Recibido: viernes, 07 mayo 2004

multimedia ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 3, no. 3 (jun. 2007)

Las matemáticas que se esconden detrás de los instrumentos (*)

Carlos Mederos Martín
Departamento de Matemáticas, IES Viera y Clavijo (La Laguna, Tenerife) y Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia
e-mail: carlos.mederosmartin@gobiernodecanarias.org

Introducción

Si queremos contemplar la Matemática como elemento de creación cultural, como una parcela del conocimiento humano que ha influido notablemente en la formación de las diferentes visiones del mundo que la humanidad ha tenido a lo largo de la historia, debemos, en primer lugar, revisar las aportaciones que en este sentido nos han legado, desde la Antigüedad, los grandes filósofos. Podemos afirmar que uno de los grandes pilares en los que se apoya la cultura occidental es el pensamiento de Platón. Si nos centramos en la Filosofía de la Matemática, entonces la importancia de este filósofo es de primera magnitud, dado que fue uno de los primeros que se planteó sistemáticamente el estudio de la naturaleza de los entes matemáticos, tanto desde el punto de vista ontológico (de qué manera existen) como del epistemológico (cómo accede a ellos el conocimiento humano). Platón consideraba que los objetos tratados por la Matemática existían *realmente* situándolos fuera del mundo de las cosas sensibles, lo que les confería, de esta forma, la posibilidad de producir conocimiento verdadero, dado que no son accesibles por medio de los sentidos, siempre engañosos, sino por medio de la razón.

Pues bien, si recorremos la obra de Platón encontraremos muchas citas dedicadas a destacar la importancia de la Matemática, tanto en lo que se refiere a la formación de los individuos (especialmente los gobernantes), como a su condición de vía para la obtención de conocimiento cierto (independiente de los sentidos). Así, encontramos en su diálogo *El Filebo* la siguiente frase con la que nos centramos en el tema que nos ocupa:

> *Por la belleza de las formas lo que entiendo no es lo que entendería el vulgo. Por ejemplo, la belleza de los cuerpos vivos o su reproducción por el dibujo. Yo hablo de líneas rectas y curvas, de superficies y sólidos que derivan de la recta y del círculo con ayuda del compás, de la regla y de la escuadra. Estas formas no son como las otras, bellas bajo ciertas condiciones, sino bellas siempre en sí mismas, por naturaleza, y son una fuente de placer muy particular.*
>
> (*Filebo*, 51 c)

Platón parece decirnos que hay dos tipos de belleza: la de los cuerpos vivos o su reproducción por el dibujo, es decir, la belleza del Arte, accesible por medio de los sentidos; y la belleza de las formas puras, obtenidas por medio de la regla y el compás, es decir, la belleza de la Geometría, accesible solamente por la razón. Estos dos tipos de belleza los podemos encontrar en los antiguos instrumentos de medida: podemos hallar diseños dignos de los artistas más refinados, al mismo tiempo que se hace uso de propiedades geométricas o de relaciones matemáticas determinadas (relacionadas con la belleza de las *formas*). De esta forma, si pudiésemos entrar en el *gabinete geométrico de Le Clerc* (Figura 1), podríamos disfrutar de los dos tipos de belleza mencionados, siempre que usemos la *razón* para desenmascarar la belleza relacionada con las formas puras que normalmente se esconde detrás de la apariencia que percibimos por medio de los sentidos; y, mientras tanto, nos encontraremos con el origen de muchos conceptos matemáticos y su evolución a lo largo de la Historia, con grandes problemas planteados en la sociedad y las soluciones aportadas por los matemáticos; en definitiva, estaremos asimilando de forma práctica cómo la Matemática ha participado en la creación de la Cultura, en unos casos, y, en otros, cómo la cultura de determinada época ha influido en la creación matemática; viendo, de esta forma, la relación Matemática-Cultura como una relación de influencia mutua.

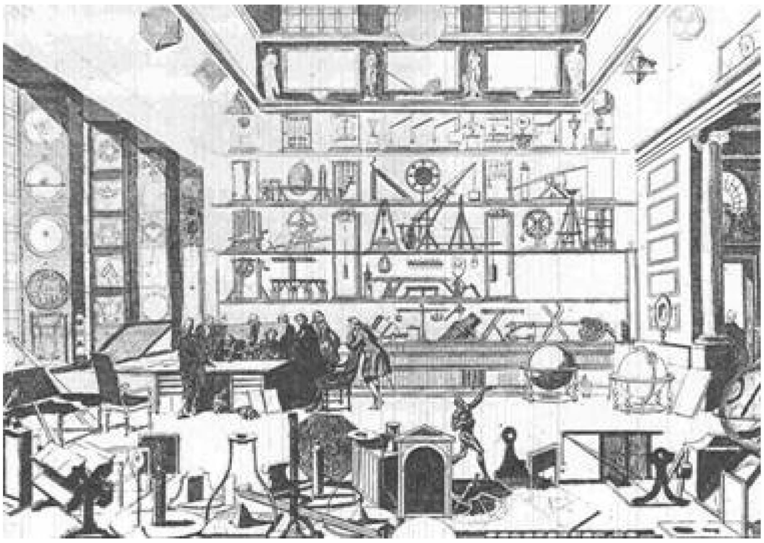

Figura 1. *Gabinete geométrico de Le Clerc.*
Grabado de fines del siglo XVII. Museo Carnavalet, París.

En lo que sigue nos centraremos en el estudio geométrico de dos instrumentos, el **reloj de péndulo** y el **perspectrógrafo**, con los que se pretende poner de manifiesto, en el primer caso, cómo los matemáticos han trabajado para resolver un problema cuya solución tuvo grandes implicaciones culturales: la determinación de la longitud en el mar; y, en el segundo, cómo los pintores y sus intentos de representar el espacio tridimensional sobre un plano, lo que les llevó al estudio de la perspectiva, condujo a los matemáticos a plantearse nuevas ideas, las cuales cristalizaron en una nueva geometría: la Geometría Proyectiva.

El reloj de péndulo

Durante los siglos XVII y XVIII, uno de los más grandes problemas planteados a los científicos fue la determinación de la longitud en el mar. De la solución de este problema dependía la vida de los marineros y la economía de las naciones europeas, basada, en gran medida, en las relaciones económicas con regiones muy alejadas. La importancia de este problema era tal que se convirtió en objeto de investigación de marinos, astrónomos, matemáticos, etc., y para su solución se organizaron juntas oficiales y las monarquías europeas convocaron concursos dotados con extraordinarios premios en los que participaron los más grandes científicos del momento.

