Rev.Acad.Canar.Cienc., IX (Núm. 1), 125-130 (1997)

UN PROBLEMA SOBRE DOBLE RECORRIDO EN GRAFOS CÚBICOS

DAVID SOLER FERNÁNDEZ
Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia.
Camino de Vera, 14, 46071 Valencia. e-mail dsoler@mat.upv.es

Abstract

It is known in Graph Theory that a cubic graph with a vertices number multiple of 4, does not admit a bidirectional double tracing without U-turns, that is, without traversing the same edge two times consecutively. But, which is the minimum number of U-turns that a bidirectional double tracing makes over such kinds of graph?

We prove in this paper that if a cubic graph G with a vertices number multiple of 4, has cyclic edge-connectivity greater than 3, or equal to 3 -if in this last case it has only one 3-cyclic edge cut-, then G admits a bidirectional double tracing with only one U-turn.

Resumen

Es conocido en Teoría de Grafos que un grafo cúbico con un número de vértices múltiplo de 4, no admite un doble recorrido bidireccional sin giros en U, esto es, sin pasar dos veces consecutivas por la misma arista. Pero ¿cuál es el mínimo número de giros en U que realiza un doble recorrido bidireccional sobre tales grafos?

Es este artículo demostramos que si un grafo cúbico G con un número de vértices múltiplo de 4, tiene ciclo-aristo-conectividad mayor que 3, o igual a 3, si en este caso G sólo contiene una 3-ciclo aristo-cortadura, entonces G admite un doble recorrido bidireccional con un solo giro en U.

Palabras clave: grafo cúbico, doble recorrido bidireccional, giro en U.

1. INTRODUCCIÓN

Un antiguo problema de Teoría de Grafos planteado por Ore [5], es el siguiente:

"Dado un grafo conexo, ¿existe una cadena cerrada que pasa por cada arista exactamente dos veces, una en cada sentido de recorrido y sin atravesar dos veces consecutivas la misma arista, lo que es lo mismo, sin realizar giros en U?"

La respuesta a esta cuestión es útil para resolver problemas reales de rutas de vehículos, ya que los giros en U son los giros prohibidos por antonomasia en recorridos de vehículos, especialmente pesados. Así, en [4] se puede encontrar una aplicación a máquinas quitanieves: una máquina quitanieves ha de recorrer los dos sentidos de las carreteras o autopistas de una determinada zona minimizando el número de giros en U.

El problema de Ore ha sido estudiado desde un punto de vista teórico por varios autores; por ejemplo Troy [7], Brenner y Lindon [2] o Thomassen [6]. Este último caracterizó los grafos que admitían respuesta positiva a la pregunta de Ore, aunque esta caracterización no es muy efectiva desde un punto de vista práctico como se observa en [1], donde los autores, en base a algunos resultados teóricos de Thomassen, exponen un algoritmo que en tiempo polinomial encuentra la cadena cerrada sin giros en U correspondiente (si existe).

En cualquier caso, lo que queda probado a lo largo de la literatura científica es que sólamente en los vértices de grado tres de un grafo, es donde en general no se puede controlar la no aparición de giros en U en una cadena cerrada de las características del problema de Ore. Es por ello que en este artículo nos restringinos a los grafos cúbicos, y dentro de ellos, a aquellos con ciclo-aristo-conectividad mayor que 3, para los que ya existen algunos resultados sobre el tema.

El problema que aquí estudiamos, parcialmente resuelto por Thomassen [6] es:

Dado un grafo cúbico con ciclo-aristo-conectividad mayor que 3, ¿cuál es el mínimo número de giros en U que realiza una cadena cerrada que pasa exactamente dos veces por cada arista, una en cada sentido de recorrido?

La respuesta es 0 si el número de vértices no es divisible por 4 y 1 si es divisible por 4 (es fácil ver que todo grafo cúbico tiene un número par de vértices).

Para tal fin, en la Sección 2, damos las definiciones y resultados básicos necesarios de Teoría de Grafos, así como los resultados precedentes sobre este tema, siendo en la Sección 3 donde exponemos nuestros propios resultados.

2. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS

Sea $G = (V, E)$ un grafo con V su conjunto de vértices, que también denotaremos por $V(G)$, y E su conjunto de aristas. Diremos que G **conexo** si cada par de vértices del grafo está unido por un camino. En caso contrario diremos que no es conexo o que es **disconexo**. Llamaremos **componente conexa** de G a todo subgrafo conexo maximal en G. Diremos que G es **cúbico** si todos sus vértices tiene grado 3 ($d(v) = 3\ \forall v \in V$). Llamaremos **girth** de un grafo G y lo denotaremos por $g(G)$ a la longitud del ciclo (si existe alguno) con menos aristas en G.

