Rev.Acad.Canar.Cienc., VIII (Núm. 1), 173-196 (1996)

Poincaré y la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales (II)

José Sabina de Lis

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna

Septiembre 1996

ABSTRACT. El presente trabajo es continuacion de un primer artículo (cf. [Sa]) sobre la vida y algunos aspectos de la obra de Henri Poincaré. Nos ocupamos aquí de sus contribuciones al problema de la integración de ecuaciones lineales de coeficientes algebraicos mediante la teoría de las funciones fuchsianas (automorfas), de su primer trabajo monográfico sobre el problema de los tres cuerpos, y de algunos detalles biográficos sobre la etapa final de su vida.

The present work is the continuation of a previous one (cf. [Sa] *) concerning some aspects of the life and mathematical work of Henri Poincaré. Here, his contributions to the integration of linear equations with algebraic coefficients by means of automorphic functions, his first monographic memory on the three-body problem, and some aspects of the last part of his life are considered.*

1. Introducción.

Este trabajo es la segunda entrega de una memoria sobre la vida y obra de Henri Poincaré que tuvo su origen en una conferencia del mismo título, que impartí en las facultades de Física y Matemáticas de la Universidad de La Laguna, en mayo de 1994. Ya se comentó en la primera parte [Sa], y es de sobra bien conocido, la ingente cantidad de trabajos y la amplia variedad de temas distintos –estrictamente matemáticos o del campo de la física– que fueron estudiados por Poincaré en algún momento de su vida.

La orientación dada a la conferencia y memoria que de ella surgió giró en torno a las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, como lector de un trabajo de esta naturaleza habría leido con fruición una descripción de sus trabajos seminales sobre topología algebraica y también algo de sus controvertidos resultados sobre la estabilidad de las masas fluidas en rotación, que constituyen los primeros trabajos conocidos sobre teoría de la bifurcación (problema en el que Lyapunov hizo aportaciones fundamentales desde su tésis [Sr]). Por tanto, la memoria "ideal" que sobre Poincaré me hubiera gustado escribir debería haber abarcardo además estos dos temas, y he de señalar –con tristeza– su ausencia significativa entre las líneas que siguen.

El autor expresa su gratitud a: A. Bruno, M. Flores, J. López-Gómez, A. Noda, M. Martínez, R. Ortega, J. Picazo y D. Salazar, por la documentación facilitada.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

En el §2 de esta segunda parte emprenderemos un periplo sobre los resultados de Poincaré en el estudio global de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes racionales y algebraicos. Para ello nos hemos apoyado en sus artículos originales sobre las funciones fuchsianas: [P-81,b,c,d], [P-82,b,c] y [P-84]. El §3 contiene una descripción de la memoria sobre el problema de los n-cuerpos que presentó Poincaré al premio convocado por el rey Oscar II de Suecia, con especial énfasis en los hallazgos históricos que sobre la concesión del premio y el contenido de la misma se han publicado recientemente ([A], [Ba], [G] y [Lt]). El trabajo termina con el §4 donde se dan algunos detalles biográficos más sobre la última etapa de su vida.

2. Las funciones automorfas.

Desde el comienzo mismo de su carrera, Poincaré abre tres frentes de ataque en el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales ([P-21]). El primero, analítico local, en la línea de su tésis y primer trabajo [P-78] ([Sa], §3.1), se ocupa del estudio de las singularidades. El segundo, geométrico local –describiendo las órbitas próximas a las órbitas singulares– y global –analizando el número y distribución de las órbitas singulares, y el panorama del espacio de fases– según el plan de sus trabajos [P-81,82,85,86] ([Sa], §3.2).

El tercero, analítico-global, al estilo de la teoría de las funciones elípticas y abelianas, se ocupa de las ecuaciones lineales. La empresa, que consiste en estudiar la estructura de las soluciones, consideradas como funciones definidas en el plano complejo $\mathbb{C}$, le lleva a introducir las funciones automorfas (que originalmente llama fuchsianas, en honor de Lazarus Fuchs) y a "integrar" las ecuaciones lineales de coeficientes algebraicos[1].

Las funciones automorfas generalizan las funciones periódicas y doblemente periódicas de una variable compleja. Cuando Poincaré, con 26 años, comienza a trabajar en el tema, las funciones elípticas –el ejemplo paradigmático de funciones doblemente periódicas– constituyen en sí mismas un robusto campo de investigación, al que han contribuido los mejores analistas del siglo XIX. Se llama elíptica a toda función de la forma

$$u(x) = \int_a^x R(\zeta, \sqrt{p(\zeta)})\, d\zeta,$$

donde $R(x, y)$ es una función racional y $P(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que cuatro. Desde los comienzos del cálculo infinitesimal este tipo de expresiones, no integrables por métodos elementales, hacen acto de presencia. Por ejemplo,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\mathrm{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = 4\int_0^b \frac{\sqrt{b^2 - ey^2}}{\sqrt{b^2 - y^2}}\, dy,$$

$e = 1 - \frac{a^2}{b^2}$, para hallar la longitud total de arco de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (quizás de ahí provenga la terminolgía). Fueron Euler y Legendre los primeros en estudiarlas, siendo el

[1] Clase más amplia que las de coeficientes racionales, como la ecuación hipergeométrica o las ecuaciones clásicas de segundo orden (v. [Sa], §3).

segundo quien las reduce a dos tipos básicos. Por ejemplo, la integral elíptica de primera especie:

$$u(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-k^2x^2}}\, d\xi, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

Los estudios fundamentales de la teoría se deben a Abel (1802-1829) y Jacobi (1804-1851). Al primero se deben las ideas claves que permiten descubrir sus propiedades geométricas, así como extenderlas al campo complejo. La genialidad de Abel consistió en estudiar la función inversa $x = x(u)$ en la integral precedente. Si $k = 0$, $x(u) = \text{sen } u$. Sin duda alguna, fue la periodicidad doble de $x = x(u)$ la propiedad más importante que descubrió. Tras la muerte prematura de Abel, es Jacobi quien saca partido a este nuevo enfoque, y de hecho escribe el primer tratado monográfico sobre el tema: "Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum". Nótese que el fenómeno de la periodicidad doble no es posible para funciones continuas de una de una variable real. Por otra parte, Jacobi demuestra en 1835 que toda función meromorfa posee a lo más dos períodos (cf [Kl]). En terminología moderna, se llama elíptica a toda función meromorfa $f : \mathbb{C} \to \Sigma$ (Σ la esfera de Riemann) que sea doblemente periódica (cf. [JS]), es decir, $\exists\ \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$ tal que:

$$f(z + \omega_1 + \omega_2) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Hacia 1860, Weierstrass abordó la teoría de las funciones elípticas desde el punto de vista de las series de potencias ([Kl]). Desarrolló su teoría en términos de lo que hoy se conoce como la función $\mathcal{P}$ de Weierstrass:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

donde $\omega = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. No es difícil ver que $\mathcal{P}(z)$ es doblemente periódica (cf. [F]). Además $\mathcal{P}$ queda completamente definida por los valores que toma sobre el paralelogramo $R = \{t\omega_1 + s\omega_2 / 0 \leq\ t, s < 1\}$ –que luego llamaremos *región fundamental* – que es el conjunto de puntos de $\mathbb{C}$ no congruentes con respecto al grupo de los periodos $\{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 / n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$. Obsérvese que $\mathcal{P}(z)$ tiene sus polos en los puntos de dicho grupo.

Poincaré observa la periodicidad doble de una función meromorfa $f = f(z)$ como un fenómeno de invarianza frente a un grupo de transformaciones. Es decir, $f = f(z)$ es doblemente periódica de períodos ω_1 y ω_2 si es invariante frente al grupo de automorfismos[2] de $\mathbb{C}$: $T_{n_1,n_2}(z) = z + n_1\omega_1 + n_2\omega_2$, $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, e.d.,

$$f \circ T_{n_1,n_2}(z) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Para mayor generalidad, es conveniente observar las funciones meromorfas $f = f(z)$ como funciones definidas en dominios $\Omega \subset \Sigma$ de la esfera de Riemann[3] Σ. Los automorfismos de

[2] Aquí con el sentido de funciones biholomorfas.

[3] La compactificación de $\mathbb{C}$ identificada con la esfera de $\mathbb{R}^3$.

Σ –e. d. los cambios de referencia globales en Σ– vienen dados por las transformaciones bilineales (o de Möbius):

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc=1,$$

las cuales forman un grupo $\mathcal{G}$. Más aún, dicho grupo es isomorfo al de las matrices complejas:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es la unidad. $\mathcal{G}$ tiene bastantes subgrupos notables. Por ejemplo, el grupo modular $\mathcal{M}$ donde $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ y además $ad-bc=1$. Si $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ son tales que $ad-bc=1$ y $d=\bar{a}$, $b=\bar{c}$, obtenemos el grupo $\mathcal{G}_\Delta$ de las transformaciones bilineales que dejan invariante el disco unidad $\Delta = \{z/z\bar{z} \le 1\}$. Poincaré llama *hiperbólico* a todo subgrupo de $\mathcal{G}_\Delta$, designando a Δ como el *disco fundamental* de un grupo de este tipo. Los grupos hiperbólicos son en realidad todos aquellos grupos que dejan invariante una región Q que sea congruente con Δ mediante una transformación bilineal. Por ejemplo, el semiplano superior[4] $\mathcal{U}$. Por otra parte, si consideramos una función meromorfa $f:\Omega\subset\Sigma\to\Sigma$, la familia $\mathcal{G}_0=\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de transformaciones de $\mathcal{G}$ que deja invariante a Ω y f, es decir:

$$f(T_\alpha(z)) = f(z), \quad \forall\alpha, \quad \forall z\in\Omega,$$

forma necesariamente un grupo[5]. Suponiendo que tal $f(z)$ no sea trivial, se deduce del principio de prolongación analítica que el grupo $\mathcal{G}_0=\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ debe ser *discreto*. Es decir, que para cada $z\in\Omega$ la órbita $\Gamma z=\{T_\alpha(z):\alpha\in A\}$ de z debe ser discreta en Ω. Llegamos así a la clase fundamental de grupos $\mathcal{G}_0$ introducidos y estudiados con detalle por Poincaré: aquellos grupos discretos –*discontinuos* en su terminología– de tipo hiperbólico, es decir los grupos *fuchsianos*. Llama entonces *fuchsiana*[6] a toda función meromorfa f invariante frente a un grupo fuchsiano $\mathcal{G}_0$, es decir:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z), \quad \forall\, T(z)=\frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{G}_0.$$

Posteriormente introduce y estudia otra clase más amplia de grupos de transformaciones bilineales y funciones invariantes que llamó *kleinianas*[7].

