

## Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes

Noemí Pizarro (Universidad de Tarapacá. Chile)

Núria Gorgorió (Universitat Autònoma de Barcelona. España)

Lluís Albarracín (Universitat Autònoma de Barcelona. España)

*Fecha de recepción: 15 de octubre de 2015*

*Fecha de aceptación: 14 de enero de 2016*

---

### Resumen

En este artículo presentamos una propuesta de clasificación de las diversas tareas de estimación de medida o de medición que permiten determinar o aproximar el valor de la medida de una cantidad de magnitud. Esta clasificación proviene del análisis de datos recogidos en una investigación sobre conocimiento didáctico del profesorado y nuestro propósito es caracterizar las diferentes tareas que se enmarcan en los procesos de estimación de medida y medición para que el profesorado pueda tener elementos de juicio para diferenciarlas. Para cada una de las diferentes tareas que detallamos se incluye una ejemplificación que puede adaptarse para que el profesorado las trabaje en las aulas.

### Palabras clave

Estimación, medida, enseñanza, profesorado.

---

### Title

**Characterization of the tasks of estimation and measurement of magnitudes**

### Abstract

In this paper we present a proposal for classification of estimation or measurement estimation tasks for determining or approximating the value of a magnitude. This classification comes from the analysis of data collected in an investigation of pedagogical knowledge of teachers and our purpose is to characterize the different tasks that are part of the processes of measurement and measurement estimation for teachers may have evidence to differentiate them. Each proposed task is exemplified and can be adapted by teachers for classroom work.

### Keywords

Estimation, measurement, teaching, teachers.

---

## 1. Introducción

El conocimiento de la medida es una herramienta útil en la vida de los ciudadanos, por ello a pesar de la cultura, la religión y la política elegida o impuesta, en la mayoría de los países del mundo el conocimiento de la medida se desarrolla en el currículo escolar. Por ello, independiente de las políticas educacionales implantadas o la corriente didáctica a seguir, los programas oficiales vigentes de matemática tienen un espacio dedicado a la medición. Chamorro (2003) destaca la utilidad de la medida no sólo en el contexto social, sino también en el matemático:

“La medida de magnitudes constituye un bloque de contenidos tradicionalmente tratado en la Enseñanza Primaria como Secundaria, ninguna reforma del currículum ha dejado fuera a este núcleo temático de gran utilidad en la vida práctica de cualquier ciudadano. Pero es que, además de esta utilidad, si se analiza desde un punto de vista matemático, qué conocimientos hay detrás de la medida



de magnitudes, encontramos conceptos refinados y complejos que han sido incorporados a las matemáticas superiores de manera muy reciente. Nos referimos, evidentemente, a la teoría de la medida, de gran importancia en matemática.” (p. 222)

Por otro lado, el National Council of Teachers of Mathematics (2000) explica que la estimación de medida es parte de la base para el aprendizaje de la medición física, por lo tanto, debe ser un tema incluido en la formación docente. Del mismo modo, Kinach (2002) complementa la opinión del NCTM indicando que la investigación sobre temas específicos como la estimación de medida y su conceptualización para la enseñanza aprendizaje de los futuros profesores, contribuye a la base del conocimiento sobre la construcción de la comprensión conceptual y procedimental de la medida, con el fin de desarrollar aprendizajes en el estudiante. Hogan y Brezinski (2003) y Callís, Fiol, De Luca y Callís (2006) dan cuenta que la estimación de medida no ha sido atendida en la investigación de la matemática educativa o la didáctica de la matemática. Callís et al., (2006) explican que la atención de la investigación se ha volcado a la estimación de cálculo. Desde un punto de vista metodológico, Hogan y Brezinski (2003) consideran que los pocos estudios vinculados a la estimación de medida se deben a la baja consistencia interna en las pruebas de los estudios que han reportado datos sobre el tema. Por otro lado, los recursos didácticos para enseñar la estimación de medida escasean.

