

## MATEMÁTICAS Y REALIDAD.

### La importancia de una perspectiva histórica.<sup>1</sup>

Ana María Sánchez Quintana

Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

*“Imaginaos una especie de caverna con una larga entrada, donde unos hombres yacen encadenados, de modo que no conocen del exterior más que las sombras que se proyectan a través de la luz de un fuego. ¿Creéis que los que están ahí han visto otra cosa que las sombras proyectadas por el fuego y están convencidos que las sombras son reales?. Imaginaos que alguno de los sujetos lograra escapar y salir de la caverna. La luz del sol le dañaría los ojos y le impediría distinguir los objetos reales de los que nunca vio más que las sombras. ¿Qué creéis que contestaría si le dijera alguien, que antes no veía nada más que sombras que es ahora cuando se encuentra más cerca de la realidad?”*

Platón

*“Quizá esté yo equivocado y tú en lo cierto, quizá con un esfuerzo a la verdad nos acerquemos”*

Sir Karl Popper

*“Si el ojo no fuera de naturaleza solar, ¿cómo podríamos ver la luz?”*

Goethe

**Resumen:** El objetivo del trabajo es mostrar cómo a través de la historia, las matemáticas adquieren para nosotros nuevos significados y contenidos. Se analiza someramente su evolución en el tiempo, estrechamente ligada a las concepciones filosóficas de cada momento. Gracias a esta perspectiva histórica podemos apreciar que las matemáticas y la realidad material no representan mundos de índole absolutamente diferente, sino representaciones que fluyen de una misma realidad con manifestaciones diferenciadas en distintas épocas.

## 1. INTRODUCCIÓN

Al empezar a trabajar en el mundo abstracto del Análisis Funcional tuve la sensación de estar ante un gran edificio, el de la matemática pura, cuya estructura cerrada permitiera adelantar muy poco, condicionada por su dificultad y por su construcción aparentemente acabada lo cual llevaría a considerar la conveniencia de distinguir entre el aprendizaje de la ciencia y la actividad científica de crear. El aprendizaje de la misma suele hacerse sistematizando, ignorando las motivaciones de los conceptos creados, su relación con otros temas de la historia y la ciencia, dificultando con ello nuestra propia motivación. Es preferible considerar la ciencia como algo más complejo que su mera sistematización.

Tal vez fuera el desconocimiento lo que me llevó a plantearme qué estaba haciendo con todos aquellos entes abstractos y conceptos y cuál era su validez; preocupación que, por otro lado, siempre ha estado presente de

alguna u otra forma en el desarrollo y evolución de cualquier actividad científica. Así me planteé la realidad de las matemáticas y su naturaleza, más allá de un interés puramente pedagógico, e incluso más allá del ámbito de lo que se entiende por ciencia normalmente.

Descubrí entonces que al construir la ciencia en general y las matemáticas en particular había unos determinados supuestos filosóficos admitidos implícitamente, como axiomas de la actividad científica, que no se ponían en duda ni era posible explicitar. Y no me refiero precisamente a aquellos axiomas que las distintas ramas de la matemática utilizan como tales, sino a aquellos otros que forman parte de los presupuestos de su construcción.

Una segunda sorpresa fué descubrir que la ciencia para mí tenía una gran carga emocional, que no era objetiva, pues mientras que rechazaba de algún modo la realidad cotidiana, las matemáticas me parecían bellas. Finalmente, la tercera sorpresa surgió al tomar conciencia de que, a menudo, los humanos confundimos la realidad con aquello que está en nuestra cabeza; no es demasiado difícil encontrar a alguien que exprese tranquilamente, al referirse a una determinada realidad compleja, que aquello es algo simple. Sin embargo, lo simple es el modelo que está en su cabeza, y a través del cual percibe esa realidad, pero no la realidad misma. Así se puede oír a un fiscalista que “todo es física”, mientras que para sustentar su argumentación utiliza fundamentalmente conceptos matemáticos. Y ello no significa poner en duda la validez de su enunciado y muchísimo menos su perfecto derecho a considerar el mundo así.

Parece estar claro que observamos aquello que llamamos realidad a través de nuestra limitada cabeza humana, dando palos de ciego sobre ella, porque la realidad siempre se nos escapa, siempre es mucho más compleja de lo que podamos abordar, lo cual nos obliga a partir de la humildad, no desde la suficiencia.

Deseo aclarar que no me dedico ni a la historia ni a la filosofía y que soy consciente de que dada la amplitud del tema, sería necesaria una mayor extensión, por lo que no pretendo una exposición terminada, sino exponer algunas ideas sobre mi particular forma de ver el asunto que integre algunas experiencias de tipo intelectual.

Mi única pretensión es arrojar un poco de luz, pero fundamentalmente sembrar semillas de duda sobre lo que estimo es razón del ser y de su evolución, que estimule la inquietud para seguir construyendo un edificio en el que creo.

La Matemática, en particular, y la Ciencia en general, constituyen estructuras abiertas al intercambio con el medio y jamás construcciones cerradas que, bajo la apariencia de perfección y acabado, signifiquen cerrazón y muerte. Pues de ser así, estaría claro que nos encontraríamos ante la existencia de dos realidades de naturaleza bien diferenciada: Matemáticas y Realidad.

## 2. QUÉ ES LA REALIDAD

Reflexionar sobre la realidad plantea serios problemas, pero se nos posibilita ampliar la perspectiva mirando por encima de la ciencia actual y comprender qué llevó a los filósofos de la antigüedad a formular determinados planteamientos, muchos de los cuales han confluído a la hora de precisar la ciencia.

Sin divagar demasiado sobre la realidad e ilusiones ópticas, la consideración de las formas tan diferentes en que las distintas especies perciben esa realidad, según sus necesidades, así como las concepciones de la química física, nos ayudarán a darnos cuenta del relativismo que subyace a lo que nos referimos como realidad. Sin embargo, tampoco parece adecuado pensar que no existe algo o realidad ajena a nosotros, y fuera de nosotros, como si todo fuera consecuencia de nuestro pensamiento, pues mucho me temo que la especie humana puede dejar de existir y otras muchas seguirán existiendo, lo que supone admitir cierta independencia entre el pensamiento y existencia.