En la primavera de 1880, y tras el estudio del trabajo de L. Fuchs *Über eine Klasse von ...* , J. Reine Angew. Math. 89 (1880), 151-169, Poincaré encuentra ejemplos de funciones

[4] Es fácil transformar cualquier disco D en Δ y éste último en $\mathcal{U}$ usando, por ejemplo, la transformación bilineal $T:\mathcal{U}\to\Delta$ definida por $T(z)=\frac{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})z+(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})i}{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})z+(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})}$.

[5] Son así naturales los grupos de transformaciones en este contexto.

[6] La terminología de Klein *Automorfa* es la que finalmente ha prevalecido.

[7] Un grupo propiamente discontinuo $\mathcal{G}$ que no deja invariante círculo alguno se llama Kleiniano. Introduce la nueva clase de funciones invariantes a raíz de una observación de Klein. En una nota en los CRAS ([P-81d]) observa: "Il existe des fonctions qui ne sont pas altérées par ... ce groupe et que je propose d'appeler *fonctions kleinéennes*, puisque c'est à M. Klein qu'on en doit la découverte".

meromorfas $f(z)$ que son invariantes frente a una clase especial de transformaciones bilineales $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. En efecto, en dicho trabajo Fuchs –en cuyo honor justifica Poincaré su terminología– prueba que el inverso del cociente de dos soluciones de la ecuación,

$$y" + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

con P y Q racionales, es invariante frente a cierta clase de transformaciones bilineales. De hecho, Fuchs generaliza los resultados H. Schwarz de 1872 en J. Reine Angew. 75 (1872), pp. 292-335, donde se establece que la función inversa $w = \phi(z)$ del cociente $z = \frac{\eta_2(w)}{\eta_2(w)} = \zeta(w)$ de dos soluciones $z = \eta_i(w)$, $i = 1, 2$, de la ecuación hipergeométrica de Gauss:

$$\frac{d^2\eta}{dw^2} + \frac{(\alpha+\beta+1)w-\gamma}{w(w-1)}\frac{d\eta}{dw} + \frac{\alpha\beta}{w(w-1)}\eta = 0$$

tiene también esta propiedad de invarianza[8]. Específicamente, si $\lambda = 1-\gamma^2$, $\mu = (\gamma-\alpha-\beta)$, $\nu = (\beta-\alpha)^2$, y λ, μ, ν son reales y positivos, entonces Schwarz demuestra que $z = \zeta(w)$ transforma $\mathcal{U}$ de manera biyectiva y conforme en un triángulo $\mathcal{T}$ de lados circulares y ángulos $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ ([L],[F]).

La función[9] $\phi(z)$ se puede extender mediante reflexiones (Principio de Schwarz) sucesivas con respecto a los lados de $\mathcal{T}$. Repitiendo indefinidamente las reflexiones, los triángulos $\mathcal{T}_n$ recubren $\mathcal{U}$ sin solapamientos siempre que λ, μ y ν sean inversos de enteros positivos. Las reflexiones forman además un grupo discreto $\mathcal{G}$ (el grupo triangular) respecto del cual $w = \phi(z)$ permanece invariante.

Otro ejemplo de función automorfa anterior a los trabajos de Poincaré es la ***función modular*** $J(\tau)$ construida por Dedekind en 1877 e independientemente por Klein en 1878 (v. [L]). La función modular J es invariante en $\mathcal{U}$ con respecto al grupo modular $\mathcal{M}$. Para construir $J(\tau)$ se procede como sigue. En primer lugar, si se toma la función $\mathcal{P}$ de Weierstrass, se tiene que:

$$\mathcal{P}'^2 = 4\mathcal{P}^3 - g_2\mathcal{P} - g_3,$$

donde,

$$g_2 = 60\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4},$$

y,

$$g_3 = 140\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}.$$

Las cantidades,

$$e_1 = \mathcal{P}(\frac{\omega_1}{2}), e_2 = \mathcal{P}(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}), e_3 = \mathcal{P}(\frac{\omega_2}{2}),$$

son tres raíces distintas de la ecuación:

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

[8] Riemann llegó a las mismas conclusiones aunque no las publicó, apareciendo en un trabajo póstumo de 1867 ([Kl]).

[9] Conocida como función triangular.

Por eso, el discriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ es no nulo. Si observamos g_2, g_3 y Δ como funciones de los periodos (ω_1, ω_2), entonces resultará que:

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1^4} g_2(1, \tau), \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

mientras que,

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1^6} g_3(1, \tau), \quad \Delta(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1^{12}} \Delta(1, \tau).$$

Ahora viene la idea fundamental: el par (ω_1', ω_2') constituye una nueva pareja de períodos[10] para $\mathcal{P}$ sí y sólo sí se tienen las relaciones:

$$\omega_2' = a\omega_2 + b\omega_1,$$
$$\omega_1' = c\omega_2 + d\omega_1,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $D = ab - cd = \pm 1$. Si cambiamos (ω_1, ω_2) por (ω_1', ω_2') entonces las cantidades $\mathcal{P}$, g_2, g_3 y Δ no cambian, mientras que τ se tranforma en τ':

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Por esa razón, si se define la función J como:

$$J(\tau) = \frac{g_2(1, \tau)^3}{\Delta(1, \tau)},$$

entonces,

$$J(T(\tau)) = J(\tau),$$

para todo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ en el grupo modular $\mathcal{M}$ (véanse los detalles en [F]).

Cuando en 1880 Poincaré lee a Fuchs, reproduce –sin tener noticia alguna de ellos– los resultados de Schwarz y encuentra un procedimiento sistemático para la construcción de funciones automorfas[11]. Poincaré explora con rapidez las aplicaciones del tema, desarrollando y publicando en corto espacio de tiempo, una buena cantidad de trabajos: una memoria que presentó a un premio de la Academia de Ciencias de París en verano de 1880 –que no ganó, pero que mereció una mención especial– 11 notas en los CRAS, sendas notas en la Academia de Ciencias, Artes y Letras de Caén y en los Math. Annalen, todo esto en 1881, 11 notas en los CRAS entre 1882 y 1886, y cinco artículos fundamentales donde desarrolló en más detalle sus resultados, en la recién fundada Acta Mathematica: Act. Math. 1882, 1, 1-62; 1882, 1, 193-294; 1883, 3, 49-92; 1884, 4, 201-311; 1884, 5, 209-278.

[10] En relidad, todos los periodos de $\mathcal{P}$ –como de cualquier función doblemente periódica– constituyen un grupo cerrado del que los pares $(\omega_1, 0)$ y $(0, \omega_2)$ forman una base. La condición a enunciar asegura que también $\{(\omega_1', 0), (0, \omega_2')\}$ forma una nueva base de dicho grupo.

[11] Por entonces, Klein ya había generalizado la construcción de la función triangular de Schwarz a ciertas clases de polígonos ([L]).

Antes de comentar los resultados conviene introducir una noción básica. Si $f(z)$ es fuchsiana con respecto a $\mathcal{G}$, entonces f queda completamente definida por su comportamiento en una *región fundamental* R del grupo $\mathcal{G}$, que es toda parte del plano R con la propiedad de *ningún* par de puntos $z, z' \in R$ pueden hacerse corresponder en la forma z' = T(z), para algún $T \in \mathcal{G}$ y que es abierta y maximal para esta propiedad[12]. Por ejemplo, el palarelogramo R en el caso de $\mathcal{P}$, o la unión de $\mathcal{T}$ con un triángulo simétrico $\mathcal{T}'$ en la función triangular. En el caso de la función modular J se tiene que $R = \{z \in \mathcal{U}/|z| > 1, -\frac{1}{2} < \mathcal{R}ez < \frac{1}{2}\}$ es una región fundamental del grupo modular $\mathcal{M}$ ([F],[L]).