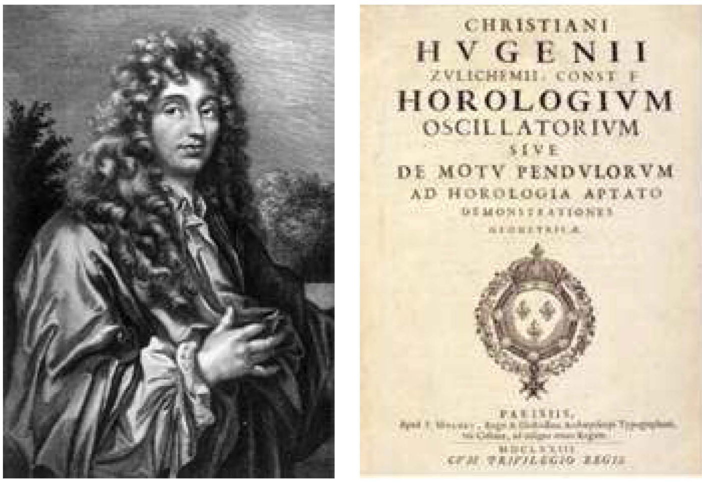

Figura 2. C. Huygens (i); portada de la primera
edición, en 1673, del *Horologium Oscillatorium* (d).

Uno de los más bellos intentos de resolución de este problema se encuentra en el libro de C. Huygens *Horologium Oscillatorium*, publicado en París en 1673 (Figura 2). Este libro está dividido en cinco partes; en la primera se describen las características técnicas de un reloj de péndulo que, combinando las maravillosas propiedades mecánicas y geométricas de la curva cicloide, pudiese funcionar bien sobre un barco, ¡independientemente del movimiento de éste debido al oleaje! Estas propiedades están descritas en las restantes partes del libro, especialmente su *tautocronía* y la determinación de su tangente en cualquier punto, *evoluta*, centros de curvatura, etc.

La imagen de la Figura 3, extraída del *Horologium Oscillatorium*, muestra el aspecto del reloj. Nos centraremos en la parte de la imagen señalada como "*Fig. II.*", especialmente en las dos láminas metálicas entre las que oscila el péndulo.

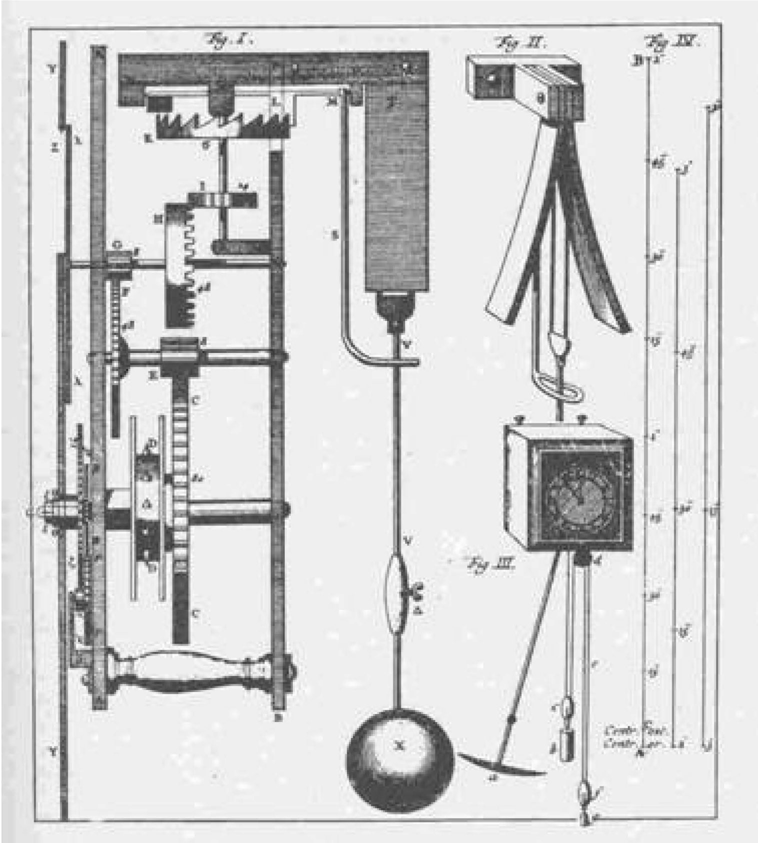

Figura 3.

Pues bien, ¿qué matemáticas se esconden detrás de este reloj? Para responder a esta pregunta debemos hacer un recorrido por las propiedades de la cicloide, como hiciera Huygens en su *Horologium*. Nos serviremos de una potente herramienta relacionada con el software del tipo denominado *Geometría Dinámica*, como es el programa *Geometer's Sketchpad*[1], el cual nos permitirá reproducir las relaciones geométricas entre los distintos elementos del instrumento que explican su funcionamiento.

1. Definición de la curva

La *cicloide* se define como la trayectoria descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin deslizarse sobre una recta (Figura 4).

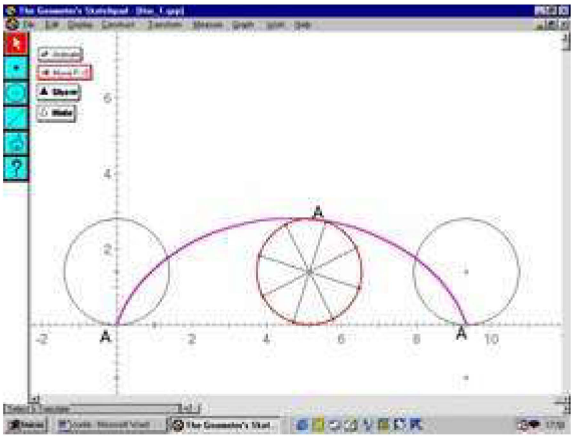

Figura 4.

2. Propiedades geométricas

Si arrollamos un hilo alrededor de una curva como, por ejemplo, la circunferencia de la Figura 5 y luego lo desenrollamos, manteniéndolo siempre tenso y con un extremo fijo en el punto Q, el otro extremo describe una curva. Si *P* es un punto de esta curva, el punto *A* será su *centro de curvatura* y el círculo de centro *A* y radio *AP* es el *círculo* *osculador*, cuyo radio *AP* llamaremos *radio de curvatura*. De esta manera, la circunferencia de partida puede ser considerada como el lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva descrita por *P*, es decir, su *evoluta*.