En principio, tenemos dos realidades bien diferenciadas: la de dentro y la de fuera nosotros. Ambas son paralelas o no, y sobre ello sólo a través del intercambio y de la experiencia se puede decidir. En la experiencia encontramos la limitación de nuestros propios sentidos. Si limitado es el mundo del pensamiento, limitado es el mundo de los sentidos, pero el primero nos ofrece al menos el consuelo de que podemos proyectarlo o ampliarlo de alguna manera utilizando un recurso superior a aquellos que poseen los animales, llamado razón, que amplía las posibilidades del mundo de los sentidos, aunque sin negarlas, despreciarlas o dejarlas de tener en cuenta, sino abstrayendo a una realidad más general que posibilite ampliar la extensión de la comunicación, con todo un mundo

simbólico, del cual, (al menos a ese nivel) carecen los animales.

### 3. LAS MATEMÁTICAS: NATURALEZA, REALIDAD Y VALIDEZ

Me niego a aceptar que la experimentación y sus resultados sean la única razón de ser de las matemáticas, pero también que nuestra propia cabeza sea un laboratorio donde trabajamos con unos entes de naturaleza propia e independiente de la realidad y un cierto prueba y error como experimentación propia. De lo que no cabe duda, aunque así fuera, es de que las matemáticas se distingue de la pura fantasía que pueda suponer cualquier otra construcción mental pues realmente, recogen una estructura de la realidad o estructuras de aspectos de la realidad, abstraída del tiempo y con una lógica determinada, que encaja con el funcionamiento de la misma.

Si nos centramos en la realidad de las matemáticas, conviene diferenciar entre su realidad, su verdad, y su grado de verosimilitud. A veces se considera a las matemáticas vacías porque las matemáticas sin filosofía son ciegas, lo mismo que la filosofía de las matemáticas, sin matemáticas vivas, resulta algo vacío.<sup>2</sup>

La verosimilitud, utilizando la terminología de Popper, es distinta a la verdad. En este sentido, el enunciado "todas las mesas son mesas" tiene bastante verdad y su probabilidad es uno, pero verosimilitud cero. La verosimilitud hace referencia al grado de información, pero no debe confundirse con la validez empírica de un teoría.

En lugar de considerar que la verdad es el objeto de la ciencia, se considera, más bien que su objeto es su verosimilitud, su aproximación a la verdad.

La verosimilitud como contenido de información incluye, según Popper, el contenido de verdad, más el contenido de falsedad, menos la probabilidad lógica. Se trata de un concepto más amplio que la exactitud, la precisión, o la aplicabilidad y que, personalmente, me parece muy interesante.

Popper se refiere, seguramente, al incremento de información de Shannon, que responde a la fórmula:

$$I=H(A)-H(B/A)$$

En el caso de ser dos sucesos dependientes, el término es cero; con lo cual, no se produce incremento de información al permanecer la entropía de A inalterada. Ello es lo que ocurre cuando las consecuencias lógicas derivadas de ciertos datos o verdad no aportan nada nuevo, aunque su "probabilidad lógica" sea la unidad, no variando la información ni aproximándonos a la verdad considerada.

En este sentido, las matemáticas contienen bastante verdad; sin embargo, es más difícil cuestionarse su verosimilitud, su validez empírica, o su realidad, porque ello nos lleva a plantearnos la realidad misma.

Ya Russell había advertido sobre un realismo ingenuo. Pero, sin embargo, a través de la física y de la biología, llegamos al resultado de que nuestras observaciones son tremendamente complejas y no siempre fiables, a pesar de constituir asombrosos procesos de descifrado de las señales que nos llegan del medio. Por tanto, no deben ser elevadas a la categoría de punto de partida incuestionable como si fueran garantía de verdad.

Hasta Bolzano y Frege, se daba por supuesto, equivocadamente, que sólo había un tipo de conocimiento, el conocimiento poseído por algún sujeto cognoscente, al que Popper denomina "conocimiento subjetivo", indicando que esta teoría del conocimiento es muy vieja, aunque se explicita particularmente con Descartes, para quien "conocer" es una actividad que presupone la existencia de un sujeto cognoscente, el yo subjetivo.

No es esta la visión de Popper, que considera un mundo independiente, con entidad propia, como conocimiento objetivo: aquel contenido en las bibliotecas y los libros, asociado, por tanto a una estructura y un lenguaje

Popper [21] considera que tanto la evolución como el desarrollo del conocimiento exigen una estructura genética a priori, aunque no válida a priori, que suministra el material de partida que la selección natural o la

---

<sup>2</sup>Como decía Leibniz, "sin matemáticas no se puede penetrar a fondo en la filosofía, sin la filosofía no se puede penetrar a fondo en las matemáticas y sin ambas, no se puede penetrar a fondo en nada".

crítica racional han de modificar para producir el siguiente estadio del desarrollo. De forma que, desde esta perspectiva, el criticado carácter apriorístico de las matemáticas deja de ser criticable, así como su validez.

Las estructuras mentales, como la genética, son imprescindibles para cualquier desarrollo posterior aunque su validez para algo no sea a priori, sino en el propio desarrollo, tan necesarias como una estructura genética lo pueda ser a un individuo vivo: es necesaria una estructura.

## 4. PERSPECTIVA HISTÓRICA

**4.1. La visión en la Antigüedad.** La relación de la evolución de algunos conceptos matemáticos, nos permite conocer no sólo los distintas posturas adoptadas por los científicos, sino algo más.

Tomemos como punto de partida las líneas de pensamiento representadas por Platón y Aristóteles. Mientras que Platón sugería la existencia de un mundo de ideas independiente, sagrado y absoluto, Aristóteles defiende la percepción, que nada existe en nuestra cabeza que antes no haya pasado por el mundo de los sentidos. De forma que el esfuerzo de Pitágoras y de Euclides de extraer de la realidad números y formas, representa un intento por captar de alguna manera esa esencia independiente y eterna a la que se refería Platón y que se encarna en nuestro caso en leyes de referencia.