Poincaré anuncia una parte sustancial de sus resultados en una nota a los CRAS de febrero de 1881 ([P-81b]). En primer lugar, estudia la forma de las regiones fundamentales R de los grupos fuchsianos[13] $\mathcal{G}$. Establece que son polígonos curvilíneos, cuyos lados son arcos de círculo que cortan ortogonalmente al círculo fundamental $\partial\Delta$ o bien segmentos de dicho círculo. Prueba además que la familia $\{T(R)/T \in \mathcal{G}\}$ de regiones congruentes con una región fundamental R recubre sin solapamientos el disco fundamental Δ. El problema más delicado era el de la propia existencia y construcción de los grupos fuchsianos. Poincaré estudia bajo qué condiciones una cierta región $R \subset \Delta$ –cuya frontera está constituida por arcos de círculo ortoganles a $\partial\Delta$– se puede identificar como la región fundamental de un grupo fuchsiano $\mathcal{G}$ y describe la manera efectiva de fabricar $\mathcal{G}$ a partir de una tal región R. El punto crucial –que conlleva el carácter discontinuo del grupo obtenido $\mathcal{G}$– consistía en probar que la familia de regiones deducidas de R por reflexiones en los lados, recubre totalmente Δ sin solapamientos. En su nota de 1881 ([P-81b]) da una escueta noticia de cómo superó el escollo: "Hacía falta, primeramente, construir los grupos fuchsianos; lo he logrado con ayuda de la geometría no euclídea, de la que no hablaré aquí". Años después ([P-21]) comenta: "La segunda de las proposiciones –refiriéndose al problema– quizás me habría detenido durante mucho tiempo de no haber sido por la ayuda que encontré en una teoría bastante diferente: ... la *Geometría no euclídea.* Esta geometría, ... a primera vista no parece sino un simple juego del espíritu que no tiene interés salvo para el filósofo, sin ser de utilidad alguna para el matemático. Pero nada de eso, los teoremas de la geometría de Lowatschevski son tan ciertos como los de la geometría euclídea, a condición de que se les interprete como debe ser .... Pues resulta que combinando todos estos teoremas obtuve fácilmente la solución de la dificultad a la que me he referido"[14]. Sin embargo, y –como él dice, para evitar posibles confusiones (cf. [P-82b])– evita la geometría no euclídea cuando redacta con detalle los cálculos en su célebre artículo en Acta de 1882 ([P-82b]).

Poincaré había introducido un modelo para la geometría no euclídea hiperbólica[15] definido por el semiplano $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}/\mathcal{I}m\ z > 0\}$ dotado de la métrica Riemanniana:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

[12] Para tener a f completamente determinada necesitaremos conocer sus valores en parte de la frontera ∂R de R.

[13] Se ocupa únicamente de los grupos finitamente generados.

[14] En el celebérrimo ensayo "La Creación Matemática" –cf. una traducción en *Matemáticas para un mundo moderno*, Editorial Blume, Barcelona, 1970 – también describe cómo se inspiró en el modelo hiperbólico de geometría no euclídea que él mismo había creado.

[15] El semiplano hiperbólico de Poincaré (cf. [Do]). De acuerdo con Darboux ([D]) el de Poincaré es una variante de un modelo de geometría hiperbólica debido a Cayley.

En otras palabras, si $\gamma = \gamma(t) = x(t)+iy(t)$, $0 \leq t \leq 1$ es una curva regular en $\mathcal{U}$ entonces la longitud hiperbólica de la curva es:

$$\Lambda(\gamma) = \int_0^1 \frac{|dz|}{y} = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \left| \frac{dz}{dt} \right| dt.$$

En esta geometría las rectas (geodésicas) son, o bien las rectas ortogonales a $\mathcal{I}m\ z = 0$ o los círculos ortogonales a $\mathcal{I}m\ z = 0$. La idea clave de Poincaré fue darse cuenta de que las isometrías de $\mathcal{U}$ son precisamente las transformaciones bilineales $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ que dejan invariante $\mathcal{U}$. Los grupos fuchsianos, por tanto, están constituidos por isometrías del disco fundamental Δ con la métrica hiperbólica.

Todos los resultados relativos a los grupos fuchsianos se desarrollan en el primer trabajo de Acta ([P-82b]). Los que se refieren a las funciones invariantes frente a dichos grupos se recopilan en el segundo trabajo de Acta ([P-82c]). El primer paso consistió en asociar una función fuchsiana a todo grupo $\mathcal{G}$ de ese tipo. Este problema era también bastante delicado, y es objeto asimismo de algunos párrafos del ensayo comentado (v pié de página). Veamos cómo Poincaré resolvió el problema. Si $\mathcal{G} = \{T_n\}_n$ es el grupo, entonces considera una función racional $H(z)$ definida en el dominio Ω en cuestión, de forma que no tenga polos el la frontera de Ω. Define entonces la función ($m \geq 2$):

$$\Theta(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} H(T_k \cdot z)(c_k z + d_k)^{-2m}, \tag{1}$$

con $T_k(z) = \frac{a_k z+b_k}{c_k z+d_k}$, demostrando que la serie converge excepto en los transformados por el grupo $\mathcal{G}$ de los polos de H. Al ser Ω invariante por $\mathcal{G}$ todos estos puntos pertenecen a Ω. Por otra parte, resulta inmediato comprobar que:

$$\Theta(T \cdot z) = (cz+d)^{2m}\Theta(z), \quad T(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{2}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\Theta(T \cdot z) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} H(T_k \cdot T \cdot z)(c_k T \cdot z + d_k)^{-2m} \\
&= (cz+d)^{2m} \sum_{k\in\mathbb{N}} H(\frac{a_k(az+b)+c_k(cz+d)}{c_k(az+b)+d_k(cz+d)})(c_k(az+b)+d_k(cz+d))^{-2m} \\
&= (cz+d)^{2m}\Theta(z).
\end{aligned}$$

Una consecuencia inmediata de esta propiedad es que el cociente $\frac{\Theta_1(z)}{\Theta_2(z)}$ de dos de tales funciones –correspondientes al mismo grupo $\mathcal{G}$, pero con distintas elecciones de H, por ejemplo, $H_1(z)$ y $H_2(z)$– es una función fuchsiana (o kleiniana, dependiendo de la naturaleza de $\mathcal{G}$) con repecto a $\mathcal{G}$ ([P-81b], [P-82c]). Llama thetafuchsiana ([P-81b], [P-82c], [F]) (o thetakleiniana) a toda función meromorfa $\Theta(z)$ que satisfaga (2). La expresión (1) se conoce ahora como serie de Poincaré. Para la construcción de dicha serie, se inspiró en resultados análogos de Weierstrass sobre funciones elípticas.

Superado el problema de la existencia de funciones fuchsianas con respecto a un grupo $\mathcal{G}$, Poincaré establece la manera de expresar todo el colectivo de dichas funciones esencialmente en términos de una sola función fuchsiana $x = f(z)$ de referencia. En efecto, la segunda nota a los CRAS de febrero de 1881 ([Po-81c]) anuncia la siguiente propiedad fundamental: si $f(z)$ y $f_1(z)$ son fuchsianas con respecto a $\mathcal{G}$ entonces existe un polinomio en (x,y), $\psi = \psi(x,y)$, de forma que $x = f(z)$ y $y = f_1(z)$ parametrizan la curva algebraica:

$$\psi(x,y) = 0. \tag{3}$$

Veamos un esbozo de la demostración ([P-82c], [F]). En virtud al teorema de Liouville, toda función fuchsiana ha de tener polos, de los cuales habrá un número finito en cualquier región fundamental. El hecho básico es que el número de polos –contados con su orden de multiplicidad– que la función fuchsiana posee en una región fundamental coincide con el número de ceros en dicha región ([P-82c]). Sean entonces $f(z)$ y $f_1(z)$ funciones fuchsianas con respecto al mismo grupo $\mathcal{G}$, y sean k_1, k_2 el número de polos respectivos en una región fundamental dada R_0. Veremos que existen constantes $a_1, a_2, \cdots, a_{(m+1)(n+1)}$, tales que:

$$a_1 f^m f_1^n + a_2 f^m f_1^{(n-1)} + \cdots + a_{(m+1)(n+1)} = 0,$$

para $z \in R_0$. Si por el momento consideramos los a_i, m, n variables, y llamamos $\psi(f, f_1)$ al primer mienbro de la igualdad, entonces el número de polos de ψ está acotado por $mk_1 + nk_2$. Por interpolación, y dados $c_1, c_2, \cdots, c_{(m+1)(n+1)-1}$ puntos distintos entre sí y distintos de los $k_1 + k_2$ polos, siempre existirán constantes a_i, $1 \leq\ i \leq\ (m+1)(n+1)$, tales que:

$$\psi(f(c_i), f_1(c_i)) = a_1 f^m(c_i) f_1^n(c_i) + a_2 f^m(c_i) f_1^{(n-1)}(c_i) + \cdots + a_{(m+1)(n+1)} = 0,$$

para todo $1 \leq\ i \leq\ (m+1)(n+1) - 1$. Como la construcción se puede hacer con m y n variables, existirán $\{c_i\}$, $\{a_j\}$, m y n tales que:

$$(m+1)(n+1) > mk_1 + nk_2,$$

con lo que ψ tendría más ceros que polos en R_0. Por tanto, ψ debe ser idénticamente cero, lo que concluye la prueba.

Por otra parte, si $x = f(z)$, $y = f_1(z)$ son fuchsianas con respecto a $\mathcal{G}$, Poincaré prueba que cualquier otra función fuchsiana $y_1 = f_2(z)$ con respecto a $\mathcal{G}$ se relaciona con f y f_1 mediante la relación:

$$y_1 = \theta_1(x,y),$$

en donde $\theta_1 = \theta_1(x,y)$ es una función racional. Por tanto, todas las funciones fuchsianas quedan referidas a una de ellas $x = f(z)$ ([P-82c]).

La nota a los CRAS [P-81c] introduce los primeros ejemplos de las ecuaciones de segundo orden que más tarde llamaría fuchsianas ([P-84]). En efecto, dada una función fuchsiana $x = f(z)$ considera las siguientes funciones[16] de x:

$$\nu_1(x) = \sqrt{\frac{df}{dz}}, \qquad \nu_2(x) = z\sqrt{\frac{df}{dz}}. \tag{4}$$

[16]Como funciones de x son genéricamente multivaluadas.

