Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 99-107 (1990)

SOBRE METODOS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA BIPUNTUALES VIA FUNCIONES RACIONALES

N. Hayek y F. Pérez Acosta
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

ABSTRACT

Following the method by M. Razzaghi and A. Arabshahi [9], in this paper we present a technique to solve linear two-point boundary-value problems, approximating the solution by a rational function.

KEY WORDS: Two-point boundary-value problems, rational approximation, operational matrix.

1. INTRODUCCION

La investigación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que se presentan en problemas de valores en la frontera bipuntuales se ha revelado de gran interés en múltiples contextos, entre ellos la moderna teoría del control; en especial, aquellas juegan un papel importante en la búsqueda de soluciones de ciertas ecuaciones matriciales de Riccati que aparecen en la mayor parte de problemas de diseños de sistemas de la referida teoría [8] , siendo bien conocida la difícil integración de las mismas y que ha impulsado el empleo de otros varios métodos tales como el de superposición, solución adjunta, barrido, etc...

Entre las últimas técnicas empleadas para los citados problemas de valores en la frontera, destacan las que recurren a la aproximación de la solución mediante funciones ortogonales ó bien series polinómicas , siendo su principal característica que los problemas quedan esencialmente reducidos a resolver un sistema lineal de ecuaciones algebraicas, lo que simplifica grandemente la determinación de la solución del problema en cuestión. Chang y Yang [1] han utilizado también la matriz operacional de integración de polinomios ortogonales y Horng y Chou [3] aplican matrices de transformación en algunos casos especiales.

M. Razzaghi y A. Arabshahi han discutido recientemente [9] un método similar al de Horng y Chou para resolver el siguiente problema de valores en la frontera bipuntual:

$$x'(t)=Ex(t)+Fu(t), \quad 0\le t\le s$$
$$x_1(0)=x_{10} \quad , \quad x_2(s)=x_{2s} \tag{1.1}$$

donde $x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ denotan vectores de n y k componentes, respectivamente, y $E=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$, representan matrices constantes n×n y n×k, respectivamente.

La solución de (1.1) es aproximada por una serie finita de Taylor de la forma:

$$Y(t)=\sum_{i=0}^{m-1} Y_i T_i(t) \ , \ T_i=t^i \qquad (0\le i\le m-1) \tag{1.2}$$

donde los coeficientes se determinan resolviendo un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

En los últimos años , la aproximación [...] gran auge y desarrollo frente a la aproximación polinómica, especialmente en determinado tipo de problemas en los que cabe apreciar a priori que la utilización de funciones racionales conduce necesariamente a más óptimos resultados. Por ello, en este artículo sugerimos una técnica para aproximar mediante una función racional, la solución de problemas estacionarios de valores en la frontera de la forma (1.1).

Si bien el proceso empleado es el mismo que el de M. Razzaghi y A. Arabshahi [9], la utilización de una función racional como aproximación de la solución, resulta en muchos casos más idónea, por ejemplo cuando el método se aplica a problemas de valores en la frontera de segundo orden con una o dos capas límites en los extremos del intervalo de integración [0,s]; precisamente, la posibilidad de elegir polos próximos a la capa límite (exteriores al intervalo [0,s]), hace presumir que la aproximación representa bien el comportamiento de capa límite en los extremos de [0,s], de la solución, comportamiento que, como se sabe, es generalmente difícil de representar por un polinomio. A este respecto puede verse el trabajo de E. L. Ortiz [6] en donde se pone de manifiesto la ventaja de la aproximación racional sobre la polinómica, al utilizar el método Tau en la resolución de problemas lineales de segundo orden en los que interviene una derivada primera de fuerte crecimiento.

Igualmente, los interesantes resultados a los que conducen las soluciones racionales discutidas por C. Lanczos [4] y E.L. Ortiz [5], entre otros.

2. APROXIMACION DE LA SOLUCION POR FUNCIONES RACIONALES

El método empleado por Razzaghi y Arabshahi para el problema (1.1), consiste en aproximar la solución mediante una combinación lineal de funciones T_0, $T_1, \dots, T_{m-1}$, donde

$$T_i = t^i \quad (0 \le i \le m-1) \quad \text{(serie finita de Taylor)} ,$$

ó tomando T_i como polinomio de grado i de una sucesión de polinomios ortogonales.