La física aristotélica se negaba a sustituir, no ya algo por un número o una figura por una forma, sino los hechos de la experiencia y el sentido común por una abstracción geométrica y rechazaba la posibilidad misma de una física matemática al subrayar la incapacidad de las matemáticas para explicar la cualidad y dar cuenta del movimiento. En la tradición aristotélica, las matemáticas constituían una ciencia auxiliar que se ocupaba de las abstracciones y que, por lo mismo, posee menos valor que las ciencias que se ocupan de las cosas reales.

**4.2. De la Antigüedad a la Escolástica.** En el siglo XIII había surgido la figura de Santo Tomás de Aquino [7] incorporando a la filosofía todo el saber aristotélico recogido por los árabes y, concretamente, por Averroes; de tal forma que la aparición de Aristóteles se consideró en un principio, como la de un dios griego adorado por adoradores árabes. Santo Tomás desarrolló la indicación experimental de Aristóteles queriendo comprometer a los realistas y nominalistas pero en puntos de vista meramente metafísicos. Emplea todas sus deducciones con el mismo afán de los griegos por dominar los elementos. El tomista empieza con algo sólido como una manzana y su experiencia, y después deduce toda una vida para el entendimiento, preocupándose especialmente de distinguir entre lo absoluto y lo accidental. Y estos fueron los antecedentes históricos de Galileo.

Por otro lado, los nominalistas defienden una doctrina filosófica según la cual a la universalidad propia de los conceptos del entendimiento no corresponde nada real común en los seres individuales a que ellos se refieren. Para el nominalismo los conceptos carecen de todo valor representativo de alguna esencia supraindividual. Valoran casi exclusivamente el conocimiento sensitivo, por ser el que aprehende distinta y claramente lo individual, lo único real existente. Tiene una postura extrema en la cual el pensamiento intelectual no sería más que el pensamiento verbal interiorizado. Con Ockham, como representante del nominalismo, se separa definitivamente los conceptos de los contenidos y se elabora una doctrina lógica en virtud de la cual critica a la razón y cualquier realismo metafísico de las esencias mientras que valora positivamente el conocimiento sensitivo individual. Esto representa un decidido empirismo que estuvo presente luego en todas las filosofías empiristas de los siglos XV y XVI y en los positivistas posteriores, que ya estaba presente en el epicureísmo.

**4.3. Las ideas del Renacimiento.** Más allá del cálculo elemental, de la geometría y de la aritmética, donde las matemáticas se reducen a medidas y hacen referencia a la cantidad y a la forma, entramos en otro estadio de la evolución del pensamiento representado por Galileo.

Este autor, en el famoso diálogo entre dos mundos [9], pone en evidencia cómo, aunque Galileo se consideró el empirista por excelencia, se muestra como un hombre cuyo pensamiento es contraopuesto al empirismo de Aristóteles y que proyecta su percepción de la realidad sobre fórmulas matemáticas que sobrepasan esa realidad.

En esta época, la resolución del problema del movimiento exigía romper con la física de Aristóteles, fundamentada en la percepción sensible y resueltamente antimatemática.

Galileo estaba, sin duda, influido por Platón, y los platónicos no sólo concedían un valor supremo a las

matemáticas, sino también una posición clave en el estudio de la naturaleza. Galileo creía firmemente que el mundo no podía comprenderse más que matemáticamente. Su concepción, esencialmente filosófica, excedía las capacidades científicas de la época y hubo que esperar a Newton para que, con el cálculo infinitesimal, la teoría hiciera su aparición. Y, por supuesto, Leibniz.

Tal vez conviene mencionar, en este punto, el perspectivismo: esta es una doctrina filosófica según la cual todo conocimiento es relativo a un punto de vista determinado. La mayor parte de las doctrinas perspectivistas se refieren a Leibniz precisamente como punto de partida, en cuanto los diferentes puntos de vista posibles no se consideran excluyentes, sino complementarios, porque cada uno de ellos ofrece una perspectiva única e indispensable acerca de la totalidad. Tendencias perspectivas son frecuentes en la filosofía contemporánea. Precisamente en España, Ortega y Gasset ha defendido el perspectivismo desde un punto de vista histórico. En la filosofía de Nietzsche, perspectivismo significa que el conocimiento propio de la conciencia animal está referido a las necesidades vitales del ser que conoce, lo que le impide un conocimiento objetivo y esencial de la realidad.

**4.4. Época Moderna.** Desde Newton y Leibniz, la matemática sigue su andadura independiente, pero muy relacionada en este tramo con el mundo físico.

Por todo ello, se consideró en esta época a las matemáticas un lenguaje; pero matemáticas y física están integradas de tal forma, que no se puede ser un realista respecto a la teoría física y un nominalista respecto a la teoría matemática.

Habría que plantearse hasta qué punto no fue Descartes culminación del proceso iniciado por los nominalistas; lo mismo que Kant, quien a diferencia de Descartes, critica la razón y cree que no existe una intuición pura, sino que responde a percepciones de los sentidos: no hay intuición intelectual pura.

Kant, en una postura límite a la de Descartes, considera la posibilidad de un juicio sintético a priori para el conocimiento, y llama razón pura a la facultad del conocimiento por principios a priori, y “Crítica de la razón pura”, a la investigación de la posibilidad y límites de la misma en general, no sometiendo a investigación su facultad como razón práctica.

Era propiamente el entendimiento, el cual tiene su propia esfera, y la tiene en la facultad de conocer, en cuanto encierra principios de conocimientos constitutivos a priori, quien debía ser, por medio de la llamada, en general, crítica de la razón pura, puesto en un lugar seguro contra todos sus competidores.

Hasta aquí parece quedar establecidas las principales tesis filosóficas al respecto de la naturaleza y modo de existencia de lo que Bunge [4] entiende por objetos conceptuales en la actualidad, clasificándolas en

- a) *Platonismo*: los objetos conceptuales son seres ideales que existen de por sí, independientemente del mundo físico y, en particular, de los seres pensantes.
- b) *Nominalismo*: los objetos conceptuales forman un subconjunto de los objetos lingüísticos. Son signos y no existen sino como tales.
- c) *Empirismo*: los objetos conceptuales son objetos mentales y existen al igual que las demás ideas, o sea, como sensaciones o imágenes.