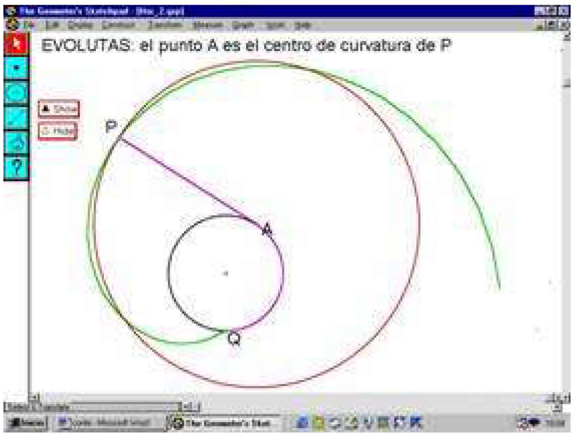

Figura 5.

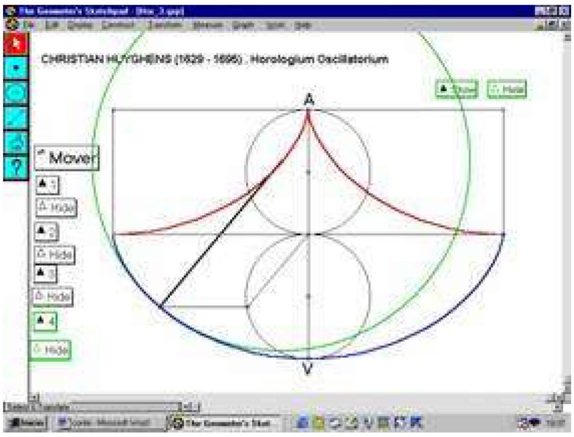

Figura 6.

Huygens prueba que la evoluta de una cicloide es otra cicloide desplazada con respecto a la primera; es decir, que si atamos un hilo en el punto *A* (Figura 6) cuya longitud sea igual a la mitad de la longitud de la cicloide y lo desenrollamos, igual que antes, su extremo describirá una cicloide del mismo tamaño.

Otras propiedades geométricas interesantes se refieren a la determinación de la tangente, dada la gran importancia que tiene ésta para el estudio del movimiento sobre la curva. De hecho, el movimiento sobre la curva se considera como movimientos elementales a lo largo de segmentos de tangente (Figuras 7 y 8):

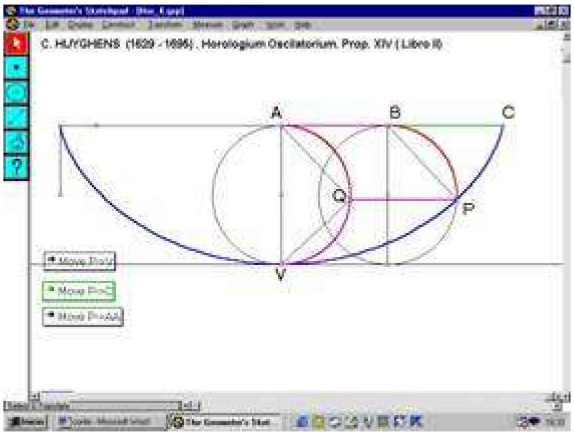

Figura 7.

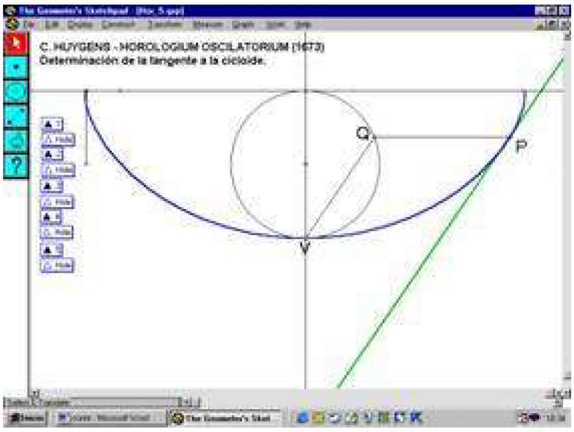

Figura 8.

3. Propiedades mecánicas

La propiedad mecánica sobre la que Huygens centra su atención es la *tautocronía* (Figura 9).

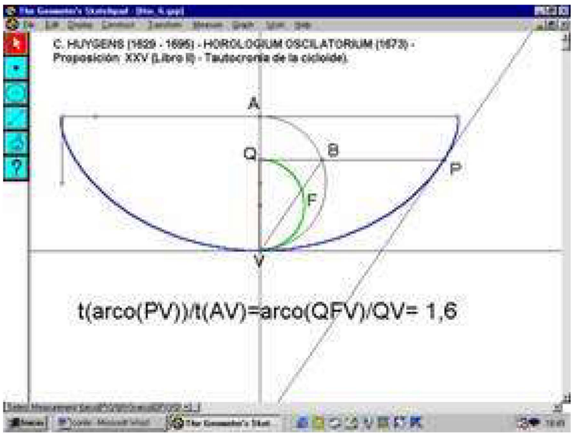

Figura 9.

En la Proposición XXV del Libro II se prueba que el tiempo que tarda un cuerpo en caer, por la acción de la gravedad, a lo largo de la cicloide, desde el punto *P* hasta el vértice *V*, es al tiempo que tarda un grave en caer, partiendo del reposo, a lo largo del diámetro *AV*, como el arco *QFV* es al segmento *QV*; es decir:

$$\frac{t[arco(PV)]}{t[segm(AV)]} = \frac{arco(QFV)}{segm(QV)}$$

En esta proporción la razón del segundo miembro es constante (razón entre una semicircunferencia y su diámetro) y el denominador de la razón del primer miembro también lo es (tiempo de caída a lo largo del diámetro del círculo generador); por lo tanto, el numerador $t[arco(PV)]$ debe serlo igualmente. Esto significa que el tiempo de caída a lo largo de la cicloide es siempre el mismo, independientemente de dónde se encuentre el punto P; es decir, esta curva es *tautócrona*.