Considerando los antecedentes anteriores, surgió nuestro interés en realizar una investigación sobre el conocimiento didáctico de los profesores sobre la estimación de medida que ha dado lugar la tesis doctoral Pizarro (2015). Participaron en esta investigación 112 maestros chilenos en ejercicio docente durante el año 2012. Los docentes respondieron preguntas que involucraban estimaciones longitudinales y bidimensionales. Esta investigación, de corte cualitativo-descriptivo, nos obligó a desarrollar una herramienta de análisis que nos permitiera distinguir las diferentes tareas que los maestros realizan, o podrían realizar, para encontrar el valor de la medida de una cantidad de magnitud. Dado que para un gran número de los profesores participantes, al pedirles que estimaran el valor de una medida, respondían con procesos que corresponden a tareas de estimación, pero también a procesos propios de la medida, nos encontramos con la necesidad de disponer de una herramienta que contemplase todas las posibles opciones para dar un valor a una cantidad de medida dada.

De este modo, el propósito de este artículo es dar cuenta de la clasificación de las tareas que permiten encontrar el valor de la medida de una cantidad de magnitud desde dos puntos de vista distintos pero compatibles. Por un lado, exponemos el detalle de la clasificación de actividades de estimación y medida que conforman la herramienta de análisis realizada en el estudio y que puede servir de base para estudios futuros. Por otro lado, ejemplificamos cada una de las diferentes tareas relacionadas con la medida y la estimación y consideramos que esta clasificación puede ser un referente para maestros y profesores de matemáticas, que les permita organizar el trabajo en el aula atendiendo a los requerimientos del currículo.

## 2. Referentes Teóricos

El diccionario de la lengua española de la RAE considera nueve acepciones de la palabra medida, tres de ellas se vinculan con nuestro estudio:

- Acción y efecto de medir.
- Expresión del resultado de una medición.
- Cada una de las unidades que se emplean para medir longitudes, áreas o volúmenes de líquidos o áridos.

Vemos entonces que para la RAE la medida puede ser usada en el acto de medir, en el resultado de la medición y en las unidades utilizadas para medir. Chamorro y Belmonte (1988) indican que medir supone asignar un número a una cantidad de magnitud. Complementando esta idea, Clements y Sarama (2014, p.187) explican que la asociación entre cantidad y número consiste en dos aspectos: “identificar una unidad de medida y subdividir (mental y físicamente) el objeto por la unidad, localizando la unidad de principio a fin (iterándola) a lo largo del objeto”.

Chamorro (2003) y Callís (2002), considerando los estudios sobre la medida de Piaget, se han referido a los estadios sensorio-motrices para la apropiación de la magnitud, la medida y la unidad. De este modo, la acción de los estadios potencia, por medio de la observación y el lenguaje, la capacidad de identificación y reconocimiento, una capacidad básica del pensamiento lógico-matemático, base para la clasificación e imprescindible para el razonamiento lógico. Explican que la medida de una cantidad de magnitud no es una acción fácil y espontánea, dado que la conforman una serie de tareas que deben adquirirse por medio de la experiencia en la práctica de estimaciones, clasificaciones y seriaciones, una vez establecido el atributo o la cantidad de magnitud con la cual se va a medir.

Por consiguiente, al medir se ponen en juego conceptos fundamentales que incluyen la comprensión de distintos elementos, tales como: el atributo, la conservación, la transitividad, las particiones iguales, la iteración de la unidad estandarizada, la distancia, el origen y la relación con el número. Estos elementos se ponen en juego al aprender y aplicar otras ramas de las matemáticas, por ejemplo, la operatoria numérica, las ideas geométricas, los conceptos estadísticos y las nociones de función (NCTM, 2000). Considerando lo anterior, sería lógico que la estimación de medida viniese por añadidura en la enseñanza de la medida. El NCTM desde 1937 publica artículos sobre el tema en sus anuarios (*yearbook*), dedicando el de 1986 a la estimación de medida de forma exclusiva. Sin embargo sólo a partir de principios de los años 80 el concepto de estimación comenzó a ser incluido en algunos currículos de países europeos y Estados Unidos, gracias a la pronunciación de distintas directrices internacionales.

El diccionario de la lengua española de la RAE define el sustantivo estimación como “aprecio y valor que se da y en que se tasa y considera algo”, es una definición del concepto escrita desde la perspectiva de la ciencia económica, en la que se valoran bienes y servicios. Este enfoque es lejano a perspectiva tomada en las diversas investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática en las últimas décadas, donde se han desarrollado diferentes definiciones del concepto de estimación que responden a diversos tipos de tareas matemáticas. A continuación se presentan distintas definiciones del concepto de estimación en orden cronológico de autores relevantes en el tema:

- Bright (1976) considera que estimar es “un proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos” (p. 89). En esta definición observamos la valoración de la medida debe ser sin instrumentos de medida, pero al leer “visuales o manipulativos” nos preguntamos cómo es posible realizar una manipulación sin instrumentos de medida.
- El Informe Cockcroft (1982) define estimación como una “Habilidad para evaluar si es razonable el resultado de un cálculo o de una medida; la capacidad de hacer juicios subjetivos acerca de una variedad de medidas” (pp. 22-23). Esta definición rescata el uso evaluativo de la estimación de la medida, como también la subjetividad del proceso y/o resultado, por otro lado engloba el término de “estimación” tanto en aritmética como en medida.
- Uno de los referentes sobre el tema en el mundo hispano, el libro “La estimación en el cálculo y en la medida” de Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), define estimación como “Juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales de quien lo emite” (p. 18). Los autores no la



llaman ni proceso o habilidad, como fue definida anteriormente, sino “juicio” y un juicio subjetivo. Al igual que el Informe Cockcroft (1982), consideran la misma definición para un cálculo y para una medición.

- Años más tarde, Clayton (1996) se refiere a la estimación como “habilidad para conjeturar sobre el valor de una distancia, costos, tamaños, etc. o cálculo” (p. 87). El autor indica que es una “habilidad para conjeturar”, es decir, el estimador debe tener algún indicio de alguna medida o cálculo para poder realizar una estimación que puede ser parte de cualquier área matemática.
- Van de Walle, Karp y Bay-Williams (2010) indican que estimar "Se refiere a un número que es una aproximación adecuada para un número exacto dado el contexto particular, que se sustenta en algún tipo de razonamiento" (p. 241). En este caso, la estimación es una *aproximación adecuada* que engloba todas las áreas de la matemática y descansa en algún razonamiento, por ende, no es número azaroso.

Podemos observar que las diferentes definiciones del concepto de estimación que hemos recogido describen tareas distintas. Por ejemplo, Bright (1976) se refiere concretamente a la estimación de medida, en cambio el Informe Cockcroft (1982), Clayton (1996) y Van de Walle et al., (2010) se refieren a tareas relacionadas con distintas áreas de la matemática. Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), con el propósito de distinguir en el aula las tareas de estimación, explican que la estimación de medida se distingue de la estimación computacional por razones metodológicas.

Por otro lado, en Hogan y Brezinski (2003), se distinguen tres tipos de estimaciones: Estimación computacional, estimación de numerosidades y estimación de medida. Sowder (1988) definió la estimación computacional como: “el proceso de transformar números exactos en aproximaciones y calcular mentalmente con estos números para obtener una respuesta razonablemente próxima al resultado exacto de un cálculo” (p. 182). Para Hogan y Brezinski (2003), la estimación visual de numerosidades, (*numerosity* en inglés), corresponde a la habilidad de estimar visualmente un número de objetos dispuestos en un plano durante un tiempo limitado (cuando este número es pequeño y puede ser evaluado con rapidez y precisión, la tarea recibe el nombre de subitizing). Por último, la estimación de medida se basa en la habilidad perceptiva de estimar diferentes cantidades de magnitudes (longitud, área, volumen, tiempo, peso, etc.) en objetos comunes. Hogan y Brezinski (2003) concluyen que la estimación computacional es una habilidad que se desarrolla en conjunto con el resto de habilidades aritméticas o las habilidades desarrolladas habitualmente en la escuela. Sin embargo, la estimación de numerosidades y la estimación de medida, requieren en conjunto, el mismo tipo de habilidades, que se relacionan con aspectos perceptivos y deberían separarse, conceptualmente, de la estimación computacional. Al mismo tiempo, conjeturan sobre el énfasis que deberían tener las imágenes mentales en el trabajo cognitivo de la medición y la orientación espacial. Esta idea también es expuesta por Clements y McMillen (1996), indicando que la apropiación de una cantidad es una referencia que se debe poner en cuenta al momento de estimar. Consideran además que los individuos poseen herramientas de medición interna, que operan como participación mental o como la segmentación de una longitud que no es verbal y que representa una cantidad de magnitud.

A partir de los antecedentes anteriores, consideramos necesario reconstruir la definición de estimación de medida. La definición de estimación de medida que hemos usado en Pizarro, Gorgorió y Albarracín (2014, 2015) es la siguiente: “Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad correspondiente a una cantidad de magnitud discreta o continua por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto auxiliar”. La definición se sustenta en tres componentes fundamentales: Asignar un valor numérico (V) junto a una unidad correspondiente, realizar la tarea perceptivamente (P) y la relación de la percepción con los conocimientos previos, es decir, en base a un referente (R).