Haciendo el cambio $Y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(s-t) \end{bmatrix}$, el sistema (1.1) se transforma en

$$Y'(t)=A_1Y(t)+A_2Y(s-t)+B_1U(t)+B_2U(s-t) \tag{2.1}$$

con $A_1=\begin{bmatrix} E_{11} & O \\ O & -E_{22} \end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix} O & E_{12} \\ -E_{21} & O \end{bmatrix}$,

$$B_1=\begin{bmatrix} F_{11} & O \\ O & -F_{22} \end{bmatrix}, \quad B_2=\begin{bmatrix} O & F_{12} \\ -F_{21} & O \end{bmatrix},$$

aproximándose entonces $Y(t)$ por $\tilde{Y}(t)=\sum_{i=0}^{m-1} Y_iT_i(t)=Y^TT(t)$ donde los Y_i se obtienen resolviendo el sistema lineal:

$$MY=W,$$

obtenido de (2.1) usando una matriz operacional de integración P, caracterizada del modo siguiente:

$$\int_0^t T(t)dt \simeq PT(t), \text{ donde } T(t)=[T_0(t),\dots,T_{m-1}(t)] \tag{2.2}$$

y una matriz S independiente de t, tal que:

$$T(s-t)=ST(t)\,, \tag{2.3}$$

y la aproximación de U dada por $\tilde{U}(t)=\sum_{i=0}^{m-1} U_iT_i(t)=U^TT(t)$.

Seleccionamos a continuación algunos casos en los que hemos adoptado para $\tilde{Y}(t)$ la forma de una función racional. En cada uno de ellos, se obtienen la matriz operacional P con la propiedad (2.2) y la matriz S (independiente de T) con la propiedad (2.3).

2.1 Caso de polos simétricos respecto de los extremos del intervalo [0,s].

Supongamos que T es de la forma:

$$T=(\phi_0,\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_{m+1})^T ,$$

donde $\phi_0(t)=\dfrac{1}{t+\alpha}$, $\phi_1(t)=\dfrac{1}{t-\beta}$ con $\beta=s+\alpha$ y $\phi_i(t)=T_{i-2}$ $(i=2,\dots,m+1)$, con $T_k=t^k (0\le k\le m-1)$ o un polinomio ortogonal de grado k.

Puesto que $\phi_0(t)=\dfrac{1}{t+\alpha}$, $\phi_0(s-t)=-\phi_1(t)$, y como $\phi_1(t)=\dfrac{1}{t-\beta}$, $\phi_1(s-t)=-\phi_0(t)$, resulta:

$$T(s-t)=ST(t)$$

donde $S=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \tilde{S} \end{array}\right)$ y $\tilde{S}$ una matriz tal que $\tilde{T}(s-t)=\tilde{S}\ \tilde{T}(t)$, $\tilde{T}(t)=(\phi_2,\dots,\phi_{m+1})$[1].

Calculemos ahora la matriz operacional P.

Se tiene:

$$\int_0^t T(t)dt=\left(\int_0^t \frac{1}{t+\alpha}dt,\int_0^t \frac{1}{t-\beta}dt,\dots,\int_0^t t^{m-1}dt\right)$$

Ahora bien como:

$$\int_0^t \frac{1}{t+\alpha}dt=\ln\left(1+\frac{t}{\alpha}\right) \quad , \quad \int_0^t \frac{1}{t-\beta}dt=\ln\left(1-\frac{t}{\beta}\right)$$

se puede escribir:

$$\int_0^t T(t)dt\simeq\left(\begin{array}{cc|cccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & - & \frac{1}{2\alpha^2} & \frac{1}{3\alpha^3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} & - & \frac{1}{2\beta^2} & -\frac{1}{3\beta^3} & \dots \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{6}{c}{\tilde{P}} \end{array}\right) T(t)$$

con $\tilde{P}$ tal que $\int_0^t \tilde{T}(t)dt\simeq\tilde{P}\ \tilde{T}(t)$.

Así si $T_i=t^i$, la matriz $\tilde{P}$ será:

---

1 Véase [9] para la forma de $\tilde{S}$ (p.377-(6)).

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \dots & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & . \; 1/(m-1) \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Sentado esto, si aproximamos la solución por:

$$Y(t)=\sum_{l=0}^{m+1} Y_l\phi_l(t)=Y^T T(t)$$

y U(t) por:

$$U(t) = \sum_{l=0}^{m+1} U_l\phi_l(t)=U^T T(t),$$

(U_l=matriz de kxl componentes), al integrar la (2.1) de 0 a t, y teniendo en cuenta que $Y(s-t)=Y^T ST(t)$, $U(s-t)=U^T ST(t)$, resulta el siguiente sistema lineal de ecuaciones algebraicas:

$$Y^T-A_1Y^TP-A_2Y^TP=V$$

Al igual que en Razzaghi [9], la solución de este sistema puede ser expresada en forma mas simple utilizando el producto tensorial (también llamado producto de Kronecker)

$$MY=W,$$

con $M=I-A_I\otimes P^T-A_2\otimes(SP)^T$, $Y=[Y_0^T\ Y_1^T \dots Y_{m+1}^T]$, $W=[W_0^T\ W_1^T \dots W_{m+1}^T]$,

donde I es la matriz identidad (m+2)nx(m+2)n, W_{l-1} es la i-ésima columna de la matriz W y $\otimes$ denota el producto tensorial.

2.2 Caso de dos polos múltiples respecto de los extremos del intervalo [0,s].

a) Dos polos dobles

Supongamos que $\phi_0(t) = \frac{1}{(t+\alpha)^2}$, $\phi_1(t) = \frac{1}{(t-\beta)^2}$, donde β=s+α y $\phi_l(t)=T_{l-2}(t)$, siendo $T_k(t)=t^k$ (i=0,1,...,m-1).

