variante de solución apropiada para los estudiantes con un estilo de aprendizaje preferentemente visual o físico, porque puede ilustrarse geométricamente, se basa en el razonamiento siguiente: el cuadrado se puede obtener reduciendo el lado mayor b en una cantidad r y aumentando el lado a del rectángulo en una misma cantidad r, hasta que $a+ r= b - r$. En efecto, de la igualdad anterior se obtiene $r = \frac{1}{2} (b - a)$ y de $l = a + r$ resulta que $l = \frac{1}{2} (a + b)$.

Para que, dados dos números a y b, el número $\frac{1}{2} (a + b)$ adquiera un significado para los alumnos es muy importante que se presenten varios problemas cuya solución conduzca a ese número, o en cuyo proceso de solución juegue un papel importante ese número. Sólo entones debemos darle el nombre de media aritmética y utilizar la notación MA, o sea, $MA = \frac{1}{2}(a + b)$.

2. El cuadrado tiene la misma área que el rectángulo.

Siguiendo la primera idea, ahora rutinaria, que condujo a la solución del caso anterior; los estudiantes pueden llegar a que $ab = l^2$, o se a, $l = \sqrt{ab}$.

Si se quiere favorecer a los alumnos visuales se puede utilizar e ilustrar geométricamente la idea siguiente: contraer el lado mayor b multiplicándolo por el número $1/r$ y dilatando el lado menor a del rectángulo multiplicándolo por el número r (r>1) de tal forma que $l = \dfrac{b}{r} = a\,r$

de donde resulta que $\mathrm{r} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}$ y $l = \sqrt{ab}$.

Un ejercicio muy útil para que los estudiantes puedan determinar algunos rasgos comunes de las medias que van obteniendo es el siguiente:

Ejercicio 2: Pruebe que los números *a, b* y $\sqrt{ab}$ satisfacen la cadena de desigualdades $a \leq \sqrt{ab} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad.

Es recomendable plantear a los estudiantes varios problemas cuya solución conduzca al número. Cuando este número haya adquirido importancia para los estudiantes se le puede llamar media geométrica de *a* y *b*, e indicarse por $MG = \sqrt{ab}$.

3. Las diagonales del cuadrado tienen la misma longitud que las del rectángulo.

Siguiendo la primera idea rutinaria con que se han resuelto los dos casos anteriores se llega a la igualdad $\sqrt{2}l = \sqrt{a^2 + b^2}$, y de aquí resulta que $l = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

Ejercicio 3. Pruebe que $a \leq \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad.
Después de plantear otros problemas cuya solución conduzca al número $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$, se puede indicar este número por *MC* y denominarlo media cuadrática de *a* y *b*.

4. El cuadrado tiene igual relación área / perímetro que el rectángulo.

Siguiendo la misma idea (rutinaria) se tiene que $\dfrac{l^2}{4l} = \dfrac{ab}{2(a+b)}$ de donde resulta $l = \dfrac{2ab}{a+b}$, o equivalentemente, $\left(\dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)\right)$. El número $l = \dfrac{2ab}{a+b}$ se denomina media armónica de a y b y se denota por MH.

Ejercicio 7. Pruebe que $a \leq \dfrac{2ab}{a+b} \leq b$ y que las igualdades se tienen si y sólo si a = b.

5. El cuadrado tiene igual relación área / diagonal que el rectángulo.

Siguiendo la idea rutinaria usual se llega a la igualdad $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1^2}{\sqrt{2}\,1}$,

de donde se obtiene que $1 = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} \quad \left(\frac{1}{1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\right)$

De la expresión entre paréntesis se concluye que el recíproco del lado del cuadrado debe ser igual a la media cuadrada de los recíprocos de los lados del rectángulo. Por esta razón, se denomina al número $\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$ media cuadrática armónica de los números *a* y *b*, y este número se indica por *MHC*.

Ejercicio 8. Pruebe que $a \leq MHC \leq b$ y que las igualdades se tienen si y sólo si, a = b.

Ejercicio 9. Pruebe que la media geométrica de dos números a y b es igual a la media geométrica de las medias cuadrática y armónica cuadrática de dichos números.