Podemos observar que esta definición considera las ideas del trabajo perceptivo, característica que diferencia a la medición con la estimación, dado que el uso de los sentidos no permite la iteración directa de la unidad de medida con el objeto correspondiente. El desarrollo de imágenes mentales a modo de referencia que fundamentan la tarea para que el trabajo se relacione con el razonamiento lógico, no dando lugar a la respuesta aleatoria. Por último, la valoración es parte del desarrollo del sentido numérico en la estimación de medida.

Por lo tanto, podemos apreciar que en ambos procesos, estimación de la medida y medición, hay un objetivo común, que corresponde a dar un valor para una cierta cantidad de medida. Al medir, utilizamos un patrón definido a priori, llamado unidad de medida, que comparamos con la cantidad de magnitud correspondiente por medio de la iteración. En la estimación de la medida, se utiliza un referente mental o auxiliar adecuado, como unidad de medida, para valorizar, por medio de una iteración o comparación mental, la medida de la cantidad de magnitud a estimar.

En nuestro estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido que tiene los maestros de primaria sobre estimación de medida, observamos que fue difícil diferenciar a qué tarea, medición o estimación de medida, se referían los docentes cuando les solicitamos explicar procesos de estimación de medida. Por ello, consideramos los referentes anteriormente señalados y clasificamos las tareas mencionadas, como se puede apreciar en el siguiente apartado.

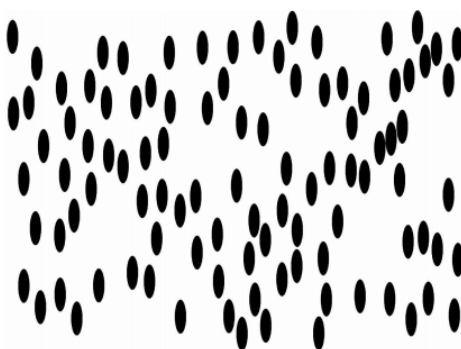
### 3. Tipos de tareas de medida y estimación de medida

En este apartado explicaremos en detalle y ejemplificaremos cada una de las tareas de medición y estimación de medida, que se diferencian por el tipo de cantidad de magnitud involucrado, el tipo de referente y el uso dado a este último.

#### 3.1. Estimación visual de numerosidades

Como anteriormente mencionamos, la estimación visual de numerosidades consiste en estimar visualmente un número de objetos dispuestos en un plano durante un tiempo limitado. Esta actividad es bastante recurrente por algunos docentes cuando deben realizar estimaciones de cantidades de números menores que 20. En esta categoría, el uso del tiempo es fundamental, dado que no permite realizar un conteo de los elementos. Las siguientes situaciones son ejemplos de estas tareas:

- Andrés está frente a un monitor y observa esta imagen por 1,5 segundos para estimar cuántos elementos hay en la imagen.



**Figura 1:** Ejemplo de figura usada en actividades de estimación visual de numerosidades

### 3.2. Estimación de medida

De acuerdo a la definición reconstruida que consideramos para clasificar las tareas de los docentes, la estimación de medida se sustenta en tres componentes fundamentales: valoración (V), percepción (P) y referentes (R). Dos de las tareas se diferencian por el tipo de referente utilizado. El referente auxiliar, que Segovia et al., (1989) consideran como *unidad presente*, se refiere a un referente que está en la escena de la estimación de medida, por ejemplo un lápiz, una cuarta, etc. En cambio del referente propio, que Segovia et al., (1989) llaman *unidad ausente* corresponde a una representación mental del referente, por ejemplo, la idea de centímetro cuadrado. Todas las tareas de estimación de medida involucran cálculo mental o estimación de cálculo. En esta categoría hay tres tipos de tareas a realizar:

#### 3.2.1. Estimación con referentes propios

Cuando la valoración (V) se realiza por medio de la percepción (P) de referentes propios (R), es decir, por medio de unidades de medida o medidas de objetos que están internalizadas por el estimador, se realiza este tipo de estimación. En este tipo de estimación, las imágenes mentales o las ideas perceptivas de distintas unidades de medida se ponen en juego para valorar una medida. Las siguientes situaciones corresponden a este tipo de tarea:

- “Javier tiene la imagen mental de un metro cuadrado, a partir de ella, mira el jardín y estima que su superficie tiene cinco metros cuadrados”.