Mientras todo ello parece ir quedando establecido, se va formando un cuerpo matemático que se hace independiente de la física y de la geometría, que confluye en la matemática axiomatizada y formalizada tal y como la conocemos hoy en día. A la vez se convierte en modelo para otras ciencias más recientes y, por ello, menos evolucionadas en ese sentido.

**4.5. Situación actual.** Popper defiende una tesis a la que hemos hecho referencia con anterioridad en la actualidad [21], [22]. En oposición a Descartes, considerado padre de la filosofía moderna, parte del realismo del sentido común, con la condición de que sea crítico, y considera la existencia de tres mundos: un mundo físico, un mundo de nuestras experiencias conscientes, y un tercer mundo de los contenidos lógicos, de los libros, bibliotecas, computadoras y similares.

Según el reconocido filósofo, en el tercero de los mundos reside el conocimiento objetivo, independiente de cualquier suieto pensante. En él se pueden descubrir nuevos problemas allí presentes antes de ser descubiertos y

antes de ser conscientes; esto es, antes de que en el mundo de las experiencias conscientes apareciese algo correspondiente a ellos. Por ejemplo, descubrimos los números primos y de ahí deriva el problema euclideo de si la sucesión de números primos es infinita. Por tanto, el mundo del conocimiento objetivo es autónomo en cierta sentido y podemos hacer en este mundo descubrimientos teóricos del mismo modo que podemos hacerlos geográficos en el mundo físico. Su tesis fundamental es que casi todo nuestro conocimiento subjetivo, aquel de las experiencias conscientes, depende del mundo considerado por él como el del conocimiento objetivo, esto es, de las teorías formuladas lingüísticamente.

Propone la tesis de que la plena conciencia de sí mismo depende de todas estas teorías y de que los animales, aunque sean capaces de tener sentimientos, sensaciones, memoria y, por tanto, conciencia, no poseen la plena conciencia de sí mismos que constituye uno de los resultados del lenguaje humano y el desarrollo de este mundo objetivo específicamente humano.

Nos podemos plantear no sólo la realidad de los conceptos involucrados como entes, sino también su interacción con un mundo exterior del cual también he admitido su existencia. Para poner un ejemplo de esta interacción en el campo del Análisis Funcional que refleje su naturaleza podemos recurrir a Volterra [26], cuyo trabajo está considerado por algunos autores precursor del Análisis Funcional, lo mismo que de las transformadas integrales. Pero no voy a hablar de este origen conocido, ni de las ecuaciones integrodiferenciales que le dieron vida. Voy a destacar una nueva relación de las matemáticas con la realidad que afecta al siglo XX, cuando han pasado varios siglos desde que la matemática de la medida y estática dio paso a la matemática del cambio, a través de la física y, posteriormente, a la matemática de la probabilidad, para por último referir la incursión de las matemáticas en las ciencias de la vida, donde Lotka y Volterra [14] desempeñaron un papel fundamental.

Lotka era estadístico y Volterra se dedicaba a determinados trabajos físicos donde le surgían todo tipo de sistemas de ecuaciones más o menos difíciles de resolver. Lotka trabajaba con poblaciones. Todos sabemos que el Análisis Funcional trabaja con conjuntos donde los elementos ya no son datos, sino funciones, en un nivel de abstracción superior, donde las ecuaciones ya son funcionales y cabe hablar a su vez de espacios de soluciones y no de una solución, mientras que la transformada aplica los unos en los otros.

Pienso que el trabajo teórico de Volterra en este sentido, fue matemáticamente mucho más allá de un objetivo que muchos le han atribuido ecológico por su posible relación entre los cambios de las poblaciones de peces y las variaciones de la explotación durante la segunda guerra mundial. No es cuestión de desarrollar aquí el denominado modelo de Lotka y Volterra en relación con las poblaciones y el medio, por muy interesante que sea, pero conviene señalar que el acuerdo aparente entre las observaciones que ya habían sido recogidas y su interpretación matemática fue sorprendente y casual, de tal forma que el modelo puramente matemático arrojó luz sobre un problema mucho más complejo como puede ser la vida o las complejas y variadas interacciones entre organismos vivos. Conceptos como competencia, depredación o nicho ecológico, quedaron perfectamente definidos e interpretados a la luz de los diferentes sistemas planteados y de sus autovalores: quedaron reflejados en el modelo teórico inicial.

Cabría plantearse si esto no llevó a su vez a Bertalanffy [2] a su concepción del mundo planteado como un gran sistema de carácter muy general, concibiendo la realidad como un conjunto de interacciones que, a su vez, tenían una formulación matemática determinada, de la cual resultaban como casos particulares la dinámica de poblaciones, la evolución de la economía, etc.

Bertalanffy, biólogo teórico, propugna una concepción organicista de la realidad, planteando la necesidad de desarrollar la teoría general de sistemas en términos matemáticos, superando el mecanicismo y el vitalismo por un lado, y oponiéndose al reduccionismo por el otro. Teniendo como punto de partida las ecuaciones diferenciales, tuvo que esperar a disponer de planteamientos como los de Prigogine en la escuela de Bruselas para alcanzar la madurez de sus conceptos, los mismos que confluyen en la dinámica de sistemas en la actualidad o en eso que ya empieza a configurarse como rama de la ciencia denominado por algunos sistémica. Paralela va también la necesidad de buscar un nuevo paradigma donde todas las ciencias queden integradas de alguna forma como las múltiples dimensiones de una misma realidad. Y, desde luego, el planteamiento a su vez, de la interacción e integración del hombre con el entorno. En la filosofía que subyace a la teoría de sistemas, se consideran sistemas complejos, con múltiples interacciones, con alta incertidumbre, sistemas donde forma parte el propio hombre y, por ello mismo incluso se incorporan a la ciencia, las opiniones de los expertos en estos terrenos.