4. La síntesis: el reloj

Y he aquí la maravillosa síntesis de Huygens (Figura 10): combinando el hecho de que la evoluta de una cicloide es una curva igual (desplazada) y la extraordinaria propiedad mecánica que acabamos de ver, construyó un reloj cuyo péndulo oscilaba siguiendo una trayectoria cicloidal que, al ser tautócrona, no se veía afectada por los cambios de amplitud de sus oscilaciones debidos al balanceo del barco como consecuencia del oleaje. ¡¡¡SUBLIME!!!

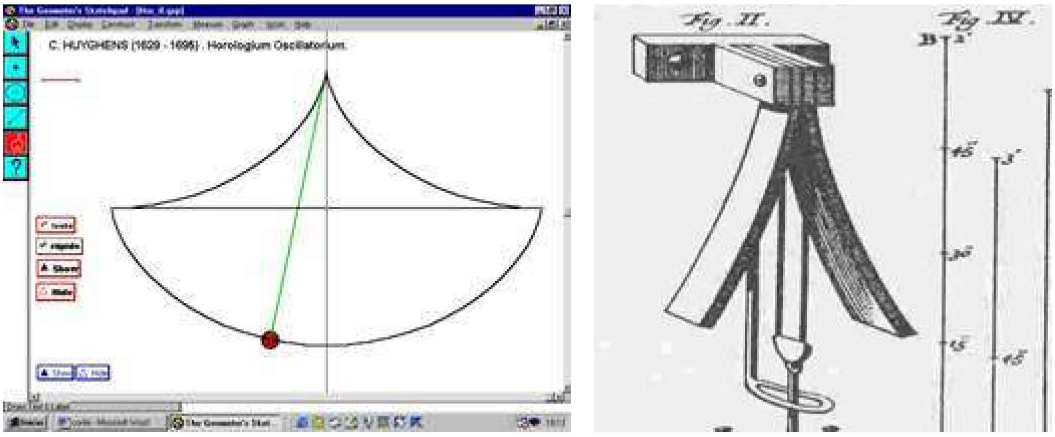

Figura 10.

El Perspectrógrafo

Hemos visto hasta ahora un ejemplo de cómo los matemáticos participan, con sus creaciones, en la solución de problemas planteados en la sociedad cuyas soluciones han tenido una tremenda implicación cultural. Veremos a continuación un ejemplo de lo contrario; es decir, cómo ciertas manifestaciones culturales han influido en el desarrollo de la Matemática. Este es el caso de la pintura, en particular la perspectiva, y el nacimiento de la Geometría Proyectiva. En efecto, si comparamos una pintura medieval con un cuadro renacentista (Figura 11) vemos de inmediato que en cada uno de ellos subyace una *geometría* diferente y, en consecuencia, es natural que nos preguntemos: ¿qué pasó durante este periodo de tiempo en la Geometría?

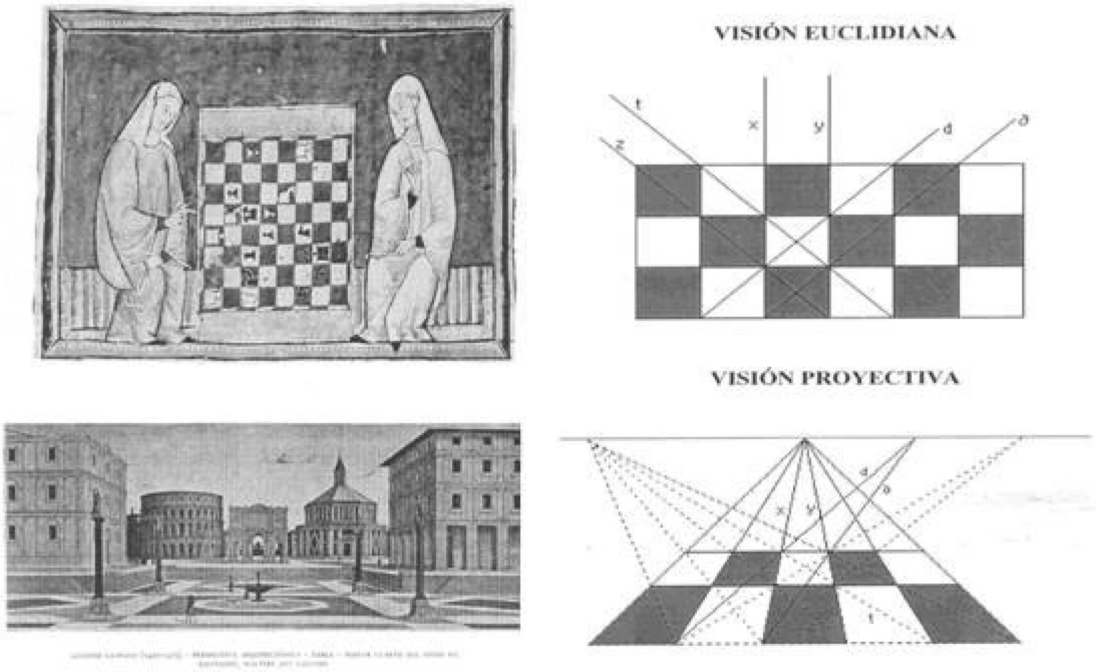

Figura 11.

Durante el Renacimiento en Europa, especialmente en Florencia, los pintores desarrollaron técnicas para representar el espacio tridimensional sobre una superficie plana usando la geometría de Euclides, en consonancia con el resurgir de las teorías de Platón que se produce en esta época, quien, como sabemos, consideraba a la Geometría como la única vía para la obtención de conocimiento cierto. En este sentido, son muy conocidas las obras de Leon Battista Alberti, Piero de la Francesca, Leonardo da Vinci, etc. en las que podemos encontrar algoritmos geométricos, destinados a los pintores, para la construcción de la perspectiva. Estas construcciones dieron lugar a una serie de instrumentos destinados a automatizarlas, de manera que pudiesen ser puestas en práctica incluso por quienes no tenían conocimientos de geometría. Estudiando estos instrumentos podemos encontrar el origen y seguir la evolución de nuevos conceptos matemáticos, y acercarnos a la obra de quienes los impulsaron. Este es caso de Girard Desargues y la Geometría Proyectiva.