En esta tarea, podemos observar que Javier tiene una idea mental de lo que es un metro cuadrado, es decir, un referente propio. En el ejemplo, explicitamos la acción que realiza Javier para valorar el área de superficie: mira, por lo tanto no hay una iteración mental del referente mental sobre la cantidad de magnitud. Por otro lado, el estimador se entrega un valor de la medición:  $5 \text{ m}^2$ .

- “Felipe trabaja en una copistería. Ha tomado unas cuantas hojas y supo que eran alrededor de 40 sin tener que contarlas”.

En esta situación, Felipe al trabajar en una copistería, constantemente trabaja con cantidades de hojas contabilizadas, por lo tanto tiene referencias sobre las cantidades de hojas. Utilizando estas referencias, por medio del tacto, es capaz de cuantificar las hojas que tomó.

- “El vendedor del mercado toma unas cuantas sardinas y ya sabe que pesan alrededor de un kilo”.

En los mercados, los vendedores poseen referentes de medidas de peso, dado que trabajan con ellas. Por lo tanto por medio de la percepción son capaces de estimar el peso. En este caso, el vendedor utilizando sus referentes, por medio de la percepción, puede estimar que cierta cantidad de sardinas equivalen aproximadamente a un kilo.

#### 3.2.2. Estimación con referentes auxiliares

Este tipo de estimación corresponde a la tarea de valorar numéricamente (V) una medida, se realiza por medio de una iteración mental (P) de un objeto auxiliar presente (R). Estos objetos auxiliares actúan como una unidad de medida que no se itera directamente. Por ejemplo, si queremos estimar el largo de una pared y para ello tenemos una cuerda pequeña, podemos mirar la cuerda y considerar que cabe unas 5 veces en el largo de la pared. En este caso, el referente es la cuerda que se iteró visualmente



Esta estimación es común cuando no se han apropiado las unidades de medida, o bien cuando se están conociendo. A continuación presentaremos ejemplos análogos a los del estimación con referentes propios, con el fin que el lector pueda diferenciar fácilmente las tareas del apartado anterior.

- Ana tiene una alfombra que mide  $1\text{m}^2$ , considerando la superficie de ésta, observa una habitación y considera que la habitación tiene  $10\text{m}^2$ .

En esta situación, el referente de la estimación de Ana es la alfombra que mide  $1\text{m}^2$ ; por lo tanto, realiza una comparación o iteración indirecta de la misma sobre la cantidad de magnitud que corresponde, en este caso, a la superficie de la habitación. De este modo, estima que la habitación tiene  $10\text{m}^2$ .

- “En la copistería de Pablo tienen las hojas agrupadas en paquetes de 50 unidades .Él tomó uno de estos paquetes y sacó aproximadamente la mitad de las hojas que tenía, porque necesita unas 20 hojas”.

En este caso, hay un paquete cuya cantidad de hojas está dado: son 50. A partir de esta referencia, Pablo puede estimar cierta cantidad de hojas, en este caso entre 20 y 25, por medio del tacto o la visualización.

- “Andrea tomó un sus manos un kilo de arroz. Después tomó una bolsa con harina, consideró que tiene menos peso que la anterior, y afirma que la bolsa de harina pesa más o menos medio kilo”.

En este caso, Andrea no ha hecho propia la noción de kilo, pero al tomar en sus manos un kilo de arroz puede percibir a qué se refiere un kilo, por lo tanto, es su referente auxiliar para estimar, por medio del tacto, que la bolsa de harina pesa, más menos, medio kilo.

- “María observa un palo de escoba. Considera que en la altura de la pared caben unos tres palos de escoba”.

En este caso, el palo de escoba es el referente de la estimación y a la vez, la unidad de medida para estimar la longitud de la altura de la pared. Por medio de la visualización, María estima que a lo largo de la altura caben 3 palos de escoba.

En los cuatro casos expuestos, la iteración del objeto, que actúa como referente, sobre la magnitud a medir debe ser indirecta, en caso contrario, es una medición.