Establece entonces que ν_1 y ν_2 son soluciones de una ecuación de segundo orden de la forma:

$$\frac{d^2\nu}{dx^2} = \varphi(x)\nu,$$

donde $\varphi(x)$ es una función algebraica de x, es decir, $\varphi(x) = \theta_1(x,y)$ donde θ_1 es racional y x e y están relacionadas por una ecuación algebraica de tipo (3). En otras palabras, $\{\nu_1, \nu_2\}$ es un sistema fundamental de la ecuación algebraica:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\nu}{dx^2} = \theta_1(x,y)\nu \\ \psi(x,y) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Veamos la prueba de este resultado. Para $x = f(z)$ introduzcamos el término:

$$D(f)_z = \frac{2f'f''' - 3f''^2}{2f'^2} \qquad \left(' = \frac{d}{dz}\right),$$

que se conoce como derivada Schwarziana[17] de f ([F]). La expresión apareció originalmente en el trabajo de Schwarz ya comentado, donde se estuida el cociente $z = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ de dos soluciones de la ecuación de segundo orden:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{6}$$

En efecto, unos cálculos establecen:

$$D(z)_x = q(x),$$

que es la ecuación de tercer orden que satisface z. Dos propiedades fundamentales: a) si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una transformación bilineal arbitraria, entonces $D(T(z))_x = D(z)_x$ y b) si $f(z)$ es automorfa, entonces $\frac{D(f)_z}{f'(z)^2}$ también lo es[18].

En cuanto a la ecuación (5) y las funciones (4), Poincaré establece ([P-82c]) que:

$$\frac{1}{\nu_i}\frac{d^2\nu_i}{dx^2} = \frac{2f'f''' - 3f''^2}{4f'^2}, \quad i = 1,2,$$

es decir, $\frac{1}{\nu_i}\frac{d^2\nu_i}{dx^2} = \frac{D(f)_z}{2f'^2}$, $i = 1,2$. Es por eso que, si además de $x = f(z)$ se considera otra función fuchsiana de referencia $y = f_1(z)$, se tendrá entonces que:

$$\frac{1}{\nu_1}\frac{d^2\nu_1}{dx^2} = \frac{1}{\nu_2}\frac{d^2\nu_2}{dx^2} = \theta_1(x,y), \tag{7}$$

[17] La notación $D(f)_z$ se debe a Koebe.

[18] Se tiene además la siguiente versión de la regla de la cadena: $D(z)_x = D(z)_t \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + D(t)_x$.

donde θ_1 es racional y $\psi(x,y)=0$. Por tanto, como de (4):

$$z=\frac{\nu_1(x)}{\nu_2(x)},$$

(5) pertenece a la clase de las ecuaciones de coeficientes algebraicos que tienen la propiedad de que x es una función fuchsiana del cociente z de dos soluciones. Poincaré definió como *fuchsianas* a este tipo de ecuaciones.

Veamos qué consideraciones llevaron a su estudio. Sea $x=a_0$ una singularidad aislada de una ecuación lineal (6), $y_1(x)$, $y_2(x)$, $x\in\mathbb{C}$, dos soluciones independientes de la misma. Si x describe una trayectoria cerrada γ_0 alrededor de a_0, $y_1(x)$, $y_2(x)$ se prolongarán analíticamente a dos nuevas soluciones $\hat{y}_1(x)$, $\hat{y}_2(x)$. Por tanto:

$$\begin{cases}\hat{y}_1(x)=ay_1(x)+by_2(x)\\ \hat{y}_2(x)=cy_1(x)+dy_2(x),\end{cases}\tag{8}$$

para ciertos coeficientes $a,b,c,d\in\mathbb{C}$. $\{y_1,y_2\}$ sufre así una substitución[19] lineal de matriz

$$S_{a_0}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\tag{9}$$

cuando x circunscribe a_0. Si (6) presenta $n+1$ singularidades $a_0,\ldots,a_n$ entonces $\{y_1,y_2\}$ sufrirá un "producto" de las sustituciones S_{a_i}, asociadas a las a_i's, cada vez que x circunvala tales singularidades, siguiendo una curva cerrada γ. Las transformaciones así generadas constituyen un grupo: el grupo de la ecuación[20]. Riemann fue el pionero en explotar las propiedades de dicho grupo para el estudio del comportamiento global de las soluciones de una ecuación lineal. En [P-84] Poincaré efectúa un estudio detallado de los invariantes de los grupos de ecuaciones de orden n.

Si consideramos ahora el cociente de dos soluciones de (6), z tomará el valor:

$$z_1=T(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

cuando x circunvale a_0. Es decir $z=\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ es multivaluada y sufre la transformación bilineal $T(z)$ cuando x vuelve a la posición inicial tras recorrer γ_0. Sin embargo, si z admite una inversa univaluada $x=f(z)$, entonces

$$f(z_1)=f(T(z))=f(z),\tag{10}$$

es decir f será invariante frente a T. Fue precisamente ésta la propiedad encontrada por Schwarz y Fuchs en algunos casos especiales, según se ha dicho.

[19] En terminología original.
[20] Que Hermite llamó de *monodromía* en 1851.

Con la introducción de las funciones y ecuaciones fuchsianas Poincaré considera la propiedad (10) en toda su generalidad, estudiando qué consecuencias tiene sobre el comportamiento global de las soluciones. En efecto, consideremos una ecuación de tipo fuchsiano:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\nu}{dx^2} = \varphi(x,y)\nu \\ \psi(x,y) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Si $z = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ y $x = f(z)$ con f fuchsiana, entonces $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$ definidas por (4) constituyen un sistema fundamental de (11). En efecto, de lo dicho más arriba:

$$\frac{1}{2}D(z)_x = -\varphi(x,y),$$

mientras que, de la regla de la cadena -ver pié de página- se tiene:

$$D(z)_x = -\frac{1}{2}\frac{D(f)_z}{f'(z)^2}.$$

La propiedad buscada se deduce entonces de (7). Sin embargo, el aspecto fundamental es el siguiente. Si las soluciones $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$ se observan en términos de z, éstas dejan de ser multivaluadas para convertirse en funciones uniformes[21] de z, cuando z recorre el disco fundamental Δ del grupo. ν_1 y ν_2 describen así de manera óptima el comportamiento global de las soluciones.

Según observa Poincaré en [P-82c,84], las singularidades relevantes $x = a_0$ de las ecuaciones fuchsianas (11) son singularidaes *regulares* en el sentido de Fuchs (cf. [CL]). En una tal singularidad, la substitución lineal en (9) admite la forma canónica:

$$S_{a_0} = \begin{pmatrix} e^{2\pi\lambda_1 i} & 0 \\ 0 & e^{2\pi\lambda_2 i} \end{pmatrix},$$

donde λ_1, λ_2 son las raices de la ecuación determinante[22]. Poincaré observa además que $\lambda_2 - \lambda_1$ debe ser cero o el inverso $\frac{1}{\beta}$ de un número entero $\beta \in \mathbb{N}$.

En su trabajo "Sour les groupes des équations linéaires" ([P-84]) Poincaré considera dos problemas. El primero, expresar los invariantes del grupo de una ecuación diferencial en términos de sus coeficientes. El segundo, mucho más importante, estudiar bajo qué condiciones es fuchsiana una ecuación algebraica dada:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\nu}{dx^2} = \varphi(x,y)\nu \\ \psi(x,y) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Más precisamente, si uno considera en (11) como datos:

i) La curva algebraica $\psi(x,y) = 0$,

ii) Las singularidades $a_0, \ldots, a_p$ y las diferencias $\lambda_2^i - \lambda_1^i = \frac{1}{\beta_i}$, $\beta_i \in \mathbb{N}$, de las raices de las ecuaciones determinantes,

[21] Si Σ es una superficie de Riemann, F holomorfa en Σ, uniformizar F consiste en hallar un par de funciones holomorfas $f = f(z)$, $h = h(z)$ en un cierto dominio Ω tales que $\Sigma = \{x = h(z) : z \in \Omega\}$ y $F(h(z)) = f(z)$. La variable z uniformiza entonces las soluciones ν_1, ν_2 ([JS], [L], [F]).

[22] La ecuación indicial en [CL].

esta información no determina la función racional $\varphi(x,y)$. Quedan así por determinar un cierto número de coeficientes que pueden considerarse como parámetros libres. El problema, nada trivial, a resolver es el siguiente: determinar para qué valores de dichos parámetros es fuchsiana la ecuación (11). Poincaré resuelve el problema en [P-84] estableciendo que entre todas las ecuaciones que satisfacen las propiedades i) y ii) siempre existe una única ecuación fuchsiana (11), describiendo además la manera de hallar dicha ecuación. Las dos consecuencias más importantes de este resultado son, en palabras de Poincaré:

(1) Qu'étant donnée une équation linéaire quelconque á coefficients algébriques, la variable et les intégrales peuvent s'exprimer en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire z.

(2) (Teorema de Uniformización) Qu'étant donnée une courbe algébrique quelconque, les coordonnées x et y d'un point de cette courbe s'expriment en fonctions uniformes[23] d'une même variable auxiliaire z.

Huelgan las palabras sobre la contundencia de la segunda proposición. La prueba del resultado comentado más arriba se basa en el método que él denomina de *continuidad*[24] y que describe con detalle en la pág. 42 de [P-84]. Sin embargo, muchos pasos hacen uso de argumentos intuitivos. No fue hasta principios de siglo que Brouwer y Koebe (1908) obtuvieron los resultados básicos necesarios para construir demostraciones satisfactorias de todas las afirmaciones contenidas en el trabajo de Poincaré.