Las construcciones geométricas de la perspectiva pretenden que el observador de un cuadro ?vea? el espacio tridimensional representado sobre un plano (el cuadro); en consecuencia, es natural que estas construcciones se basen en las teorías imperantes sobre la naturaleza de la visión humana. Ya en la Antigüedad, Euclides había escrito un libro de naturaleza geométrica, *La Optica*, en el que explicaba que la visión se basaba en la emisión por el ojo (un único ojo) del observador de un haz de *rayos visuales* tales que al incidir en los objetos formaban la imagen de éstos. De esta manera, la representación de un objeto en perspectiva no es sino una *sección* de este haz de rayos (Figura 12). Esta teoría de la visión originó construcciones geométricas como las descritas por Leon Battista Alberti en su libro *De Pictura*, publicado en Florencia en 1435, o las de Piero de la Francesca, autor del tratado *De prospectiva pingendi* (ca. 1475). Los intentos de reproducir estas construcciones por medio de artilugios mecánicos fueron el origen de muchos *instrumentos*, como el mostrado en la Figura 13.

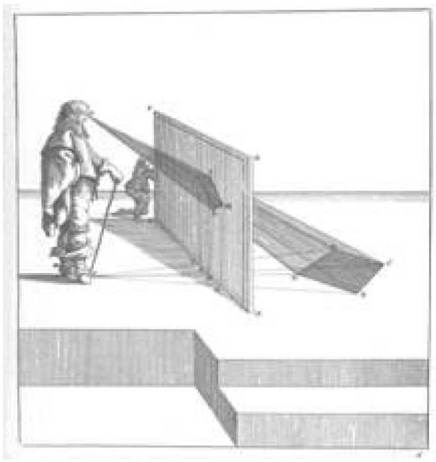

Figura 12.

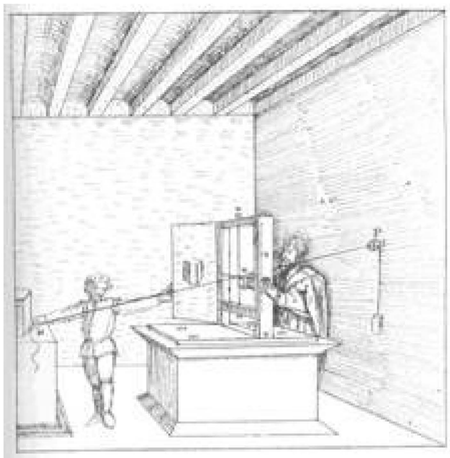

Figura 13.

Uno de estos instrumentos es el *perspectrógrafo*, que consiste básicamente en una serie de regletas articuladas (polígono articulado) de tal manera que cuando el extremo de una de ellas recorre el contorno de un objeto, el extremo de otra, provisto de un lápiz, dibuja el objeto en perspectiva. La Figura 14 muestra dos ejemplos de este instrumento: el primero atribuido al jesuita, matemático y filósofo italiano Mario Bettini (1582-1567) y el segundo al matemático, astrónomo, físico y filósofo suizo Jean Henri Lambert (1728-1777).

Si comparamos estos dos perspectrógrafos, como hicimos con la pintura medieval y la renacentista, veremos que las geometrías subyacentes son diferentes: el primero es una variante del *pantógrafo*, cuya única función es dibujar una imagen *semejante* al objeto real, conservando la forma del mismo tal como lo ve el artista, es decir, el instrumento reproduce la *visión* del pintor; sin embargo, en el segundo se observa una *transformación* que cambia la forma del objeto y que no conserva los ángulos, ni las distancias, ni el área, ni el paralelismo, por lo que podemos intuir que este instrumento no incumbe a la geometría euclídea. En resumen, en el primer caso la geometría del espacio a representar es la misma que la del instrumento; mientras que en el segundo, el instrumento se rige por una geometría "diferente". Si el perspectrógrafo de M. Bettini, como ya se dijo, reproduce la *visión*, el de Lambert reproduce la *perspectiva*. Esto nos lleva a pensar que algo cambió en la geometría en el periodo de tiempo transcurrido entre la vida de estos dos personajes.

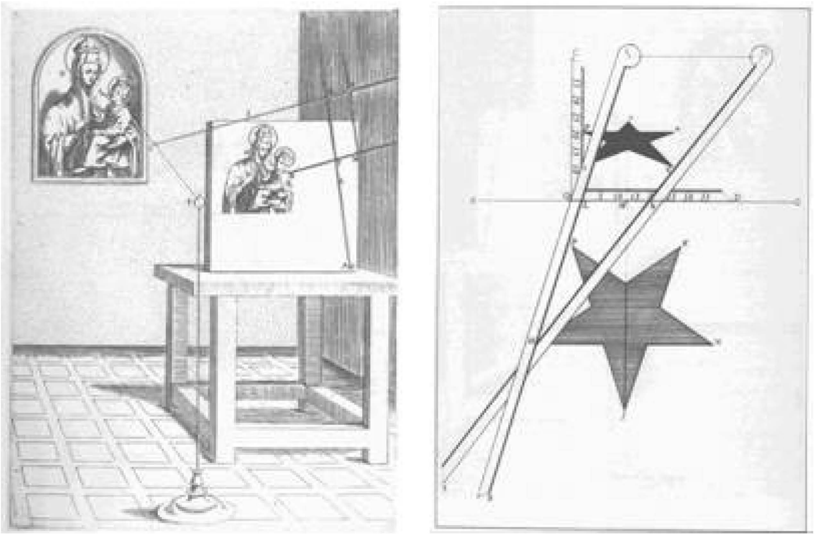

Figura 14. Perspectrógrafos de Bettini (i) y Lambert (d).

Para seguir la traza de este cambio es necesario acudir a la obra del ingeniero y matemático francés Girard Desargues (1591-1661). Desargues fue un hombre eminentemente práctico, que orientó la mayoría de sus publicaciones a mejorar el rendimiento del trabajo de los constructores y artistas liberales. Con esta intención publicó obras sobre la talla de piedras, la construcción de relojes de sol, la enseñanza de la música, etc. También fue un estudioso de la perspectiva, sobre la que compuso un tratado en el que usa la geometría para formular, en términos matemáticos, las reglas de la perspectiva que habían sido desarrolladas por los pintores y arquitectos del Renacimiento.