Del mismo modo, para que la tarea sea una estimación de medida, es indispensable que el proceso acabe con un valor numérico. Por ejemplo, si una persona dice “este mueble cabe por el ancho de la puerta” no es una estimación en el sentido descrito, ya que se está comparando la medida del mueble con el ancho de la puerta, pero se reduce sólo a un trabajo perceptivo, porque no hay un valor numérico asociado.

### 3.2.3. Estimación indirecta

Existen algunas situaciones en las se realiza una estimación asignando un valor a una medida por medio de un proceso de modelización de una realidad o fenómeno complejo. En estos casos, existe alguna dificultad para realizar mediciones precisas y se simplifica la situación de forma que el resultado se obtiene a partir de realizar una o varias estimaciones de cantidades relevantes y se realizan los cálculos adecuados para ajustarse al modelo utilizado. Albarracín y Gorgorió (2013, 2014) han



estudiado los procesos de estimación relacionados con grandes cantidades, relacionados con tareas de resolución de problemas. Estos autores observaron el desarrollo de diversos tipos de modelización para resolverlas. A continuación mencionamos algunos tipos de situaciones que involucran la estimación indirecta, ejemplificadas en el contexto de estimar el número de personas que caben el patio del centro escolar:

- “En cada fila deben haber unos 10 estudiantes. Hay aproximadamente 20 filas, por lo tanto hay unos 200 estudiantes formados”.

En este caso los alumnos interpretan la situación a partir de un modelo de distribución en forma de cuadrícula. De esta forma, a partir de la estimación del número de personas que caben en cada una de las dos direcciones que conforman el plano en el que se distribuye la gente obtienen el resultado final aplicando la regla del producto.

- Si el patio tiene  $250 \text{ m}^2$  y cada estudiante necesita  $0,3$  metros cuadrados, la capacidad máxima del patio es de 833 personas.

En este segundo ejemplo los alumnos consideran el espacio necesario para que una persona pueda estar ubicada en el patio dentro de los parámetros de comodidad que se rigen por el contexto. En este caso, este espacio ocupado se entiende como una unidad de medida que se aplicaría directamente sobre la superficie total. Dado que en el caso de que el resultado se produzca a partir de una estimación, el alumno divide la superficie total entre la estimación de ese espacio personal.

### 3.3. Medición

Como anteriormente mencionamos entenderemos por medir la idea de Clements y Sarama (2014) donde la asociación entre cantidad y número se sustenta en dos aspectos: identificar una unidad de medida y subdividir la cantidad de magnitud por medio de una iteración. Consideramos cuatro tipos de tareas asociadas a la medición que pueden utilizarse en diferentes etapas del trabajo curricular de medición y que se presentan a continuación.

#### 3.3.1. Medición con unidades no estandarizadas

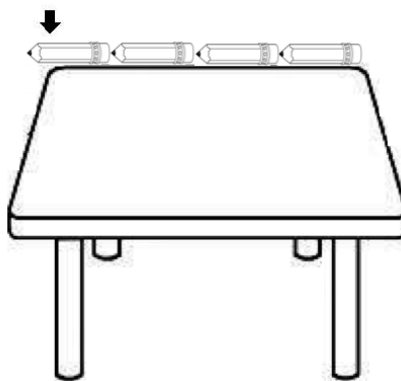
Esta tarea consiste en asignar un valor o un intervalo de valores y una unidad de medida a una cantidad de magnitud continua, por medio de una comparación directa con algún objeto auxiliar o del conteo. Las siguientes situaciones son ejemplos de esta tarea:

- “Ana midió el volumen del balde repartiéndolo en vasos. El volumen del balde es equivalente a 5 vasos y un poco más”.
- “Juan puede dar cinco pasos a lo largo del muro. Sus pasos miden aproximadamente un metro, entonces el largo del muro es de 5 metros”

Los profesores participantes en nuestro estudio, continuamente consideraban que este tipo de medición, correspondía a una estimación de medida, dado que no se utilizaban unidades tradicionales. La diferencia con la estimación de medidas con referentes auxiliares, es el uso de la percepción (P). Si la iteración de la unidad no tradicional es directa es medición, si es indirecta, es estimación, porque hay uso de la percepción. Una ejemplificación del procedimiento a seguir en este tipo de medición es el siguiente:



Si iteramos un lápiz sobre el largo de una mesa, estamos realizando una medición. Si en el largo no es posible iterar una cantidad representada por un número natural de lápices, hay que recurrir a un número mixto, porque es necesario asignar una fracción al último lápiz iterado, esta última tarea, es una estimación de medida.