Poincaré también consideró el caso de la ecuación general de orden m:

$$y^{(m)} + \varphi_1(x)y^{(m-1)} + \cdots + \varphi_m(x)y = 0, \tag{12}$$

cuyos coeficientes $\varphi_i(x) = \varphi_i(x,y)$, $1 \leq i \leq m$ son funciones algebraicas de x. Bajo las mismas condiciones para las singularidades de la ecuación establece que (12) admite un sistema fundamental de soluciones $\nu_1(x), \ldots, \nu_m(x)$ en el que la variable x se uniformiza en términos de otra z por medio de la función inversa $x = f(z)$ -en general kleiniana- del cociente $z = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ de dos soluciones de una cierta ecuación auxiliar del tipo (11) asociada a (12) ([P-84], [P-21]).

A raíz de estos trabajos, el talento de Poincaré fue ampliamente reconocido[25]. A la poco usual edad de treinta y dos años, resulta elegido miembro de la Academia de Ciencias, el 24 de Enero de 1887[26]. Ocupó la plaza que quedó vacante tras la muerte prematura de Laguerre. El ponente de su ingreso – Camile Jordan – dijo de él (cf. [B], [D]):" ... su obra está por encima de todo elogio, recordándonos de manera inevitable lo que de Abel dijo Jacobi, a saber, que aquél había planteado cuestiones que hasta entonces eran inimaginables. Debemos reconocer que, en efecto, somos testigos de una revolución en Matemáticas sólo comparable con la que, hace ya medio siglo, se produjo con el desarrollo de las funciones elípticas".

---

[23] Que son además fuchsianas.

[24] Que el propio Poincaré vincula con Klein (cf. [P-84]).

[25] Como siempre, no de manera unánime: a raíz del primer artículo de Acta, Kronecker advirtió al editor, Mittag-Leffler, que este artículo inmaduro y obscuro mataría la revista ([Kl], Cáp. 29, Sec. 6).

[26] Estaba en las listas de la Sección de Geometría desde 1881, pero no consiguió la plaza hasta ese año, a pesar de que se habían producido vacantes con anterioridad.

Finalmente, debe añadirse que durante el período de 1881 a 1882 se entabla una dura competencia entre Klein –uno de los precursores del tema– y Poincaré por la prioridad de resultados de la teoría. Estimulado y también presionado por el empuje de Poincaré, Klein trabaja intensamente y obtiene –con técnicas de la teoría geométrica de funciones– parte de los resultados obtenidos por aquél. Sin embargo el sobreesfuerzo y la tensión sufridos lo sumen, a finales de 1882, en una depresión que tendría efectos definitivos sobre su carrera futura como investigador. En palabras de Klein (v. [W-A]): "Durante las vacaciones del otoño de 1882 ... nació la memoria del Vol. 21 de los Math. Ann. –donde se da cuenta, entre otros resultados, del teorema de uniformización– que quedó concluida el 6 de Octubre de 1882. Así que muchas cosas están incompletas –unos párrafos antes comenta las dificultades que tuvo que superar, debido a sus deficiencias en teoría de funciones– pero, en general, la construcción del razonamiento permanece y tampoco ha sido modificada por los trabajos de Poincaré que a continuación se sucedieron en los tomos 1, 3, 4 y 5 de la por entonces recién fundada *Acta Mathematica*. De hecho conseguí nuevamente adelantarme por poco a Poincaré ... El precio que tuve que pagar por mi trabajo fue, en verdad, extraordinariamente elevado: el quebranto total de mi salud ... Mi propia actividad productiva personal en el campo de las Matemáticas teóricas terminó en 1882. Todo lo que vino a continuación se refiere, aunque no se trate de simples retoques de un tema, a detalles. De este modo Poincaré tuvo el campo libre y hasta 1884 publicó en *Acta Mathematica* sus cinco grandes trabajos sobre las nuevas funciones".

3. Mecánica Celeste.

Apunta Dieudonné [Di] que después de 1885 la mayoría de los trabajos de Poincaré sobre ecuaciones diferenciales tienen que ver con la Mecánica Celeste y más en particular con el problema de los tres cuerpos. En general, el problema de los n-cuerpos consiste en determinar la dinámica y comportamiento asintótico de n móviles puntuales $P_1, \ldots, P_n$, con masas respectivas $M_1, \ldots, M_n$ sometidos únicamente a las perturbaciones debidas al campo gravitatorio generado por ellos. Si $x_i(t) \in \mathbb{R}^3$ designa la posición del cuerpo i-ésimo, $\dot{x}_i(t)$ su velocidad ($\dot{x} = \frac{dx}{dt}$), las ecuaciones asociadas al problema son:

$$M_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} G M_i M_j \frac{1}{|x_i - x_j|^3}(x_j - x_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

(G la constante de gravitación) es decir un sistema de primer orden de dimensión $6n$. El problema de los n-cuerpos se remonta a Euler, Laplace y Lagrange y surge, de manera natural, cuando se trata de estudiar la estabilidad del sistema solar. A lo largo del siglo XIX se hace evidente la gran complejidad del problema y, prácticamente, la no integrabilidad del mismo. El caso particular $n = 2$ (la tierra y el sol, un planeta y un satélite) se sabía integrar por cuadraturas desde los tiempos de Newton. En efecto, para $n = 2$ tenemos:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 &= G M_1 M_2 \frac{1}{|x_1 - x_2|^3}(x_2 - x_1), \\ M_2 \ddot{x}_2 &= G M_1 M_2 \frac{1}{|x_1 - x_2|^3}(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

En este caso se dispone de diversas estrategias para integrar el sistema (v. [R], Cáp. 9). Una de ellas consiste en analizar el movimiento relativo $r = x_1 - x_2$, poner $\mu = G(M_1 + M_2)$ y escribir:

$$\ddot{r} = -\mu \frac{r}{|r|^3}.$$

Es bien conocido que el movimiento es plano. Usando entonces coordenadas polares (ρ, θ) se llega a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - r\dot{\theta}^2 &= -\frac{\mu}{\rho^2}, \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda relación se deduce que $\mathcal{J} = \rho^2\dot{\theta}$ es una constante del movimiento. Por otra parte:

$$dt = \frac{\rho^2}{\mathcal{J}} d\theta,$$

luego, si $h = h(t)$ es una función de t:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\mathcal{J}}{\rho^2}\frac{dh}{d\theta}, \\ \frac{d^2h}{dt^2} &= \frac{\mathcal{J}}{\rho^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\mathcal{J}}{\rho^2}\frac{dh}{dt}\right). \end{aligned}$$

Para $\rho = \rho(\theta)$:

$$\frac{\mathcal{J}}{\rho^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\mathcal{J}}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\right) = -\frac{\mu}{\rho^2} + \frac{\mathcal{J}^2}{\rho^3}.$$

Poniendo $u = \frac{1}{\rho}$ llegamos por fin a:

$$u'' + u = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2},$$

de donde:

$$u = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2} + B\cos(\theta - \omega), \quad B > 0,$$

o también:

$$\frac{p}{\rho} = 1 + e\cos\theta,$$

con $p^{-1} = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2}$, $e = Bp$, que es la ecuación de una cónica de excentricidad e. En consecuencia, las órbitas del movimiento relativo son cónicas. Obsérvese que en el caso de las elipses y circunferencias se obtienen órbitas cerradas. Sin embargo, la existencia de, por ejemplo, órbitas cerradas para el problema de los tres cuerpos es ya un problema muchísimo más complicado. Poincaré se interesó por éste y otros problemas de la Mecánica Celeste - la estabilidad de dichas órbitas - desde el comienzo de su carrera. Sus primeros resultados en esta línea, datan de 1883.

En 1885, el rey Oscar II de Suecia decide convocar un premio con el objeto de estimular una investigación importante en el campo del Análisis Matemático. El rey, que había sido estudiante de matemáticas en Estocolmo, ya había dado muestras de su sensibilidad e inclinación por el tema al convertirse en promotor y mecenas de Acta mathematica en 1882. Es precisamente Mittag-Leffler, editor jefe y fundador de Acta, el inspirador del proyecto, consciente, sin duda alguna, de la publicidad y prestigio que el premio atraería sobre la revista ([Ba]).

El certamen es organizado "de facto" por Mittag-Leffler entre 1884 y 1885 (las bases se difunden a través de Acta en el verano de 1885), y, tras algunas tentativas, se nombra finalmente la comisión al efecto. La integran C. Hermite, K. Weierstrass y el propio Mittag-Leffler y es la encargada de confeccionar una relación de cuatro temas de los que los aspirantes deberán elegir solamente uno[27] . Será también la comisión quien estudie los trabajos presentados. Pasemos revista a los temas propuestos (los tres primeros por Weierstrass y el cuarto por Hermite). El segundo tema demandaba una extensión de la teoría de Fuchs para ecuaciones diferenciales. El tercero un perfeccionamiento de los resultados de Briot y Bouquet para ecuaciones de primer orden, mientras que la cuarta planteaba el estudio de propiedades algebraicas de las propias funciones fuchsianas de Poincaré ([Ba], [D])[28] . La primera cuestión -por la que optó Poincaré- trata del problema de los n cuerpos. Con precisión ([D]):

"Dado un sistema con un número cualquiera de puntos materiales que se atraen entre sí siguiendo la ley de Newton, se propone, bajo el supuesto de que no ha habido colisión entre dos puntos, representar las coordenadas de cada punto en forma de una serie asociada a una función conocida del tiempo que converja uniformemente para todo valor de la variable real.

Este problema, cuya solución ampliará considerablemente nuestro conocimiento del sistema terrestre, parece que puede resolverse con los medios del análisis a nuestra disposición, o al menos podemos suponerlo, pues Lejeune-Dirichlet anunció, poco antes de su muerte, a un geómetra amigo, que había descubierto un método para la integración de las ecuaciones diferenciales de la Mecánica y que, aplicando dicho método, había llegado a demostrar de manera absolutamente rigurosa la estabilidad de nuestro sistema planetario. Desgraciadamente, nada sabemos sobre dicho método, a excepción de que la teoría de oscilaciones infinitamente pequeñas parece haber servido de punto de partida para su descubrimiento. Por tanto, se puede suponer casi con certeza que tal método está basado no sobre cálculos largos y complicados, sino más bien sobre el desarollo de una idea fundamental y simple, que se puede redescubrir a base de un trabajo perseverante y profundo".