En 1639 Desargues publica un pequeño tratado sobre las cónicas titulado *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan* [*Borrador de un ensayo que trata de los resultados de los encuentros de un cono con un plano*], en el que considera las cónicas como las diversas formas de ver una circunferencia en perspectiva. En efecto, los rayos visuales que parten del ojo del observador y que inciden en el círculo forman un cono, que seccionado por un plano (el cuadro de los pintores renacentistas) determina una sección cónica que no es sino la ? forma? con la que se ve la circunferencia desde la posición en la que se encuentra el observador. Cambiando las posiciones del observador (vértice del cono) y de la sección (el cuadro) se pueden obtener las diversas cónicas: elipse, parábola, e hipérbola. Algunas propiedades de las diferentes secciones cambian, pero otras permanecen invariantes. Estas últimas son las que Desargues estudia con especial interés, dando lugar a una nueva visión de las cónicas, diferente a la de Apolonio (262-190 a.C.), para el que cada cónica se estudiaba por procedimientos particulares, de forma que lo más significativo eran las diferencias y no las propiedades comunes.

Una de las ideas más brillantes de Desargues está relacionada con la historia del infinito en Matemáticas. Estudiando la perspectiva se da cuenta de que las rectas paralelas se transforman en rectas concurrentes en un punto del *horizonte*, lo que, a primera vista, nos obliga a pensar que el hecho de que dos rectas sean paralelas o concurrentes no es una propiedad común a las diferentes secciones de una proyección. Para evitar esto, Desargues asigna a cada recta un *punto del infinito*, de manera que dos rectas paralelas son las que tienen este punto en común. Así, las rectas concurrentes se corresponden con rectas concurrentes, teniendo en cuenta que si dos rectas son paralelas –esto es, se cortan en el punto del infinito–, su imagen perspectiva serán dos rectas que se cortan en un punto del horizonte; es decir, el horizonte es la representación del conjunto de todos los puntos del infinito (la *recta del infinito*).

Otro aspecto interesante de la consideración de las cónicas expuesta es el hecho de que parece inconcebible que se puedan asimilar al círculo, curva cerrada, otras no cerradas y con ramas infinitas como la parábola; sin embargo, una parábola, que es una curva abierta, puede transformarse mediante la perspectiva en una elipse, que es una curva cerrada, al unirse las ramas infinitas en un mismo punto del *horizonte* que representa, a distancia finita, la recta del infinito común a todos los planos horizontales.

La obra de Desargues, incomprendida por sus contemporáneos, fue objeto de duras críticas. Del *Brouillon project* solamente imprimió cincuenta ejemplares que repartió entre sus “amigos” para que pudiesen discutir sus tesis. El libro se perdió, hasta que en 1854 el geómetra Chasles encontró una copia manuscrita por uno de los amigos de Desargues, Philippe de La Hyre. En 1950 se encontró un ejemplar original en la Biblioteca Nacional. El texto de este libro contiene muchos neologismos y términos tomados de la botánica, lo que dificulta enormemente su comprensión. Si a esto añadimos el auge experimentado por la Geometría Analítica de Descartes, debido a los espectaculares resultados obtenidos, comprenderemos el poco éxito alcanzado por Desargues, cuyas ideas tendrán que esperar casi dos siglos más para ser desarrolladas. Aun así, después de 1639 estudia algunos problemas de perspectiva. Su amigo el grabador Abraham Bosse (1611-1678) intenta dar a conocer las ideas de Desargues y publica en 1648 la *Manière universelle de M. Desargues pour practiquer la perspective*, en el que estudia la teoría de la *polar* de un punto respecto a un círculo, extendiéndola, por proyección, a todas las cónicas. En este tratado encontramos también el célebre *Teorema de Desargues* (Figura 15):

> *Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, sus pares de lados correspondientes se cortan respectivamente en tres puntos que están alineados.*

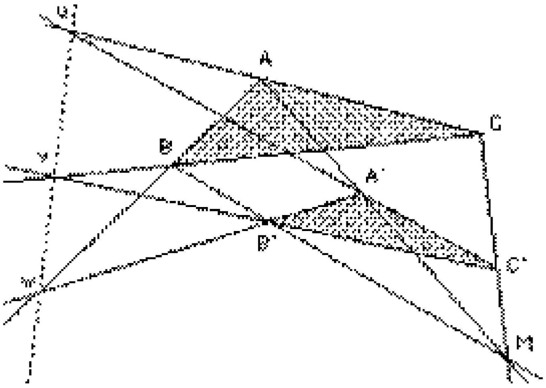

Figura 15. Teorema de Desargues.

Teorema que, por cierto, se seguirá cumpliendo aunque los lados de los triángulos sean paralelos; siempre que admitamos, como Desargues, que las rectas paralelas se cortan en el *punto del infinito*, de forma que los tres puntos de corte de los tres pares de lados están sobre la recta del infinito, es decir, están alineados. Si tenemos en cuenta que cuando los dos triángulos tienen los lados correspondientes paralelos entonces son semejantes, es decir, cumplen el Teorema de Tales, podemos afirmar que este último teorema es un caso particular del de Desargues.

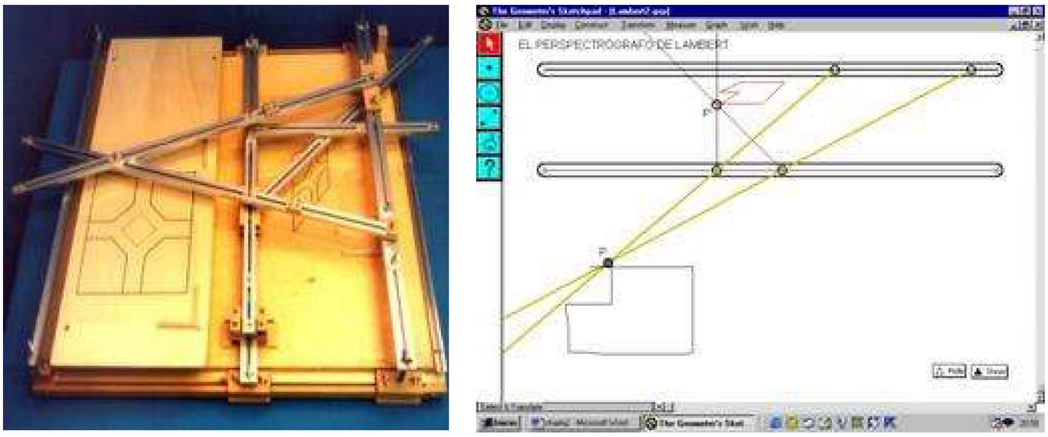

Figura 16. El perspectrógrafo de Lambert.

Pues bien, estas ideas se pueden encontrar escondidas, ocultas, en el perspectrógrafo de Lambert, de manera que si estudiamos su funcionamiento y analizamos cómo transforma diferentes objetos geométricos estaremos tratando con los orígenes de la Geometría Proyectiva. En la Figura 16 se presenta una reconstrucción de este instrumento, junto con una simulación realizada con el *Geometer's Sketchpad*.