En este nuevo enfoque, ya no existe tan clara distinción entre causa-causante, tanto se estudia el todo a través de las partes como al contrario, se recurre tanto a la síntesis como al análisis, y se utiliza la metáfora, la analogía como recurso intelectual, más allá de aquello que pueda ser obtenido mediante un proceso discursivo a partir de unos conceptos básicos, perfectamente definidos, o unos axiomas previos.

No sabemos si los sistemas dinámicos, unidos al nuevo orden de la geometría fractal, así como a las regularidades de los atractores en la teoría de catástrofes y del caos, y el enfoque y auge de la cibernética, no nos llevarán a una visión más amplia y completa de la realidad, a su vez que a un cierto determinismo de nuevo.

En general, poniendo un poco de color y poesía a algo que a mí particularmente siempre se me antojó bello por excelencia, se suele decir que los hermosos arrecifes de coral que afortunadamente aún pueblan nuestro planeta son los sistemas más ricos y diversos, y los más antiguos también: encerrado en el irracional mundo de sus increíbles formas y colores es mucho lo que a los científicos, y al hombre en general puede servir para aprender. Su antigüedad es paralela a su increíble diversidad y, con ello, riqueza.

Y, en este sentido, podemos pensar en la fascinación de una ciencia tan antigua como la que tratamos y pensar, como los corales, en infinidad de formas y matices inadvertidos en su desarrollo, en infinidad de colores multidimensionales para unos sentidos diferentes... las matemáticas tienen mucho que decir.

## 5. PERSPECTIVAS DE FUTURO

La conexión entre la realidad experimental y los conceptos matemáticos resulta particularmente clara durante las primeras fases del desarrollo de la aritmética y la geometría, cuando estas ciencias estaban estrechamente ligadas a la agricultura a través de previsión de las cosechas mediante el movimiento de los astros y la necesidad de medir la superficie de los campos de cultivo después de las inundaciones que desdibujaban sus límites. Algunos autores afirman, de forma equivalente, que la geometría proyectiva del siglo XVI surgió como respuesta a la necesidad de resolver las cuestiones de perspectiva que planteaba la pintura.

La situación empieza a cambiar con el desarrollo de las geometrías no euclídeas y de la teoría de conjuntos. A partir de entonces las matemáticas se desarrollan de una forma cada vez más desligada de los datos experimentales. Se llega así a justificar el extremo de percibir el desarrollo de la matemática como parte de un proceso mental diferenciado de la ciencia experimental, por una vía distinta, que captaba una realidad independiente del hombre y del mundo material y que tiene que ver mucho con el mundo de las ideas de Platón.

La nueva situación lleva anexa una concepción específica sobre el conocimiento y sobre la realidad. Según ello, el pensamiento matemático capta unas realidades superiores a las detectadas por los sentidos y de la cual la realidad asociada al mundo de los sentidos no es sino un mero reflejo. Además se asume que la realidad matemática es más independiente del objeto puramente tanto en términos individuales como específicos. Desemboca en planteamientos un tanto extremos en la actualidad como aquellos que llevan a considerar en un total idealismo que no existe la realidad alguna excepto ideas.

Para aclarar la situación resulta importante diferenciar entre percepción y conceptualización, entre conexión mediata y conexión evolutiva. Pues los datos históricos ponen en evidencia como la primera conexión inmediata se ha ido diferenciando con el tiempo, a la vez que adquiría un mayor protagonismo el proceso de formalización, dejándose de prestar atención a la conexión con los datos experimentales, que pasaría a ser mediata e indirecta. Ello no quita para que, con independencia de este proceso de distanciamiento, siga subsistiendo una conexión mediata entre la mente y la realidad exterior. A ello hay que añadir un componente más distante en el tiempo: si la acción selectiva ejercida por el medio en el cual evolucionó el hombre configuró adaptativamente su mente conforme a la realidad experimental significativa para él durante su proceso evolutivo, la acción del hombre con su mente también ajusta y cambia esa realidad tan circunstancial. Tal vez ambos procesos sean lo mismo, y, en definitiva, un ajuste entre la especie humana, sus necesidades, y la realidad.

En este sentido, la matemática representa algo más. La ciencia se caracteriza por una cierta carencia de sentido común y una continua insatisfacción, que se concreta en una dinámica propia caracterizada, no ya por la adaptación, sino por la continua superación, la otra componente de la evolución que creo que es la que la posibilita verdaderamente.



La humanidad ha cambiado el paradigma científico cuando tomaba consciencia de que su esquema no bastaba en un subespacio de la realidad que a partir de un instante pasaba a ser significativo. De forma que el nuevo esquema científico debería incluir al anterior como caso particular e incorporando nuevas realidades. Este proceso se ha repetido numerosas veces a lo largo de la historia creando sistemas formalizados cada vez más comprensivos basados en sistemas axiomáticos más generales. El problema es hasta dónde llegará este proceso. Gödel puso de manifiesto que la formalización de Hilbert era imposible, demostrando que toda teoría que contenga al menos la aritmética elemental contiene resultados que aún siendo verdaderos no son demostrables a partir de los axiomas. Posiblemente la concepción evolutiva de Popper, ofrezca una justificación última al proceso de fundamentación axiomática cada vez más general, sin necesidad de encontrar un axioma último cuya existencia es cuestionable.

La conexión entre formalismo y realidad puede establecer su origen en la matemática antigua, aunque luego se fueran desdibujando los esquemas axiológicos asumidos por los diferentes paradigmas. Para la justificación última del proceso se necesita asumir que la mente represente una estructura adaptativa respecto a la realidad caracterizada por la formulación de modelos interpretativos que se sitúa por encima de la información que llega a través de los sentidos y, como asumió Galileo al negar el realismo y el empirismo cognoscitivo de Aristóteles, según el cual todo conocimiento proviene de los sentidos, y aceptar, por el contrario, la ampliación del mundo de los sentidos a un mundo matematizable de origen platónico. En este línea, Descartes fué mucho más allá, al considerar que el conocimiento es subjetivo en el sentido de que no puede existir conocimiento con independencia del sujeto cognoscente, lo que equivale a considerar que el conocimiento se justifica dentro de él, sin relación con el exterior.