Diremos que G es **k-conexo** si al eliminar un número inferior a k vértices de G, el grafo resultante es conexo. La **conectividad** $k(G)$ de G es el mínimo número de vértices de G cuya eliminación desconecta el grafo o lo convierte en trivial. Si G es disconexo, $k(G) = 0$. Análogamente diremos que G es **λ-aristo conexo** si al eliminar un número inferior a λ aristas de G, el grafo resultante es conexo. La **aristo-conectividad** $\lambda(G)$ de G es el mínimo número de aristas cuya eliminación desconecta el grafo, siendo $\lambda(G) = 0$ si G es disconexo. Por último diremos que G es **λ_c-cíclicamente aristo conexo** si al eliminar un número inferior a λ_c aristas de G, G no se desconecta en dos componentes conexas, cada una de las cuales contiene al menos un ciclo. La **ciclo-aristo-conectividad** $\lambda_c(G)$ de G es el mínimo número de aristas cuya eliminación desconecta G en dos componentes conexas, cada una de las cuales contiene al menos un ciclo, siendo $\lambda_c(G) = \infty$ si al quitar aristas de G nunca ocurre lo anterior.

Si G es conexo, llamaremos **cortadura (aristo-cortadura) (ciclo aristo-cortadura** (sólo si G es 3-conexo)) de G a un conjunto de vértices (aristas) (aristas) de G tal que al eliminarlos, el grafo resultante es disconexo (es disconexo) (tiene dos componentes cada una de las cuales contiene al menos un ciclo).

Si G es conexo, llamaremos **doble recorrido** en G, a una cadena cerrada que recorre cada arista de G exactamente dos veces. Diremos que un doble recorrido es **bidireccional** si cada arista es recorrida exactamente una vez en cada sentido y diremos que un doble recorrido es **fuerte** si es bidireccional y no realiza giros en U.

Notar que el grafo puede no ser simple, por lo que entenderemos que la cadena cerrada realiza un giro en U si yendo del vértice u al v por una arista incidente a ambos, vuelve inmediatamente de v a u por la misma arista.

Todo grafo conexo admite un doble recorrido bidireccional, pues si desdoblamos cada arista en dos arcos de sentidos opuestos, el grafo dirigido resultante es euleriano de forma evidente. El problema consiste pues, en saber *cuándo un grafo conexo contiene un doble recorrido fuerte*. Fue Ore [5] el primero en hacer alusión a este problema, aunque se limitó únicamente a proponerlo al lector al final de su artículo. El primer resultado teórico relativo a este problema viene dado por Troy [7]:

Teorema 1 *Sea un grafo $G = (V, E)$ cumpliendo que $d(v) \leq 3 \; \forall v \in V$. Si $|\{v \in V \; / \; d(v) = 3\}| \equiv 0 \pmod 4$, G no admite ningún doble recorrido fuerte.*

Troy encontró algunos ejemplos de grafos cúbicos con $4k + 2$ vértices (k natural) que no admitían doble recorrido fuerte, pero no consiguió encontrar ninguno que fuera 3-conexo, por lo que dejaba abierta la conjetura de que todo grafo cúbico 3-conexo con 4k+2 (k natural) vértices admitiera un doble recorrido fuerte. La incerteza de esta conjetura fue demostrada por Thomassen [6], quien probó que si en un grafo cúbico 4-cíclicamente aristo conexo se cambia cada vértice por un triángulo, el grafo resultante no admite un doble recorrido fuerte. Thomassen, dentro de un caso más general, demostró también el siguiente resultado:

Teorema 2 *Un grafo cúbico $G = (V, E)$ con $\lambda_c(G) > 3$ admite un doble recorrido fuerte si $|V| \equiv 2 \pmod 4$.*

Los dos siguientes resultados son conocidos en Teoría de Grafos.

Lema 1 *Todo grafo G cumple que*

$$k(G) \leq \lambda(G) \leq \lambda_C(G)$$

Lema 2 *Dado G grafo cúbico con $k(G) < 3$, se cumple que*

$$k(G) = \lambda(G) = \lambda_C(G)$$

Una demostración del Lema 2 puede ser encontrada en la página III.37 de [3].

3. RESULTADOS PROPIOS

Como antes hemos mencionado, a través del Teorema 2, Thomassen demuestra que un grafo cúbico con un número de vértices no múltiplo de 4, admite un doble recorrido fuerte si $\lambda_C(G) > 3$, y sabemos que si el número de vértices es múltiplo de 4, no admite doble recorrido fuerte, pero *¿cuántos giros en U realizará un doble recorrido bidireccional con mínimo número de giros en U en este último caso?* La respuesta es exactamente uno, como veremos en el siguiente teorema, que necesita de dos lemas previos. De esta forma, completamos el estudio sobre doble recorrido bidireccional con mínimo número de giros en U en grafos cúbicos con $\lambda_C(G) > 3$.