Conclusiones parciales

1. Se ha indicado cómo proceder para que dados dos números a y b se contribuya a que tengan un significado especial para los estudiantes los números:

$$\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}, \quad \frac{2ab}{a+b}, \quad \sqrt{ab}, \quad - \qquad + b), \quad \sqrt{\frac{+b^2}{2}}$$

2. Se han planteado cinco ejercicios que están dirigidos a destacar dos rasgos comunes a las cinco medias anteriores:

   2.1. Si M es uno cualquiera de esos cinco números, entonces $a \leq M \leq b$

   2.2. Se cumple que $M = a$ si, y sólo si, $a = b$.

§4. Primeras abstracciones y primera generalización vinculadas al concepto de media numérica

En esta sección, trabajando sólo con la forma de las expresiones de cuatro de las cinco medias introducidas en la sección anterior, se obtendrán expresiones que admiten, a partir de su comparación, una generalización; o sea, se realiza abstracción de todas las demás características y rasgos de estas cuatro medias y, analizando y trabajando con la forma de sus expresiones, se llega a nuevas expresiones que permiten una primera generalización. De esta manera se ejemplifican los pasos de la figura 1, correspondientes a los procesos de análisis, abstracción, síntesis y primera generalización.

Dados dos números a y b, se deben transformar las expresiones de *MHC, MH, MH, MC* hasta escribirlas en la forma

$$MHC=\left(\frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}\right)^{\frac{1}{-2}},\quad MH=\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{-1}},\quad MA=\left(\frac{a^{1}+b^{1}}{2}\right)^{\frac{1}{1}},\quad MC=\left(\frac{a^{2}+b^{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

Estas expresiones sugieren sustituir las notaciones *MHC, MH, MH* y *MC* por M_{-2}, M_{-1}, M_1 y M_2 respectivamente, y utilizar una expresión general para las cuatro medias; i. e.

$$M_p=\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},\quad p\in\{-2,-1,1,2\}$$

Si tenemos en cuenta que $\{-2,-1,1,2\}\subset N\subset Z\subset Q\subset R$; entonces no es difícil guiar a los estudiantes para que planteen una primera generalización del concepto de media numérica con una extensión de cuatro objetos a un concepto de media numérica con una extensión con infinitos objetos.

Definición 1. Se denomina media p-ésima de dos números reales a y b, al número , y se indica por M_p.

Ejercicio 10. Pruebe que $a\leq M_p\leq b$ y que las igualdades se tienen si, y sólo si, a = b.

Problema 6. Dado un romboide de lados a y b, determinar el lado *l* de un rombo que mantenga una característica del romboide. Determine, además, en qué casos del problema 1, el lado del rombo es una media numérica de las longitudes de los lados del romboide.

§5. Abstracciones más profundas conducentes a la determinación de rasgos esenciales

El ejercicio 10 de §4 nos permite asegurar que toda media p-ésima tiene esos dos rasgos comunes. A continuación, utilizando expresiones funcionales, enunciamos esos rasgos en forma de propiedades para las medias p-ésimas; con lo que se ejemplifica cómo es posible iniciar los procesos que conducen a la segunda generalización de la figura 1.

Dados dos números a y b cada media cumple:

(i) Es menor o igual que max{a, b} y mayor o igual que min{a, b}; i. e.

$$min\{a,b\} \leq M_p(a,b),\ G(a,b) \leq max\{a,b\}$$

(ii) Es igual a max{a, b} e igual a min{a, b} si, y sólo si, a = b; o sea

$$min\{a,b\} = M_p(a,b) = G(a,b) = max\{a,b\} \text{ si, y sólo si, } a = b$$

A continuación exponemos una idea de cómo proceder para ayudar a los estudiantes a que comprendan que las medias introducidas satisfacen otra propiedad muy importante. Esto puede hacerse por medio del planteamiento del ejercicio siguiente:

Ejercicio 11. Encuentre los valores de M_{-2}, M_{-1}, G, M_1 y M_2 que corresponden a los valores de $a_k = \frac{1}{k}a$ y $b_k = \frac{1}{k}b$, para a = 10, b = 100 y k = $\overline{1,10}$;

y para a = 1, b = 2 y k = $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}$.