Pero debido a la limitación de la mente humana o por el enfoque metodológico asumido, los científicos terminan por encontrar limitaciones y que menos subespacios de la realidad se ajustan al paradigma científico, sin que se ponga límite. Ello supera la posibilidad de que la idea de conocimiento absoluto sea tan lógica debido a que lo que entendemos por conocimiento, posiblemente no tenga realidad distinta del hombre. Nos encontramos con una cabeza humana planteándose el conocimiento de su propia cabeza y ello siempre conduce de alguna forma a algo circular y, paradójicamente, nunca acabado. Representa una realidad adaptativa específicamente humana y significado adaptativo que le lleva a ampliar fronteras, fruto de estar siempre insatisfecho y de la pasión por dar una explicación que le ha llevado a explorar el ámbito de la ciencia normal y a ampliarlo una vez superado. El problema es como el del vértigo heleno al contemplar las estrellas: es vértigo ante un horizonte que se nos antoja infinito y cuyos límites son inalcanzables.

El esquema establecido por los axiomas que configuran el formalismo de un paradigma matemático trabaja sin necesidad de realizar demasiados planteamientos. Pero cuando se necesita un cambio de paradigma, se precisa revisar los fundamentos y crear un nuevo subespacio cada vez más amplio, es necesario establecer una nueva axiomática. Así una y otra vez, sin que el fundamento último quede por determinar. Ante lo cual, la interpretación más coherente sería aquella que supera ese proceso al infinito, dado que permite la interpretación adaptativa.

Concluimos, desde la historia, que es un proceso evolutivo y parte de un proceso evolutivo. Personalmente deseo que siga siendo así; no importa de donde partamos, como sugiere Popper, y, desde luego, es importante la crítica.

## 6. REFLEXIÓN FINAL

No deseo terminar sin una breve reflexión que conecte aún más en la actualidad esas matemáticas que hacemos con esa siempre cuestionable realidad, siempre cambiante a la luz de diferentes cristales o distintos planos. Estamos en pleno auge de las ciencias sociales, en un mundo y unas concepciones aparentemente muy diferentes de las que movieron a Pitágoras en sus primeras leyes matemáticas, a Galileo o a Einstein, soñando, con su magníficamente creadora carencia de sentido común, un mundo totalmente matematizado, si bien esta atribución es de carácter más bien físico que matemático: por prodigiosa o criticada que sea, no somos precisamente los matemáticos los que aplicamos nuestra ciencia, asumida normalmente como objeto en sí de nuestro trabajo, a la realidad.

Muchos se han preguntado hoy en día sobre la calidad real de esa supuesta realidad, y muchas han sido las contestaciones: paralelamente a la evolución de los terrenos abarcados por la ciencia y a la propia concepción de

la misma, la pregunta ha sido trasladada ya al campo de la psiquiatría, la psicología o la sociología, conectando con algo que se ha mencionado insistentemente, de una u otra forma en nuestra evolución histórica: el lenguaje, la comunicación.

Sabido es que para ciertos grupos de la sociología, o incluso la psiquiatría, la realidad se pierde en eso que podríamos llamar “sociología del conocimiento” o “sociología de la comunicación”, de tal forma que esta no es tal, sino aquello que nos dicen de ella.

Dejando a un lado estas sugerencias de determinadas corrientes sociológicas, volvamos a Galileo y su concepción de las matemáticas como lenguaje eterno de la naturaleza, como proyección de una concepción Pitagórica del mundo, aunque tal vez sin la consideración implícita de que el número guardara, como para aquel, la esencia; tal vez la aserción de Galileo tiene otra interpretación aún vigente: el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático porque las “cosas” no son cosas propiamente dichas (objetos masivos y localizados, sino representaciones de grupos de transformaciones o soluciones de ecuaciones, la realidad es relación, como afirmó Poincaré, y la matematización viene a ser así la gran decodificadora de esa inmensa desconocida llamada realidad. No es casualidad pues, que los sociólogos o psicólogos confluyan haciendo referencia a ella como conocimiento o comunicación.

Recordemos al Timeo de los Diálogos de Platón, considerando el tiempo como una representación de la inmóvil eternidad, de lo eterno.

Tal vez no sea sueño el de Einstein, ni el de una realidad matematizada, si profundizamos sin perdernos en el intrincado laberinto de su significado. Niego una matemática como lenguaje e instrumento nada más, y creo que en ese sentido de la palabra lenguaje no abarcaría, obviamente, la compleja y desconocida realidad, aún existiendo esa conexión entre formalismo y realidad tejida a través del tiempo, y descubierta en la historia.

Pero la situación cambia sobremanera, y dicha conexión se vuelve aún más intensa, si consideramos otra dimensión del lenguaje ya advertida por Russell en relación con el significado: “hasta una palabra adquiere significado por una relación externa”[17]. El significado del lenguaje no es sólo el lenguaje mismo, es él, más los hechos, circunstancias y comportamientos que le rodean. Y crea realidad: creamos la realidad en cierta manera.

En este sentido, podemos afirmar que las matemáticas son ellas, todo lo que lleva en sí misma su historia, y, además, las relaciones que crean: son un lenguaje, efectivamente, y, como tal no se libran de ese carácter de proceso evolutivo que mencionábamos antes. Están inmersas en la realidad y en la creación misma de esa realidad como todo lenguaje, quizá más.

Hay que insistir que si Wittgenstein argumentó en sus Investigaciones Filosóficas que las palabras, junto con las conductas que las rodean, constituyen el juego del lenguaje, era, sin duda, un segundo Wittgenstein el que hacía referencia a esto, muy lejos de aquel de la pura lógica de su conocido Tractatus [29], evolución muy significativa.

( Otros, tal vez hayan tratado de reducir las matemáticas a las relaciones formales que originan, pero no comparto esa concepción ).

Por otro lado, en plena época de la llamada búsqueda científica del alma por autoridades en la materia como Crick, Penrose o Edelman [5],[19],[20], Penrose insiste en que no somos ordenadores y yo misma me pregunto, como cualquiera que haya estado alguna vez ante una pizarra desarrollando un teorema, qué sentido tendrían esas inmensas cadenas lógicas que se nos antojan vacías, perdiendo así lo que estos genios denominarían conciencia, si no fuera por las anteriores consideraciones que las llenan.