El plazo límite para la presentación de trabajos se fijó para el 1 de junio de 1888 y la entrega del premio - 2.500 coronas suecas y una medalla de oro conmemorativa- se haría coincidir con el sesenta aniversario del rey, el 21 de Enero de 1889.

Poincaré presentó al premio una memoria que tituló: "Sur le problème des trois corps

[27] La propia organización del premio -vinculado a una revista y no a una entidad científica- la selección de los integrantes de la comisión y de los temas propuestos, levantaron las críticas de los círculos matemáticos europeos.

[28] Resulta obvio que el contenido de las cuestiones primera, tercera y cuarta favorece a Poincaré y el propio Mittag-Leffler sugiere a Poincaré por carta en 1887 que no tiene rivales en el certamen ([A]).

et les équations de la dynamique"[29] . El problema de los tres cuerpos, aunque un caso particular del enunciado general propuesto, es de gran interés práctico en los cálculos astronómicos y sigue siendo -hoy en día- un problema considerablemente complejo. Escribamos las ecuaciones (en la escala de tiempo del orden de $\frac{1}{\sqrt{G}}$):

$$\begin{aligned} M_1\ddot{x}_1 &= M_1M_2\frac{x_2-x_1}{|x_2-x_1|^3}+M_1M_3\frac{x_3-x_1}{|x_3-x_1|^3},\\ M_2\ddot{x}_2 &= M_2M_1\frac{x_1-x_2}{|x_1-x_2|^3}+M_2M_3\frac{x_3-x_2}{|x_3-x_2|^3},\\ M_3\ddot{x}_3 &= M_3M_1\frac{x_1-x_3}{|x_1-x_3|^3}+M_3M_2\frac{x_2-x_3}{|x_2-x_3|^3}. \end{aligned}$$

Más exactamente, Poincaré sólo abordó en su memoria lo que se denomina el problema reducido de los tres cuerpos. Para definirlo con precisión, supongamos que la masa de uno de los tres cuerpos, v. g. M_3, es considerablemente más pequeña que las otras dos. Entonces las dos primeras ecuaciones se pueden desacoplar de la tercera. En efecto, si $M = M_1 + M_2$, $\mu = \frac{M_1}{M}$ y $\epsilon = \frac{M_3}{M}$ se supone que M es del orden de la unidad mientras que ϵ es muy pequeño. Las ecuaciones se pueden escribir en la forma:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = (1-\mu)\dfrac{x_2-x_1}{|x_2-x_1|^3}+\epsilon\dfrac{x_3-x_1}{|x_3-x_1|^3},\\ \ddot{x}_2 = \mu\dfrac{x_1-x_2}{|x_1-x_2|^3}+\epsilon\dfrac{x_3-x_2}{|x_3-x_2|^3},\\ \ddot{x}_3 = \mu\dfrac{x_1-x_3}{|x_1-x_3|^3}+(1-\mu)\dfrac{x_2-x_3}{|x_2-x_3|^3}, \end{cases} \tag{1}$$

si se observan en la escala de tiempos $\tau = \frac{1}{\sqrt{M}}t$. Uno obtiene:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = (1-\mu)\dfrac{x_2-x_1}{|x_2-x_1|^3},\\ \ddot{x}_2 = \mu\dfrac{x_1-x_2}{|x_1-x_2|^3},\\ \ddot{x}_3 = \mu\dfrac{x_1-x_3}{|x_1-x_3|^3}+(1-\mu)\dfrac{x_2-x_3}{|x_2-x_3|^3}, \end{cases} \tag{2}$$

al hacer $\epsilon = 0$. Los cuerpos primero y segundo se llaman *primarios* mientras que el tercero se denomina *planetoide* ([R]). Las dos primeras ecuaciones en (2) son una versión reescalada de las del problema de los dos cuerpos, mientras que en la tercera ecuación, las soluciones $(x_1(t), x_2(t))$ actúan como término de perturbación. El problema reducido consiste en estudiar la dinámica de los tres cuerpos cuando el movimiento global en (2) es plano y los primarios se hallan en movimiento circular. Obsérvese entonces que el problema de los tres cuerpos (1) es una perturbación del reducido. Si -como pasa en el sitema sol,

[29]Tras una revisión que luego comentaremos, apareció publicada en Acta Math. 13(1890), 1-271.

tierra, satélite – también M_1 es pequeño con relación a M_2 una manera de proceder en las ecuaciones es considerar que μ es un pequeño parámetro y estudiar el problema reducido como una perturbación de la situación más sencilla:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^3}, \\ \ddot{x}_2 = 0, \\ \ddot{x}_3 = \dfrac{x_2 - x_3}{|x_2 - x_3|^3}. \end{cases}$$

En el trabajo presentado por Poincaré lo primero que destaca es la originalidad en las técnicas: se inauguran los métodos geométricos en el estudio de problemas (hamiltonianos) de la mecánica. Sobresalen además dos resultados. La existencia de soluciones periódicas del problema reducido (2) cuando $\mu \sim 0$ y, notablemente, la prueba de la ***estabilidad*** de las mismas. En clara referencia a este resultado Poincaré escoge la divisa "*Nunquam præscriptos transibunt sidera fines*" para presentar de forma anónima –como era preceptivo– su memoria.

Pasemos revista someramente al contenido de la misma[30] ([A], [Ba]). Consta de dos partes, de tres capítulos cada una, y termina con una serie de 9 notas aclaratorias (A, ... , H, I), elaboradas a petición de los censores del trabajo, Mittag-Leffler y Weierstrass[31] quienes no ocultan la gran dificultad que ofrece la lectura de la memoria[32]. En el capítulo 2 se introducen los ***invariantes integrales*** –en particular el volumen– y se prueba el célebre teorema de recurrencia. El capítulo 3 se ocupa de la teoría general de soluciones periódicas para sistemas de ecuaciones de la forma:

$$x' = X(t, x, \mu),$$

poniendo énfasis en la dependencia analítica en el parámetro μ. Establece condiciones suficientes –teorema de la función implícita – para que una solución periódica en $\mu = 0$ se pueda continuar a $\mu \sim 0$. Para ello, introduce la ecuación variacional (asociada en este caso a la solución periódica $x_0(t)$ en $\mu = 0$). A saber,

$$z' = \left(\frac{\partial X}{\partial x}(t, x_o(t), \mu)\right) z.$$

La razón es bien natural: la diferencia $\Delta x(t)$ de dos soluciones cuyos datos iniciales se diferencian en Δx_o es múltiplo de $Y(t)\Delta x_o$ donde $Y(t)$ es la matriz fundamental de la ecuación variacional.

Los resultados se especializan para la clase de sistemas Hamiltonianos

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, \mu) \\ y' = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, \mu), \end{cases} \qquad (3.\mu)$$

[30] Que no coincide con el de la memoria que finalmente se publica en Acta en 1890.
[31] En una segunda etapa, es E. L. Phragmén quien asume la responsabilidad de la revisión.
[32] Según se deduce del epistolario entre ambos, publicado en el Vol. 35 de Acta.

donde $x, y \in \mathbb{R}^p$ (p grados de libertad) y donde la función:

$$F(x, y, \mu) = F_o(x) + F_1(x, y)\mu + F_2(x, y)\mu^2 + \cdots$$

es además 2π-periódica en y. En efecto, se establece en el capítulo 1 de la segunda parte que el problema reducido de los tres cuerpos y otros problemas de la mecánica se encuadran en este escenario. Se obtienen condiciones suficientes para preservar a $\mu \sim 0$ las soluciones periódicas de (3) cuando $\mu = 0$. Nótese que en este caso el sistema es trivialmente integrable y su espacio de fases está constituido por toros invariantes. Analiza los exponentes característicos de las órbitas cerradas perturbadas. En el caso en que éstas órbitas son hiperbólicas, analiza las variedades estable e inestable –que ya había introducido en [P-86] y que él llama "superficies asintóticas"– probando que son funciones analíticas en $\sqrt{\mu}$.

El primer capítulo de la segunda parte contiene la prueba de la estabilidad de las órbitas perturbadas. El punto crucial es la demostración de que las variedades estable e inestable coinciden y, conjuntamente, constituyen una superficie cerrada que delimita un recinto tridimensional, del que, por invariancia de las variedades, las soluciones no pueden escapar (cf. [A], [Ba]). La demostración de que tales superficies asintóticas coinciden reposa fuertemente en el hecho de que ámbas se puedan desarrollar en forma serie convergente de potencias de $\sqrt{\mu}$. La nota final I de la memoria aclarara los pasos obscuros de la demostración que, de la analiticidad en $\sqrt{\mu}$ de las superficies asintóticas, se había dado en la primera parte.

El capítulo segundo contiene la prueba de no existencia de integrales primeras globales, independientes del Hamiltoniano; así como del carácter divergente de algunas representaciones en series formales introducidas por otros autores, de las soluciones del problema de los tres cuerpos (v.g. los desarrollos de Lindstedt).