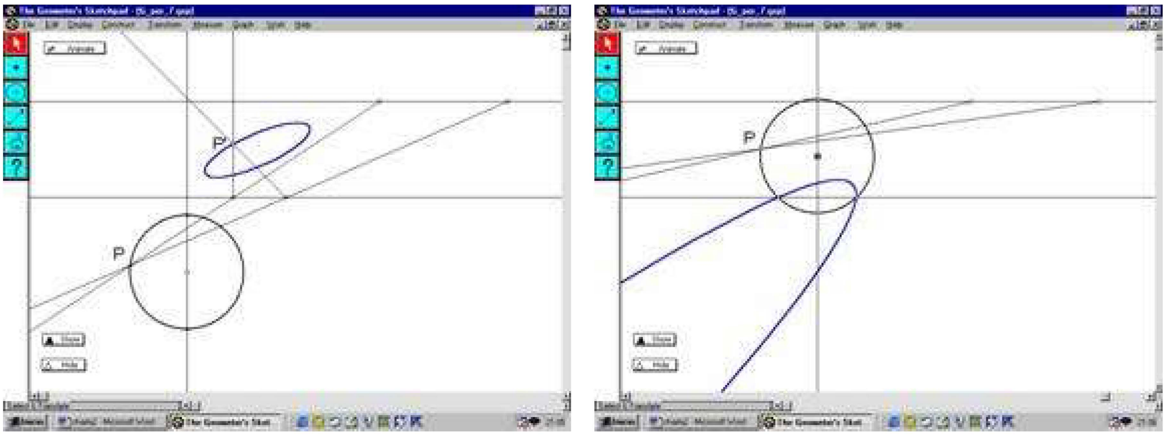

Figura 17.

Algunas de las ideas de Desargues pueden ser observadas por medio de la simulación del perspectrógrafo de Lambert. Por ejemplo, podemos “ver” las cónicas como las diferentes maneras de representar una circunferencia en perspectiva.

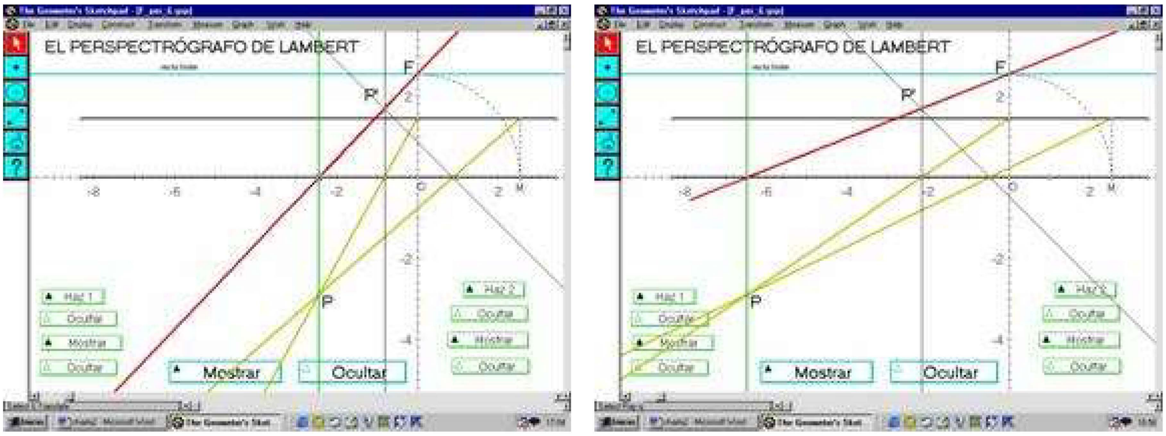

Figura 18.

Si tenemos un haz de rectas paralelas (rectas que contienen al punto *P* de la Figura 17), vemos que sus transformadas son un haz de rectas concurrentes en el punto *F*; es decir, *F* será el transformado del punto del infinito. Considerando otro haz de rectas paralelas cualesquiera, su punto del infinito se transformará en otro punto *P'* de la recta horizontal que pasa por *F*; en consecuencia, podemos afirmar que esta recta horizontal, llamada *recta límite*, es la imagen de la recta del infinito (Figura 18).

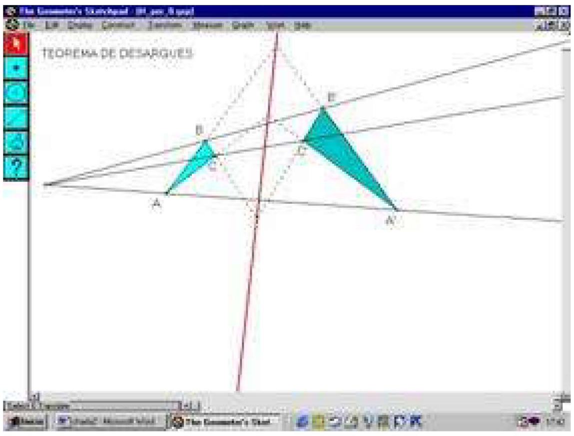

Figura 19.

Y, para terminar, volvamos al Teorema de Desargues. Este teorema, enunciado en el plano, se refiere a una propiedad de los triángulos proyectivos; a saber, si las rectas que pasan por los vértices homólogos de dos triángulos se cortan en un punto, entonces las prolongaciones de los lados homólogos se cortan en tres puntos que están alineados (Figura 19).

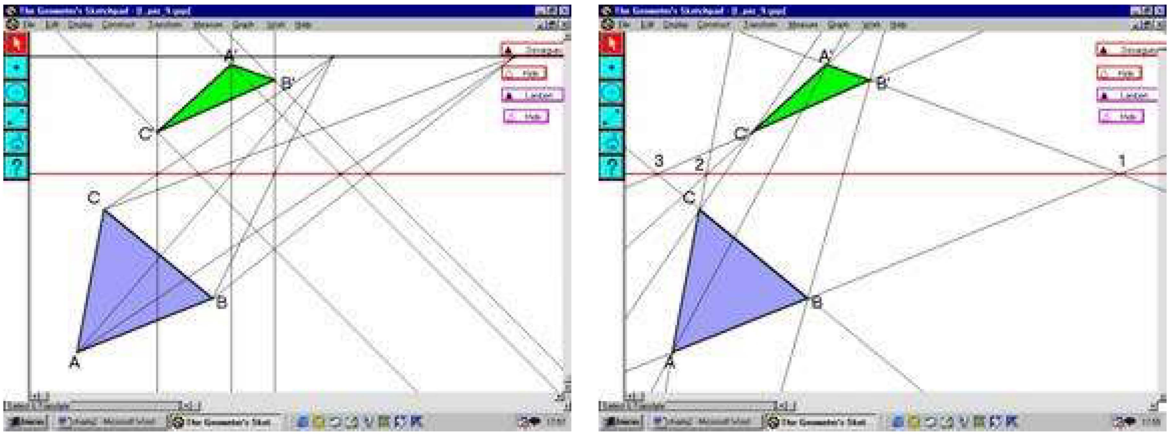

Figura 20.