Es importante tener en cuenta a Russell y a Wittgenstein [17] en estos momentos y saber que todo lenguaje construido a través de los siglos con una conexión mediata o inmediata con la realidad incognoscible, significa y significa aún más; su significado es el puro lenguaje, el mismo que satisface tantas veces a los matemáticos puros, más un añadido: todos aquellos hechos o comportamientos con él relacionados que percibimos aún en una dudosa realidad, llegando así hasta la duda de si existirá algo más allá de estas consideraciones.

Las matemáticas no son puros entes venidos de un mundo ideal asumido como única realidad. Hasta los físicos reconocen en privado que las teorías que proponen no desvelan tampoco una realidad independiente de la mente

humana. Pero interrelacionan, formando parte incluso del hacer de ese mundo físico que consideramos normalmente realidad. Son algo más dentro de él.

La matemática pura en un momento de nuestra historia y nuestro tiempo, tal vez no signifique demasiado, más allá de una construcción cuasi perfecta y vacía, de una pura entelequia digna del desprecio de lo que el sentido común denomina realidad. Pero viven en nosotros: están.

Podemos creer en un lenguaje que, lejos de la esencia de las cosas, significa; y su significado, como el de todo lenguaje correspondiente a una adecuación a través de los años es el propio lenguaje y también los hechos que le rodean y en él involucrados ya sea, en este caso, pura ciencia o vida cotidiana y de forma elemental. Y el lenguaje, como forma de comunicación, genera realidad.

La ciencia matemática significa, incluso, una actitud ante la vida que propugna la razón, el pensamiento, la búsqueda, la inquietud, la creatividad, la relativa objetividad, la verdad posible..., no están vacías: la dudosa construcción de mis primeros años queda así llena de significado, abierta incluso a la posibilidad de un nuevo paradigma de la ciencia, más flexible, y donde hasta posibles elementos irracionales sean considerados.

## 7. CONCLUSIONES

Se puede concluir que las matemáticas que hacemos son parte de nuestra actividad humana y, como tales, circunstanciales y temporales. Por ello jugamos con unas reglas determinadas y unos determinados símbolos, con unos axiomas básicos en un tiempo determinado en el que nos ha tocado vivir. No son eternas ni inalterables, pero tampoco se reducen a ese mero juego de símbolos y reglas en las cuales se sintetizan en un momento dado, como si proyectaran en el plano de un determinado tiempo su existencia: son algo más o mucho más, todo aquello que, con su historia, queda perdido en el tiempo. Dedicamos a ello únicamente no sé si es bueno, pero prescindir de ello totalmente creo, sin duda, que no lo es.

El pensamiento discursivo es distinto del pensamiento evolutivo. Los seres evolutivos son distintos a los seres discursivos y estos últimos sufren con frecuencia desajustes de la realidad. Se podría pensar que la cuestión es de axiomas. Yo creo que la cuestión es de paradigma [13] y ello lleva consigo, no sólo la reformulación de axiomas, sino incluso de métodos y actitud ante el conocimiento.

Según el nominalismo, los conceptos son meras palabras. Pero tal afirmación debería matizarse precisando que no se trata de palabras nuevas, sino de palabras que se fundamentan, de una manera más o menos directa, sobre la realidad experimental.

La relación de los conceptos con la realidad experimental puede incluso ilustrarse con las matemáticas: representando una situación extrema de conceptualización lógica, arrojan luz a la epistemología de la ciencia y al proceso de conocer. Pero para ello es preciso asumir una perspectiva histórica. Y el problema para nosotros, es que la historia no es precisamente analítica, ni tiene secuencias lógicas a través de las cuales abordarla.

Pero no nos creamos, por ello, que la matemática es tan diferente a otras ciencias. Sin duda, el gran nivel de formalización alcanzado se debe por un lado, a su antigüedad; por otro, a considerar un aspecto muy reducido de la realidad: el que hace referencia a cantidad y calidad solamente. Prescinde de circunstancias y de tiempo y aquí encuentra su generalidad. Pero no es conveniente prescindir de circunstancias y de tiempo para abordarla o hacer referencia a ella, porque en ello encuentra su mayor y más grave limitación.

Si dudamos aún de la posible relación de las matemáticas con la realidad, basta recurrir a la etimología de la palabra "teorema", palabra que figura continuamente en el fluir de nuestra actividad. Del griego "theáo", 'yo miro', muchos verán implícito en ello la clara conexión existente desde los tiempos de Pitágoras y Euclides, y tal vez olvidada cuando utilizamos en la actualidad tal término.

Pero otros, tal vez, se fijen en el "yo" de ese significante "yo miro", sujeto que interpreta el exterior, lo decodifica con su capacidad, la de su propia cabeza evolutiva. Se trata de nuestra particular forma, nuestro particular instrumento como especie, para interpretar eso ajeno y muy nuestro al mismo tiempo, que llamamos realidad, la forma que la especie humana tiene de percibirla para la satisfacción de sus propias necesidades insertadas en ese sistema del que es parte integrante.

Con ello, no cabe duda de que el hombre cambia y hace ese sistema, formándolo al percibirlo e interpretarlo de una manera peculiar y propia. No parece que quepa hablar, desde esta perspectiva, de dos realidades diferentes, ni de su paralelismo siquiera, sino de una misma realidad donde queda integrada nuestra actividad.

Según Popper la ciencia surge siempre de una necesidad práctica del hombre e, inmediatamente, nace también la filosofía.

Nos planteamos qué realidad tienen las matemáticas pero ello nos lleva indefectiblemente al planteamiento filosófico de qué es la realidad, sin el cual el primer planteamiento no tendría sentido. Las matemáticas pueden ser consideradas también como una filosofía de carácter más general en un planteamiento surgido de la necesidad, criticando, analizando y enjuiciando continuamente su capacidad y sus limitaciones en algo que se concreta en la razón que busca al hombre, con todas sus implicaciones, filósofo de una verdad que sólo es su bien, razón templada o moderada, pero razón.