Poincaré obtuvo el premio. He aquí una fracción del informe de Weierstrass ([D]), dirigido por carta a Mittag-Leffler: "La memoria sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la Dinámica con la divisa *Nunquam* ... es, sin discusión alguna, un trabajo de alto nivel, aunque no contiene la solución del problema general formulado en la primera cuestión, sino que versa sobre una solución particular de ese problema". Continúa: "Dicho esto, no tengo dificultad alguna en declarar que la Memoria en cuestión es digna del premio. Podéis decirle a vuestro soberano que no puede considerarse, en verdad, que este trabajo porporcione la solución completa a la cuestión propuesta, pero que, no obstabte, reviste una importancia tal que su publicación abrirá una nueva era en la historia de la Mecánica Celeste. Por tanto, el fin que se propuso Su Majestad al abrir el Concurso puede considerarse conseguido".

P. Apell, compañero de estudios desde los tiempos del liceo, obtiene también la mención honorífica[33]. La trascendencia internacional alcanzada por el certamen mueve al gobierno francés a nombrarlos Caballeros de la Legión de Honor ([D]).

Pero la crónica del premio no termina en este punto. El proceso de revisión de la memoria, tanto para el premio como para su posterior publicación en Acta fue más largo y complejo de lo esperado. Para empezar, el conocido estilo intuitivo de Poincaré, parco

[33] Al contrario que Poincaré, presenta al premio un trabajo sobre el desarrollo en series trigonométricas de las funciones abelianas, que no coincide con ninguno de los temas propuestos.

en explicaciones, no ponía las cosas fáciles. Ya en el verano de 1888, Weierstrarss y Mittag-Leffler se reúnen en Alemania para estudiar la memoria. Ante las dificultades, Mittag-Leffler "pasa la pelota" a su joven asistente en Acta, el profesor L. E. Phragmén[34], hacia Diciembre de 1888. En el verano de 1889, a sendas preguntas de Phragmén sobre la analiticidad de los exponentes característicos y de las superficies asintóticas en $\sqrt{\mu}$, Poincaré responde elaborando las notas H e I. A finales de Noviembre la memoria ya ha sido editada y distribuida por Acta.

Sin embargo, a primeros de Diciembre, Poincaré escribe urgentemente a M.-L. para comunicarle que ha descubierto un error en la prueba de la estabilidad: las superficies asintóticas no sólo no coinciden sino que, formalmente, ha llegado a la conclusión de que se cortan transversalmente en infinitos puntos, generando infinitas órbitas doblemente asintóticas, es decir órbitas que convergen en los dos sentidos del tiempo a la misma órbita cerrada. De esta forma entran por primera vez en escena los *puntos homoclínicos*. En vista de lo sucedido, M.-L. retira de la circulación todos los números que ya se habían distribuido de Acta y Poincaré revisa la memoria que aparece finalmente en Diciembre de 1890. En la nueva versión ya no figura el resultado de estabilidad y el autor agradece en la introducción a Phragmén el haberle señalado un error importante –no especificado– en el trabajo original.

La presencia de puntos homoclínicos –como los descubiertos por Poincaré[35]– se considera actualmente como una posible evidencia de caos en un sistema dinámico. Por ejemplo, S. Smale ([Sm]) afirma: "Mi convicción más profunda es que los puntos homoclínicos habitan en el corazón del caos". Y obviamente esto no pasó desapercibido a Poincaré[36]. Otra vez citando a [Sm]: "Los físicos (y también muchos matemáticos) han tardado en identificar los fenómenos caóticos porque orientaron su investigación hacia el estudio de ecuaciones particulares así como de soluciones particulares de las mismas. Pero hace 100 años, Poincaré descubrió la posibilidad de la existencia de puntos homoclínicos al trascender esta metodología".

Finalmente, sólo cabe reseñar que la memoria fue tomada como base del célebre tratado: "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" ([P-mc]) (cf. [M] para una descripción sumaria de la obra).

4. Etapa final.

Para cerrar este trabajo añadiremos algunos datos más sobre la vida de Poincaré ([D]). Ya se ha dicho que alcanzó gran prestigio internacional. Viajó por todo el mundo: visitó Estados Unidos y una buena parte de Europa, impartiendo conferencias tanto especializadas como de divulgación. Acaparó numerosos premios y medallas de sociedades científicas de diversos paises, y obtuvo el doctorado honoris casusa de las universidades de Cambridge, Cristianía (actualmente Oslo), Kolozsvar, Oxford, Glasgow, Bruselas, Estocolmo y Berlín.

Muchos aspectos de su quehacer en matemáticas han sido sesgados aquí, por ejemplo sus importantes aportaciones a la topología ("Analysis Situs"). Pero de lo que apenas se ha tratado es de sus contribuciones a diversas ramas de la Física. Dedicó una parte sustancial de su docencia en la Sorbona a la física matemática elaborando textos sobre las

[34] Conocido por el principio de Phragmén-Lindelöff.

[35] Que todavía no se ha probado rigurosamente en el problema reducido de los tres cuerpos ([A]).

[36] Véase el epílogo al último capítulo del vol. III de [P-mc].

diversas materias que impartió: Potencial y Mecánica de Fluidos, Teoría Matemática de la Luz, Termodinánica, Electricidad y Óptica, Capilaridad, Lecciones sobre la Teoría de la Elasticidad[37], Lecciones sobre las figuras de una masa fluida, Cálculo de Probabilidades, Teoría Analítica de la Propagación del Calor, etc. En el último tramo de su carrera Poincaré se ocupó de difundir las nuevas tendencias de la Física en los foros internacionales más especializados. Por poner un ejemplo, E. Solvay, químico e industrial Belga[38], se erigió en mecenas de la física y – a petición del físico W. Nernst – organizó en Bruselas una reunión (el primero de los Congresos Solvay) de físicos de todo el mundo, para estudiar las nuevas teorías de la Mecánica. El tema fue: la teoría de la radiación y de los cuantos. Tuvo lugar entre los días del 30 de Octubre al 3 de Noviembre de 1911[39] ([S]). Allí concurrieron Madame Curie, Rutherford, Lorentz, Einstein, Planck, Sommerfeld, De Broglie y otros más. Fue precisamente Poincaré uno de los invitados especiales. En 1909 fue invitado a dar un ciclo de seis conferencias en la fundación Wolfskelil de la Sociedad Real de Ciencias de Göttingen, uno de los baluartes de la física y la ciencia alemana durante el primer tercio del siglo XX (Hilbert, Minkowskii, Hurwitz, Runge, Max Born, Heisemberg, Prandlt etc, trabajaban por aquellos años en la facultad de ciencias bajo la dirección administrativa de F. Klein ([Re])). De hecho, se considera a Poincaré junto con Lorentz, uno de los precursores de la teoría de la relatividad.

A principios de siglo, la popularidad de Poincaré era manifiesta. Se le requería por la prensa para pronunciarse sobre temas políticos, o por asociaciones con fines sociales, culturales o patrióticos –por ejemplo, la Liga por la Cultura Francesa o la Liga Francesa para la Educación Moral – para que se enrolara o apoyara el proyecto correspondiente. El gobierno de la nación y la Academia de Ciencias le encomendaron diversas tareas de interés público. Dirigió la comisión de la Academia de Ciencias para la campaña de medición del meridiano que pasa por Quito, la comisión interministerial para las Aplicaciones de la Telegrafía sin Hilos, fue presidente del Consejo de Observaciones, etc. Entre los actos relacionados con la Exposición Universal de París del año 1900, organizó el Congreso internacional de Matemáticas donde pronunció la conferencia: "Sur le rôle de la l'intuition et de la logique en mathématiques". Este congreso pasó a la posteridad precisamente por la lección magistral de D. Hilbert en la que planteó la célebre lista de los 23 problemas ([Hi]).

Poincaré disfrutó de una vida familiar tranquila (cf. [Bo]). Se casó en 1881 con una descendiente de los célebres naturalistas Étienne e Isidore Geoffroy-Saint-Hilaire –a quien debió conocer en los círculos de la Academia. Tuvo tres hijas y un hijo. Su sobrino, el hijo de su hermana, P. Boutroux, se dedicó a las matemáticas y escribió un artículo sobre la obra filosófica de su tío.

A pesar de su edad no excesiva –54 años– la salud empieza a causarle problemas hacia 1908. En el Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en Roma ese año, no puede dictar la conferencia plenaria que tenía preparada al sufrir un episodio de hipertrofia de la próstata que requiriere una operación urgente[40]. Cuatro años más tarde, la evolución de

[37]Redactadas por J. Drach y E. Borel

[38]Amasó una gran fortuna con el desarrollo de un proceso industrial para la elaboración del bicarbonato sódico ([S]).

[39]La fecha reseñada en [D] no parece correcta.

[40]Su mujer acude a Roma para atenderlo durante el viaje de vuelta a París.

la enfermedad aconseja una nueva intervención que se realiza el nueve de Julio de 1912. El éxito de la misma no hace temer por su vida. Sin embargo, muere el 17 de Julio a causa de una embolia.

Durante los dos últimos años de su vida se había enfrascado en la demostración de un teorema de punto fijo, con el que se podría obtener la existencia de una nueva clase de soluciones periódicas para el problema de los tres cuerpos (su tema predilecto de trabjo durante muchos años). Sin embargo, la demostración se le resistió y, quizás presintiendo la cercanía de su fin, escribe la siguiente carta (v. [D]) a Guccia[41], director y fundador del Circolo Matematico di Palermo:

Mon cher ami,

En su última visita le comenté algo sobre un trabajo que se me resiste desde hace dos años. No he sabido avanzar y me decido a abandonarlo provisionalmente para darle tiempo a madurar. Esto resultaría satisfactorio si estuviese seguro de poderlo retomar, a mi edad no puedo responder, y los resultados obtenidos, susceptiples de poder situar a los investigadores en una vía nueva e inexplorada, me parecen tan prometedores, que, a pesar de las decepciones que me han causado, me resigno a sacrificarlos. En estas condiciones ¿Consideraría conveniente la publicación de una memoria inacabada, en la que expondría el objetivo que he perseguido, el problema que me he propuesto, y los resultados de los esfuerzos que he hecho para resolverlo? Lo más embarazoso es que me veré obligado a incluir muchas figuras, precisamente porque no he podido llegar a una regla general, obteniendo solamente un cúmulo de soluciones particulares. Le ruego que me diga lo que piensa de esta cuestión y qué me aconseja.