**Figura 2.** Iteración directa de un lápiz sobre una mesa

En la imagen, se puede observar una iteración directa de un lápiz sobre una mesa. El cuarto lápiz no cabe por completo en el largo, ante ello, se realiza una estimación para asignarle una medida a la parte del lápiz que está contenida en la mesa, por ejemplo,  $\frac{3}{4}$  del lápiz. Por lo tanto la medida del largo de la mesa corresponde a  $3\frac{3}{4}$  lápices.

La tarea corresponde a una medición, porque mayoritariamente se iteró directamente la unidad de medida sobre la magnitud. Sin embargo, se realizó una estimación de medida para valorar la fracción de la última unidad iterada.

### 3.3.2 Medición con instrumentos de medida que representan unidades estandarizadas

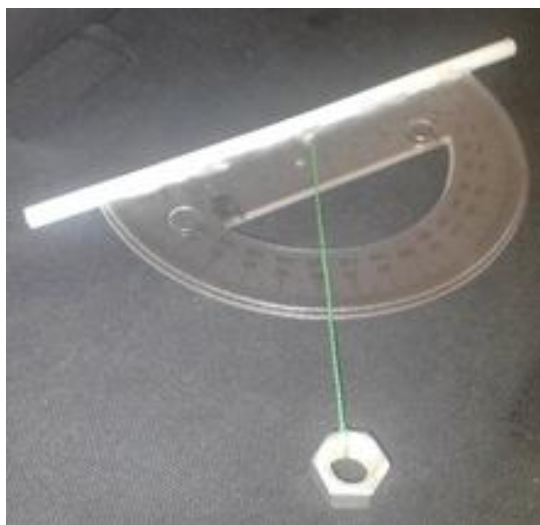
Este tipo de medición es bastante común en el contexto escolar. Los maestros poseen instrumentos de medida del tamaño de una unidad de medida, por ejemplo, varas de un metro, cubos de un metro cúbico, cartulinas que miden un metro cuadrado, etc. Estas unidades son utilizadas para que los estudiantes dimensionen en el espacio las unidades tratadas en clases. A continuación ejemplificamos algunas de estas situaciones:

- “En el material didáctico hay reglas de 1 metro, 1 decímetro y 1 cm. Con esas unidades los estudiantes miden diferentes magnitudes de longitud, área y volumen en la sala de clases”.

### 3.3.3 Medición con instrumentos de medida

Esta tarea es la más utilizada popularmente, dado que consiste en asignar un valor y una unidad de medida a una cantidad de magnitud por medio de un instrumento de medida. El instrumento mide unidades estandarizadas. La regla, la cinta métrica, el compás, la báscula, etc. son ejemplos de instrumentos de medida. También se construyen otros instrumentos de medida más complejos, utilizando otros más básicos, como por ejemplo, el hipsómetro (ver figura 3) para medir ángulos de depresión y elevación.





**Figura 3:** Hipsómetro construido con un transportador, un hilo y un peso

Sin embargo, en otras asignaturas como arte, gimnasia, o química, también se utilizan instrumentos de medida como la regla, el cronómetro o el vaso precipitado, a pesar que este último no es recomendable para realizar mediciones, dado que se descalibra al ser sometido a cambios bruscos de temperatura. A continuación mencionamos algunos ejemplos de su utilización.

- “Debes hacer 20 abdominales en 30 segundos. Concéntrate en hacerlos, el tiempo lo medirá el cronómetro”.
- “No te preocupes, en el banco los billetes son contados con una máquina, así no hay errores de conteo”
- “No hay errores en la medida del largo del pasillo porque lo midió un sensor electrónico”
- “Medí el largo con una cinta métrica, mide exactamente 88, 2 centímetros”

Es necesario mencionar que el conteo de unidades y el uso de instrumentos de medida se ha convertido en un aprendizaje memorístico carente de significado. En el año 1996, el National Center for Education Statistics observó que menos del 50% de los estudiantes del séptimo año de educación estadounidense podían determinar la longitud de un segmento de recta cuando el origen de la recta no se alinea con el principio del segmento, por lo tanto el aprendizaje adquirido es mecánico. A modo general, Chamorro (1995, 1996) expresa que los estudiantes rechazan las estimaciones de medida porque, generalmente en sus tareas, prima la exactitud, incluso en situaciones donde no tiene sentido plantear un problema de precisión. Considera además, que en el escenario educativo hay una idealización de los objetos, donde las mediciones se realizan siempre de forma adecuada y sus resultados son mayoritariamente números enteros.