Lema 3 *Dado $G=(V,E)$ grafo cúbico conexo con $|V| > 4$, si $\lambda_C(G) > 3$, entonces $g(G) > 3$.*

Demostración:

$g(G) \geq 3$, pues en caso contrario se puede comprobar que $k(G) \leq 2$ y por el Lema 2 $\lambda_C(G) \leq 2$. Supongamos ahora que $g(G) = 3$ y eliminemos de G los vértices de un ciclo de longitud tres junto con sus aristas incidentes. Sea $G' = (V', E')$ el grafo resultante, veamos que G' contiene un ciclo, con lo cual se cumpliría que $\lambda_C(G) = 3$ lo que contradice las hipótesis.

En efecto, sabemos que $|E| = 3|V|/2$, $|V'| = |V| - 3$ y $|E'| = 3|V|/2 - 6$. Si G' no tuviera ningún ciclo, tendría a lo sumo $|V| - 4$ aristas, pero $|V| - 4 < 3|V|/2 - 6$ pues en caso contrario, simplificando la desigualdad obtendríamos que $|V| \leq 4$ lo que contradice las hipótesis.▮

El recíproco del Lema 3 no es cierto, como se observa en el grafo de la Figura 1.

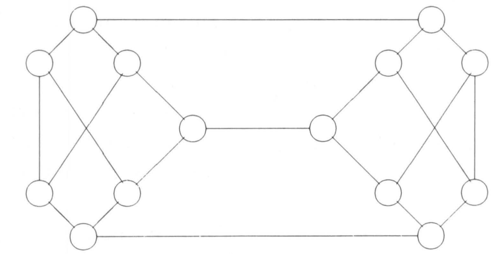

Figura 1. Grafo cúbico 3-cíclicamente aristo conexo con girth 4.

Lema 4 *Sea $G = (V, E)$ grafo cúbico con $|V| > 4$, $\lambda_C(G) > 3$ y consideremos un ciclo de longitud mínima en G. Dadas dos aristas del ciclo, adyacentes ambas a una tercera arista del ciclo, si partimos cada una de las dos aristas en dos, introduciendo un vértice interior a cada una de ellas y añadimos una arista uniendo esos dos vértices, el nuevo grafo resultante G^* cumple que $\lambda_C(G^*) > 3$.*

Demostración:

$K(G) = 3$ por el Lema 2, ya que $\lambda_C(G) > 3$. Es evidente entonces que $K(G^*) = 3$ y por el Lema 1 se tiene que $\lambda_C(G^*) \geq 3$. Supongamos pues que $\lambda_C(G^*) = 3$ y sea (u, v) la nueva arista introducida. Dada una 3-aristo cortadura en G^* que de lugar a dos componentes conexas C_1 y C_2 con al menos un ciclo cada una, la arista (u, v) no puede formar parte de esa cortadura pues $\lambda_C(G)$ sería menor que 3. Luego (u, v) pertenece a una de las dos componentes conexas, supongamos a C_1.

Por otra parte, por el Lema 3 $g(G) > 3$ y por tanto $g(G^*) = 4$. Así pues todo ciclo en C_1 tiene longitud superior a tres, luego C_1 tiene al menos dos vértices distintos de u y v, que por tanto son de G. El subgrafo de G inducido por $V(C_1)$, llamémosle G_1, contiene al menos un ciclo ya que su número de aristas es $3(|V(G_1)| + 1)/2 - 3$, y si no tuviera ciclos, este número sería no superior a $|V(G_1)| - 1$; de esta desigualdad se obtendría que $|V(G_1)| \leq 1$, lo que es absurdo pues hemos visto que G_1 tenía al menos dos vértices. Así pues $\lambda_C(G) \leq 3$ lo que contradice las hipótesis. Por tanto $\lambda_C(G^*) > 3$.∎

Teorema 3 *Sea $G = (V, E)$ grafo cúbico con $\lambda_C(G) > 3$. Si $|V| \equiv 0 \pmod 4$, G admite un doble recorrido bidireccional con un solo giro en U.*

Demostración:

Consideramos un ciclo de longitud mínima en G, modificamos las aristas (r, s) y (w, t) elegidas como se explica en el enunciado del Lema 4, introduciendo los vértices u y v respectivamente y la arista (u, v) (ver Figura 2). Por el Lema 4, G^* cumple las hipótesis iniciales de este Teorema, y puesto que $|V(G^*)| \equiv 2 \pmod 4$, por el Teorema 2 G^* contiene un doble recorrido fuerte T. Supongamos sin pérdida de generalidad que T contiene las secciones (w, v, t), (t, v, u, r), (s, u, v, w) y (r, u, s). Distinguimos dos casos:

(a) *Las secciones (s, u, v, w), (t, v, u, r) y (w, v, t) se encuentran en ese orden en T.* Cambiando los tres pasos por T en v, (u, v, w), (t, v, u) y (w, v, t) por los pasos (u, v, u), (t, v, t) y (w, v, w), obtenemos un doble recorrido T' en G^* con exactamente tres giros en U, todos ellos en v. Comprimiendo la sección de T' (s, u, v, u, r) a (s, u, r), cruzando los dos giros en U restantes en v y eliminando entonces u y v del recorrido, obtenemos dos circuitos en G que se podrán cruzar (unir) en un vértice de G formando un doble recorrido bidireccional en G con exactamente un giro en U el cual se producirá en el vértice donde se han cruzado ambos circuitos.

(b) *Las secciones (s, u, v, w), (w, v, t) y (t, v, u, r) se encuentran en ese orden en T.* Si la transición (r, u, s) se encuentra en T entre la primera y segunda sección de las anteriores o entre la segunda y tercera, hacemos en el vértice u lo dicho en el caso **(a)** para v, con lo que también obtenemos un doble recorrido bidireccional en G con exactamente un giro en U. Si por contra (r, u, s) se encuentra entre la tercera y la primera sección de las anteriores (ver Figura 3), al eliminar los vértices u y v introduciendo en T los arcos (w, t), (t, w), (s, r) y (r, s), obtenemos dos circuitos en G, que se podrán cruzar en un vértice, dando lugar a un doble recorrido bidireccional en G con exactamente un giro en U.∎

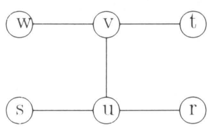

Figura 2.

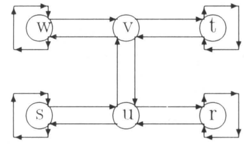

Figura 3.

Por último, el Teorema 3 puede ser mejorado añadiendo el siguiente caso:

Teorema 4 *Sea G=(V,E) grafo cúbico con* $\lambda_C(G) = 3$ *y* $|V| \equiv 0 \pmod 4$. *Si G contiene exactamente una 3-ciclo-aristo-cortadura, G admite un doble recorrido bidireccional con un solo giro en U.*

Demostración:

Sean C_1 y C_2 las componentes conexas resultado de eliminar la 3-ciclo-aristo-cortadura de G. Sea (u, v) arista de la 3-ciclo-aristo-cortadura y sean $(w, u) \in C_1$ y $(v, s) \in C_2$. Si añadimos dos vértices y una arista a G sobre (w, u) y (v, s) tal como se especifica en el enunciado del Lema 4 y sea G' el grafo resultante, es evidente que $\lambda_C(G') > 3$, luego por el Teorema 2 admite un doble recorrido fuerte. Aplicando entonces el mismo procedimiento que en la demostración del Teorema 3 obtendremos un doble recorrido bidireccional en G con un solo giro en U.∎

En ambos casos, el doble recorrido bidireccional con un solo giro en U, puede ser obtenido combinando los pasos realizados en las respectivas demostraciones, con el algoritmo para buscar un doble recorrido fuerte dado por Benavent y Soler [1].

4. BIBLIOGRAFÍA

1. BENAVENT, E. and SOLER, D. (1996). Searching for a Strong Double Tracing in a Graph. Remitido a la revista *Top*.

2. BRENNER, J.L. and LINDON, B.C. (1984). Doubly Eulerian Trails on Rectangular Grids. *Journal of Graph Theory* 8, 379-385.

3. FLEISCHNER, H. (1990) *Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Vol. 1.* Ann. Discrete Math. 45, North-Holland, Amsterdam.

4. LEMIEUX, P. F. and CAMPAGNA, L. (1984). The snow ploughing problem solved by a graph theory algorithm. *Civil Eng. Systems* 1, 337-341.

5. ORE, O. (1951). A Problem Regarding the Tracing of Graphs. *Elem. Math* 6, 3 49-53.

6. THOMASSEN, C. (1990). Bidirectional Retracting-free Double Tracing and Upper Embeddability of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory* Series B 50, 2 198-207.

7. TROY, D.J. (1966). On Traversing Graphs. *Amer. Math. Monthly* 73, 497-499.