Posteriormente se puede guiar a los alumnos para que planteen y prueben la hipótesis siguiente: si se sustituyen a y b por ta y tb; entonces el valor de M_p correspondiente a los valores ta y tb es igual al valor $tM_p(a,b)$.

Además, se pueden presentar ejercicios visuales y físicos que ayuden a que los alumnos concluyan que la media geométrica y cada media p-ésima de dos números satisfacen la relación:

(iii) Es invariante por un cambio de escala, es decir, $M_p(ta, tb) = t\,M_p(a, b)$ y $G(ta, tb) = tG(a, b)$.

En el artículo (Nicolai, 1977) se presenta una definición del concepto de media que toma estas tres propiedades como el contenido de este concepto.

Definición 2. Dados dos números reales positivos a y b, todo número

M(a, b) que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) recibe el nombre de media numérica de a y b.

La definición 2 constituye una generalización de las cinco medias introducidas en §3.

Resulta muy importante que el profesor plantee la pregunta: ¿Existen medias numéricas para a y b que satisfacen la definición 2 y que no son medias p-ésimas?. Esta pregunta puede hacerse con diferentes objetivos: para que los estudiantes determinen si la segunda generalización es más amplia (si la respuesta es positiva) o de igual amplitud (si la respuesta es negativa) y para que los estudiantes comprendan el concepto de extensión de un concepto.

Ejercicio 12. Dados los números reales a, b, p_1 y p_2; pruebe que

$$M_{p_1p_2}(a,b)=\left(\frac{a^{p_1}b^{p_2}+a^{p_2}b^{p_1}}{2}\right)^{\frac{1}{p_1+p_2}}$$, satisface la definición 2 si, y sólo si, $p_1p_2 \geq 0 \quad y \quad p_1+p_2 \neq 0.$

Del planteamiento de este ejercicio se concluye que la pregunta anterior tiene una respuesta afirmativa; y que por lo tanto, el concepto de media que corresponde a la definición 2 tiene una extensión más amplia que el de media p-ésima.

Conclusiones: Todo concepto posee dos características lógicas muy importantes, la extensión y el contenido. La extensión es la colección de todos los objetos que corresponden al concepto y el contenido es un conjunto de propiedades que constituyen condiciones necesarias y suficientes para que un objeto pertenezca a la extensión de un concepto.

En este artículo se han utilizado cadenas de problemas y ejercicios para facilitar un primer proceso de formación, desarrollo y generalización del concepto de media que corresponde de manera general al diagrama de la sección 2, y que está relacionado fundamentalmente con la ampliación sucesiva de la extensión del concepto de media. Estamos ahora en condiciones de realizar un estudio más amplio del contenido de dicho concepto; o sea, de determinar propiedades adicionales de las medias numéricas. Por ejemplo, la propiedad (i) del contenido de este concepto nos dice que todas las medias de dos números a y b están entre a y b; luego, es natural preguntarnos si existe alguna relación de orden para las medias numéricas.

En la segunda parte de este artículo, se utilizará la resolución de problemas para facilitar la respuesta a esta pregunta.

Bibliografía

Davidov, V. (1981): *Tipos de generalización en la enseñanza*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.

De Guzmán, M. (sin fecha): *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Organización de estados iberoamericanos para educación, la ciencia y la cultura. Editorial Popular. ISBN: 84-7884-092-3. Depósito Legal: M-9207-1993

Lauber, M.R. (1977): Commenting on Skidell's "The Harmonic Mean. A Monograph and Some Problems". En Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. May. 389.

Maor, E. (1977): "A Mathematicians repertoire of means". Mathematics Teacher 70. January. 20-25.

Nicolai, M.B. (1977): Commenting on Maor's "A Mathematicians repertoire of means". In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. September. 486.

Vygotski L.S., (1998): *Pensamiento y Lenguaje*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Segunda Edición.

Otilio B. Mederos Anoceto. Profesor Titular e investigador del Centro de Estudios de Educación de la Universidad Central «Marta Abreu» de las Villas. Cuba. Teléfono: 53 42 208111

José Enrique Martínez Serra . Profesor Asistente de Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Central de las Villas. Cuba. Teléfono: 53 42 281109