Votre ami dévoué,

POINCARÉ.

El trabajo fue admitido a publicación ([P-12]) con fecha del 12 de Marzo de 1912 y conjetura la validez del siguiente teorema de punto fijo[42] : "Denotamos por x e y las coordenadas polares de un punto y considero una corona circular comprendida entre dos circunferencias extremas, una exterior $x = a$, y la otra ineterior $x = b$. Considero una transformación puntual biunívoca[43] T de esta corona en sí misma. Representamos por x e y las coordenadas de un punto M y por X e Y las de su transformado; y hago las dos hipótesis siguientes:

Primera condición. - Al transformar T la corona en sí misma transformará en sí mismas las circunferencias $x = a$ y $x = b$, de suerte que se tendrá $X = x$ si $x = a$ o $x = b$; pero se tendrá $Y < y$ sobre $x = a$ e $Y > y$ sobre $x = b$ o inversamente. Es decir, la transformación hace rotar a las circunferencias exteriores sobre sí mismas, avanzando en el *mismo sentido* sobre todos los puntos de *cada* una de las circunferencias , ... pero de forma que las rotaciones de las *dos* circunferencias se hacen en *sentido contrario* ...

[41] G. B. Guccia fue discípulo de Brioschi y de Cremona. Fundó el Circolo Matematico di Palermo en 1884 para estimular la investigación matemática de alto nivel por la vía de abrir dicha sociedad a los más prestigiosos matemáticos de la época. Inició la edición del Rendiconti en 1885 ([Pa]) .

[42] Del original [P-12].

[43] Se supone que T es además un homeomorfismo.

Segunda condición. - La transformación conserva las áreas o, más en general, admite un invariante integral positivo, es decir, existe una función positiva $f(x,y)$ tal que se tenga:

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(X,Y)\,dX\,dY,$$

estando extendidas las integrales, respectivamente, sobre un área cualquiera y su transformada.

Si estas dos condiciones se satisfacen, yo afirmo que existirán siempre dos puntos en el interior de la corona que no serán alterados por la transformación."

Durante su visita a Göttingen en 1909, Poincaré ya había comentado a sus colegas alemanes –D. Hilbert, entre otros– las dificultades que la prueba del teorema le estaba planteando. Al morir, el problema es bautizado en Alemania –con bastante ironía– como el "último teorema de Poincaré" ([Re]). Sin embargo, es G. D. Birkhoff –futuro continuador de las ideas geométricas de Poincaré en ecuaciones diferenciales– quien acepta el desafío lanzado por Poincaré en [P-12]. Menos de un año después de su muerte obtiene una demostración completa del teorema geométrico ([Bi])[44].

Referencias

[A] K. G. Andersson, *Poincaré's Discovery of Homoclinic Points*, Arch. Hist. Exact Sc. **48, n. 2** (1994), 133-149.

[Ba] J. Barrow-Green, *Oscar II's Prize Competition and the Error in Poincare's Memoir on the Three Body Problem*, Arch. Hist. Exact Sc. **48, n. 2** (1994), 107-133.

[B] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, Touchstone, Simon & Scuster (1986), 526-554.

[Bi] G. D. Birkhoff, *Proof of Poincaré's geometric theorem*, Trans. Amer. Math. Society **14** (1913), 12-22.

[Bo] P. Boutroux, *Lettre à Mittag-Leffler*, Acta mathematica **38** (1921), 197-201.

[Br] F. Brodwer (ed.), *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, vol. 39, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Part 2, American Math. Society, Providence, R. I., 1983.

[CL] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill, New York, 1955.

[D] G. Darboux, *Éloge Historique d'Henri Poincaré*, Mémories de l'Académie des Sciencies (también en las Œuvres, Vol. , pp VII-LXXI) **52** (1914), LXXXI-CXLVIII.

[Di] J. Dieudonné, *Poincaré*, Dictionary of Scientific Biography, Vol. 11, Charles Coulton Guillespie (Ed.), Charles Scribner's & Sons, New York (1975), 51-61.

[Do] M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc (1976).

[F] L. R. Ford, *Automorphic Functions*, Chelsea Pub. Co., New York (1951).

[FJ] Fritz John, *Partial Differential Equations*, (Forth Edition) Springer-Verlag, Berlín (1982).

[G] D. L. Goroff, véase la sección de introducción a la obra [P-mc], I1-I107.

[Hi] D. Hilbert, *Sur les problèmes futurs des mathematiques (Les 23 Problèmes)*, Éditions Jaques Gabay, Les Grands Classiques Gauthiers-Villar, Sceaux, 1990..

[HS] M. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Linear Algebra and Dynamical Systems*, Academic Press, New York (1974).

[JS] G. A. Jones, D. Singerman, *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).

[44] No podemos dejar de incluir el comentario de Darboux en 1913 ([D]): "Chose étrange! Ce théorème de Géométrie, qui avait défié si longtemps les efforts de Poincaré, a été démontré en trés peu de temps par un gèométre américain, M. Birkhoff, ... "

[Kl] Kline M., *Mathematical Thouhgts from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Oxford (1970).

[L] J. Lehner, *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, American Mathematical Society, Providence, R. I. (1964).

[Lt] J. Lützen, *Note by the Communicator of Two Papers, by J. Barrow-Green and by K. G. Andersson, on Poincaré*, Arch. Hist. Exact Sc. **48, n. 2** (1994), 105-107.

[M] J. Mawhin, *The Centenial Legacy of Poincare and Lyapunov in Ordinary Differential Equations*, Inst. Math. Pur. et Appl. Un. Catholique de Louvain, Rapport n^o 231, October (1993); Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **Serie II N. 34** (1994), 9-46.

[P-78] H. Poincaré, *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles*, Journal de l'École Polytechniqe 45^e **Cahier** (1878), 13-26.

[P-81] H. Poincaré, *Mémorie sur les courbes définies par une équation différentielle*, Jour. Mat. Pur. Appl. (3^e Serie) **VII** (1881), 375-422.

[P-81b] H. Poincaré, *Sur les fonctions Fuchsienes*, Comp. rend. Acad. Sc. Paris (14 février) **92** (1881), 333-335.

[P-81c] H. Poincaré, *Sur les fonctions Fuchsienes*, Comp. rend. Acad. Sc. Paris (21 février) **92** (1881), 395-398.

[P-81d] H. Poincaré, *Sur les fonctions Fuchsienes*, Comp. rend. Acad. Sc. Paris (27 juin) **92** (1881), 1484-1487.

[P-82] H. Poincaré, *Mémorie sur les courbes définies par une équation différentielle*, Jour. Mat. Pur. Appl. (3^e Serie) **VIII** (1882), 251-296.

[P-82b] H. Poincaré, *Théorie des groupes Fuchsiens*, Acta Mathematica **I** (1882), 1-62.

[P-82c] H. Poincaré, *Sur les fonctions Fuchsiennes*, Acta Mathematica **I** (1882), 193-294.

[P-84] H. Poincaré, *Sur les groupes des équations linéaires*, Acta Mathematica **4** (1884), 201-311.

[P-85] H. Poincaré, *Sur les Courbes Définies par les Équations Différentielles*, Jour. Mat. Pur. Appl. (4^e Serie) **I** (1885), 167-244.

[P-86] H. Poincaré, *Sur les Courbes Définies par les Équations Différentielles*, Jour. Mat. Pur. Appl. (4^e Serie) **II** (1886), 51-217.

[P-12] H. Poincaré, *Sur un théorème de géométrie*, Rendiconti Circolo Mat. Palermo **33** (1912), 375-407.

[P-21] H. Poincaré, *Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré (faite par lui-même)*, Acta mathematica **38** (1921), 1-135.

[P-mc] H. Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics*, 3 Vols. con una introducción de D. L. Goroff (D. L. Goroff, ed.), American Institute of Physics / History of Modern Physics and Astronomy Vol. 13, 1993.

[Pa] K. H. Parshall, *How we got where we are: an international overview of mathematics in national contexts (1875-1900)*, Notices Am. Math. Soc. **43 n. 3** (1996), 287-296.

[Pe] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York (1991).

[R] A. Rañada, *Mecánica Clásica*, Alianza Universidad Textos, Madrid (1990).

[Re] C. Reid, *Courant: the story of an improbable mathematician*, Springer-Verlag, Berlín (1976).

[Sa] J. Sabina de Lis, *Poincaré y la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales (I)*, Revista de la Academia Canaria de Ciencias (en el presente volumen) (1996).

[S] J. M. Sánchez Ron, *El Poder de la Ciencia: historia socio-económica de la física (siglo XX)*, Alianza Editorial, Madrid (1992).

[Sm] S. Smale, *What is Chaos?*, Chaos: the new science (John Holte, ed.), Univ. Press of America, Lanham, Maryland, 1993, pp. 89-104.

[Sr] V. I. Smirnov, *Biography of A. M. Lyapunov*, Int. J. Control **55, n. 3** (1992), 775-784.

[W-H] H. Wussing, W. Arnold, *Biografías de Grandes Matemáticos*, Universidad de Zaragoza (1989).

AVENIDA DE LA TRINIDAD S/N, 38271-LA LAGUNA, SPAIN.

E-mail address: Jsabina @ ull.es

Recibido: 24 Septiembre 1996