Desde este enfoque, se convierte en lo más real de una realidad que, en definitiva, hacemos nosotros: religión cuando es ciega, y ética cuando conoce su alcance y limitaciones; de nuevo, humildad.

El avance de las matemáticas es comparable a lo que Bueno cita en su libro [3] como “la liberación de la Cultura”: requiere no sólo romper su cascarón, sino también el cascarón que envuelve a la mítica “Naturaleza” de la que trata de ser modelo. Como afirma el autor, únicamente después de estos rompimientos podremos acaso poner la proa “con velas desplegadas” hacia eso que llamamos la Realidad.

Deseo terminar con una humilde conclusión de carácter personal y docente, ya que la docencia fué lo que motivó en mí estas inquietudes. Somos profesores y ponemos todo nuestro interés en la buena comprensión de un teorema, haciendo improbables esfuerzos para que nuestra explicación resulte clara y, a ser posible, entendida por todos. Y, muchas veces, en ello queda la visión de las matemáticas que transmitimos.

Sirva esta reflexión para poner de manifiesto que **enseñar no es explicar**, sino que, como toda actividad humana, está llena de matices y elementos mucho más complejos, como la ciencia misma y su apertura, más allá de una lógica o un razonamiento, incluyendo incluso elementos irracionales que son los que en definitiva promueven tal actividad. Y, por supuesto, de elementos insertos en su historia.

Estoy convencida de que los matemáticos, como todos aquellos que se dedican a la ciencia y, más aún nosotros, considerados racionalistas por excelencia, partimos de un acto de fe; un acto de fe que la física pone a prueba y que la filosofía cuestiona, tanto al menos como la propia existencia.

Respecto a todo lo dicho habría que pensar con Platón que “ningún asunto humano merece mucha ansiedad; y todo lo que no es humano ya no depende de nosotros”.

## AGRADECIMIENTOS

Quiero recordar con ello al Prof. Dr. Nacere Hayek, razón pura, kantiana; pero también, un tono, un gesto, un lleno, un contenido, una profundidad, una sabiduría, una psicología, un matiz o un consejo... con fe que es - en definitiva- principio,... maestro que ha inspirado de mil formas que enseñar no es explicar, y tan siquiera en matemáticas: es toda una condición humana, muchísimo más.

Gracias por sus enseñanzas.

Mi sincero agradecimiento, así mismo, a los alumnos de tantos años que han enriquecido mi vida y que motivaron gran parte de esta conferencia, así como a aquellos compañeros que me han apoyado en los duros momentos de las circunstancias personales con aceptación y apertura - cualidades que estimo reflejo de su saber- y a todas aquellas personas que han contribuido de una u otra forma a la elaboración del presente trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] **J.Arakil**, Máquinas, Sistemas y Modelos, Tecnos, Madrid (1987).
- [2] **LV.Bertalanffy**, Teoría General de los Sistemas, Fondo de Cultura Económica, México (1989).
- [3] **G.Bueno**, El Mito de la Cultura, Prensa Ibérica, Barcelona (1996).
- [4] **M.Bunge**, Epistemología, Ariel, Barcelona (1985).
- [5] **F.Crick**, La Búsqueda Científica del Alma, Debate, Madrid (1994).
- [6] **M.R.Cohen**, Razón y Naturaleza, Paidós, Madrid (1951).
- [7] **G.K.Chesterton**, Santo Tomás de Aquino, Espasa Calpe, Madrid (1985).
- [8] **Euclides**, Elementos, Biblioteca Clásica Gredos, Madrid (1991).
- [9] **Galileo Galilei**, La Nueva Ciencia del Movimiento, Discorsi e dimostrazioni matematiche, Publicaciones de la Universidad Autónoma de Barcelona (1988).
- [10] **I.Gratan-Guinness**, Del Cálculo a la Teoría de conjuntos, 1630-1910.Una introduccion histórica, Alianza Universidad, Madrid (1984).
- [11] **J.Goldberg**, El Animal y el Hombre, Mensajero, Bilbao (1977):
- [12] **Kant I.**, Crítica del Juicio, Espasa Calpe, Madrid (1991).
- [13] **T.S. Kuhn**, La Estructura de las Revoluciones Científicas, Fondo de Cultura Económica, Méjico (1975).
- [14] **R.Margalef**, Ecología, Omega, Barcelona (1974).
- [15] **P.Maddy**, Realism in Mathematics, Clarendon Press, Oxford (1992).
- [16] **P.Mandelbrot**, Los Objetos Fractales, Tusquets, Barcelona (1988).
- [17] **M. Martínez**, El Paradigma Emergente, Gedisa, Barcelona (1993).
- [18] **I.Newton**, Principios Matemáticos de la Filosofía Natural y su Sistema del Mundo, Editora Nacional, Madrid (1988).
- [19] **R.Penrose**, La Nueva Mente del Emperador, Mondadori, Madrid (1991).
- [20] **R.Penrose**, Las Sombras de la Mente, Grijalbo Mondadori, Madrid (1996).
- [21] **K.Popper**, Conocimiento Objetivo, Tecnos, Madrid (1994).
- [22] **K.Popper**, El Mito del Marco Común. En defensa de la ciencia y la racionalidad, Paidós, Barcelona (1997).
- [23] **I.Prigogine**, La Estructura de lo Complejo, Alianza, Madrid (1994).
- [24] **I.Prigogine, R.Thom, R.Margalef y otros**, Proceso al azar, Edición de J.Wagensberg, Tusquets, Barcelona (1986).
- [25] **R.Thom, J.Dieudonné y otros**, Pensar la Matemática, Seminario de la École Normale Superieure de Paris, Tusquets, Barcelona (1988).
- [26] **V.Volterra**, Lecons sur la Théorie Mathématique de la lutte pour la vie, Jacques Gabay, Paris (1990).
- [27] **J.Wagensberg**, Ideas sobre la Complejidad del mundo, Tusquets, Barcelona (1994).
- [28] **N.Wiener**, Cibernética, Tusquets, Barcelona (1985).
- [29] **L.Wittgenstein**, Tractatus logico-philosophicus, Gallimard, Paris (1993).