La demostración de este teorema no es, desde luego, trivial; tampoco es difícil. Pero ¿qué ocurre si lo “vemos” con la geometría del perspectrógrafo (Figura 20)?

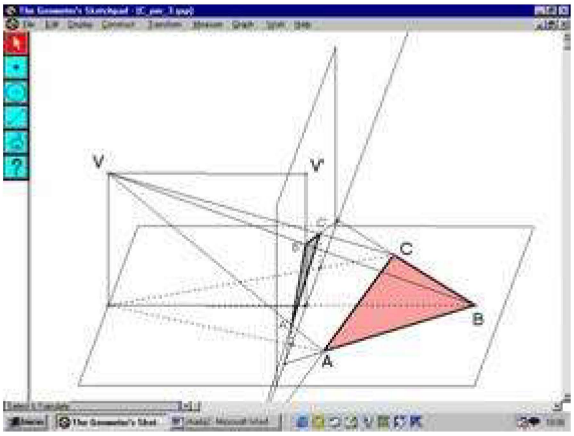

Figura 21.

Sencillamente, el Teorema de Desargues se refiere a un triángulo y a su transformado mediante el perspectrógrafo; es decir, se refiere a un triángulo visto en perspectiva.

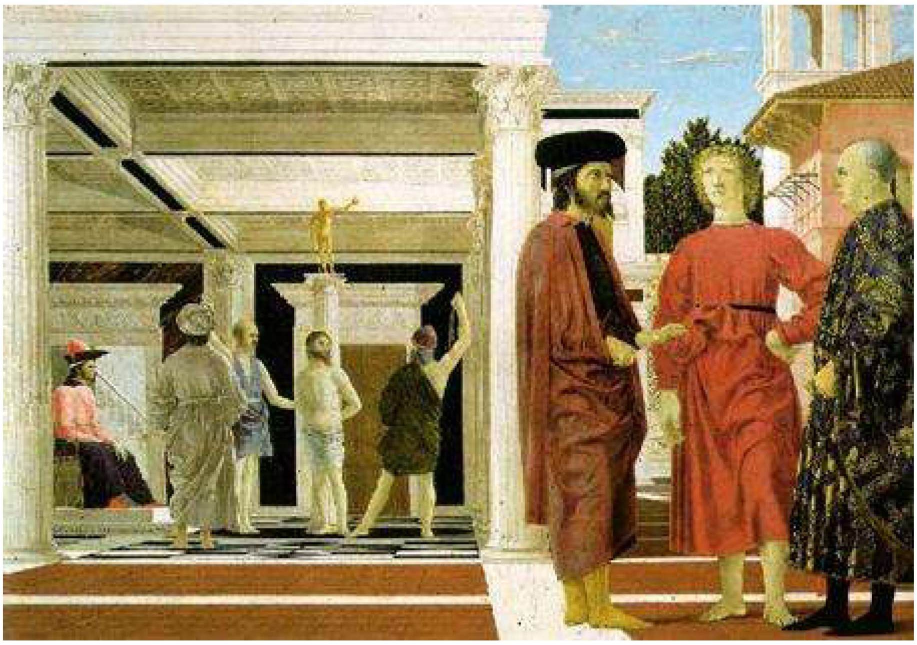

Figura 22. *La Flagelación de Cristo* (ca. 1453), de P. de la Francesca.

En la Figura 21 vemos que un triángulo situado en el plano horizontal, visto desde el punto *V*, determina un haz de rayos visuales en forma de pirámide. Si cortamos esta pirámide por un plano vertical, se produce una sección que no es sino la representación del triángulo en perspectiva.

Y todo esto lo había *visto* Piero de la Francesca cuando pintó *La Flagelación de Cristo* (Figura 22); pero tuvo que atraer la atención de algunos geómetras, como Girard Desargues, para que lo pudiésemos ver todos los demás.

Referencias

L.B. Alberti: *Sobre la Pintura*. Traducción anotada e ilustrada por J. Dols Rusiñol. Fernando Torres, Editor. Valencia, 1976.

C.B. Boyer: *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad Textos, Madrid, 1986.

P. de la Francesca: *De la perspective en peinture*. Traducido al francés y anotado por J.- P. Le Goff. In Media Res, París, 1998.

G. Galilei: *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Edición preparada por C. Solís y J. Sádaba. Editora Nacional, Madrid, 1981.

C. Huyghens: *Horologium oscillatorium.* Traducido del latín y comentado por J. Peyroux; editado por el autor. Burdeos, 1980.

M. Kline: *Mathematics for the Nonmathematician.* Dover, Toronto, 1967.

H. Michel: *Les instruments des sciences dans l'art et l'histoire*. Société Française du Livre. París, 1966.

J.L. Montesinos: *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. Síntesis, Madrid, 2000.

J. Navarro de Zuvillaga: *Imágenes de la perspectiva.* Siruela, Madrid, 1996.

[1] *Geometer?s Sketchpad*, © Key Curriculum Press, Berkeley, CA.

Sobre el autor

Carlos Mederos Martín es licenciado en Ciencias (Matemáticas) por la Universidad de La Laguna en 1979. Ha sido profesor de enseñanza secundaria durante veintisiete años. Colaborador de la Fundación Canaria *Orotava* de Historia de la Ciencia, ha participado en algunos proyectos internacionales sobre la enseñanza de la matemática utilizando la historia de la ciencia.

matematicalia
revista digital de divulgación matemática

(*) Este artículo está motivado por la conferencia del mismo título impartida por su autor en el Curso Interdisciplinar *Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas 2004* de la Universidad de La Laguna (Tenerife, España).

Cerrar ventana