Puesto que:

$$\phi_0(s-t)=\frac{1}{(t-\beta)^2}=\phi_1(t) \quad , \quad \phi_1(s-t)=\frac{1}{(t-\alpha)^2}=\phi_0(t)$$

se tiene:

$$T(s-t)=ST(t)$$

donde $S=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \tilde{S} \end{array}\right)$ siendo $\tilde{S}$ como en el apartado anterior.

Ahora bien como:

$$\int_0^t \frac{1}{(t+\alpha)^2}dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{\alpha^{k+1}}, \quad \int_0^t \frac{1}{(t-\beta)^2}dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{\beta^{k+1}} \quad (|\frac{t}{\alpha}|<1, \ |\frac{t}{\beta}|<1)$$

es factible la aproximación:

$$\int_0^t T(t)dt \simeq PT(t), \text{ con } P=\left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{1}{\alpha^3} & \frac{1}{\alpha^4}\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta^2} & \frac{1}{\beta^3} & \frac{1}{\beta^4}\ldots \\ \hline & 0 & & & \tilde{P} & \end{array}\right).$$

b) <u>Dos polos de multiplicidad m (m>1)</u>

Asumiendo que:

$$\phi_0(t) = \frac{1}{(t+\alpha)^m}, \qquad \phi_1(t) = \frac{1}{(t-\beta)^m} \text{ con } \beta=s+\alpha ,$$

puede escribirse

$$\phi_0(s-t)=(-1)^m\phi_1(t) \quad y \quad \phi_1(s-t)=(-1)^m\phi_0(t)$$

con lo que:

$T(s-t)=ST(t)$, donde $S=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & (-1)^m & \\ (-1)^m & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \tilde{S} \end{array}\right)$. Por otra parte, teniéndose:

$$\int_0^t \frac{1}{(t+\alpha)^m}dt = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{\infty} \binom{1-m}{k} \frac{t^k}{\alpha^{m+k+1}},$$

$$\int_0^t \frac{1}{(t-\beta)^m}dt = \frac{(-1)^{m-1}}{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \binom{1-m}{k} \frac{t^k}{\beta^{m+k+1}},$$

$\int_0^t T(t)dt$ puede aproximarse por $PT(t)$ siendo P la matriz

$$P = \left(\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m-1}\binom{1-m}{1}\frac{1}{\alpha^m} & \frac{-1}{m-1}\binom{1-m}{1}\frac{1}{\alpha^{m+1}} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^{m-1}}{m-1}\binom{1-m}{2}\frac{1}{\beta^m} & -\frac{(-1)^{m-1}}{m-1}\binom{1-m}{2}\frac{1}{\beta^{m+1}} & \cdots \\ \hline & 0 & & & \tilde{P} & \end{array} \right)$$

<u>NOTA</u>

Las matrices S y P pueden igualmente calcularse (lo que implica la aplicabilidad del método) en el caso en que:

$$\phi_0(t)=\frac{1}{(t+\alpha_0)^{r_0}}, \qquad \phi_1(t)=\frac{1}{(t-\beta_0)^{r_0}},$$

$$\phi_2(t)=\frac{1}{(t+\alpha_1)^{r_1}}, \qquad \phi_3(t)=\frac{1}{(t-\beta_1)^{r_1}}$$

....

$$\phi_{2k}(t)=\frac{1}{(t+\alpha_0)^{r_k}}, \; \phi_{2k+1}(t)=\frac{1}{(t-\beta_0)^{r_k}}, \; \phi_{2k+r+1}=t^r \qquad (r=1,2,\ldots,m-1)$$

$$\beta_1=s+\alpha_1 \quad (0\le i\le k)$$

3. REFERENCIAS

(1) CHANG, R. Y.y YANG S. Y. 1986, Int. J. Control, 6, 1785.

(2) CHOU, J.H. 1987, Int. J. Control, 45,269

(3) HORN I.R. y Chou, J.H. 1987. Int. J Systems Sci. 18,293

(4) LANCZOS C. *Topics in Numerical Analysis* I. J.H. Miller Ed., Academic Press (1973)

(5) ORTIZ E.L. *Lecture Notes in Mathematics*, R. Ansorge and W. Tornig Eds. Springer Verlag (1978).

(6) ORTIZ E.L. *Boundary and interior Layers Computational and asymptotic methods* (Proc. Conf. Trinity College, Dublin, 1980),pp. 387-391, Boole, Dún

Laoghaire, 1980.

(7) RAZZAGHI M. 1982 Int. J. Comput. Math, 11 p.297.

(8) RAZZAGHI M.1987. *Current Trends in Matrix Theory* (N. York: Elsevier), pp.267-271.

(9) RAZZAGHI M. y ARABSHAHI A. 1989, Int J. Systems Sci.,vol.20,n. 3, pp.375-384.