Por otro lado, en variados libros de texto, hemos observado que las tareas de estimación se acompañan de tareas de medición. De este modo, la estimación de medida es comprobada por una medición, dejando de ser una tarea por sí misma, dado que debe ser validada por una medición con instrumentos de medida.

### 3.3.4 Medición indirecta

Esta categoría, es análoga a la estimación indirecta, consiste en asignar un valor y una unidad de medida a una cantidad por medio de una modelación o un modelo matemático, dado que en la mayoría

de los casos es imposible medir directamente la cantidad de magnitud, como esta actividad presentada en un curso de trigonometría.



**¿Cuánto mide la altura de la iglesia?**

Puedes utilizar cualquier instrumento para medir longitudes, no puedes salirte a más de una calle a la redonda de la iglesia.

Para resolver este problema necesitamos 3 elementos:

- ✓ El ángulo de elevación del sol
- ✓ La medida de la sombra en el instante que se mide el ángulo de elevación del sol.
- ✓ La pendiente del cerro.

Con estos tres elementos, a través del **Teorema del Coseno**, podemos encontrar la altura de la iglesia.

**Figura 4:** Actividad en la que no se puede medir directamente

- “Un árbol proyecta una sombra de 6m de longitud cuando el ángulo de elevación de los rayos del sol mide  $60^\circ$ , con esa información podemos saber la altura del árbol”.
- “El volumen de la bodega es de  $24\text{m}^3$ , porque tiene 3m de alto, 4m de largo y 2m de fondo”.

Este tipo de medición es bastante usual en los cursos de educación secundaria, y comúnmente se utilizan a nivel aritmético más que nivel geométrico.

#### 4. Notas finales

De acuerdo a las diferentes tareas anteriormente mencionadas, la siguiente tabla resume las diferentes formas por las que se puede asignar una medida a una cantidad de magnitud de un objeto, ya sea por uso de estimación visual de numerosidades, estimación de medida o medición. Los contenidos de la tabla 1 y la diferenciación de tareas que presenta permiten al profesor tener elementos para distinguir entre los diferentes tipos de tareas de estimación y medición que marcan los currículos educativos a partir de los elementos de valoración, uso de la percepción y de referentes.

	<b>Tareas para encontrar el valor de una medida</b>
Estimación visual de numerosidades	Estimación visual de numerosidades
Estimación	Estimación con referentes propios (V-P-R)
	Estimación con referentes auxiliares (V-P-R)
	Estimación indirecta (V-P-R)
Medición	Medición con unidades no estandarizada
	Medición con instrumentos de la medida de unidades estandarizadas
	Medición con instrumento de medida
	Medición indirecta

**Tabla 1:** Formas de asignar una medida a una cantidad de magnitud



Comprender los objetivos curriculares es indispensable para la práctica docente, tanto fuera como dentro del aula. Medir y estimar medidas son dos procedimientos distintos pero mantienen una estrecha relación y se complementan entre sí. Es por ello que los profesores y formadores de profesores debemos considerar que las distintas tareas con las que se puede asignar una medida a una cantidad de magnitud.

La medida, como parte de las matemáticas, es un conocimiento social, por ello, se generan algunas paradojas en su enseñanza. La escuela delega buena parte de la enseñanza de la medición a la sociedad, con la convicción de que los estudiantes terminarán aprendiendo ciertos temas en su entorno familiar o social, lo que lamentablemente no ocurre, a pesar de que los estudiantes posteriormente tendrán que utilizar ciertos contenidos en sus vidas personales y laborales (Chamorro, 2003). Similar es el caso de la estimación de medida, ya que es un concepto que aparece habitualmente en contextos no educativos y todas las personas tenemos algún conocimiento o concepción del significado de estimación de medida aunque pueda ser incompleto o erróneo. Sin embargo, los maestros deben comprenderla como una tarea matemática que desarrolla el trabajo perceptivo, la referencia y el sentido numérico de otro modo, su enseñanza seguirá siendo débil y superflua.

**Agradecimientos:** Esta investigación es parte del proyecto EDU2013-4683-R. Los autores forman parte del Grupo de Investigación Educació Matemàtica i Context: Competència Matemàtica (EMiC:CoM), con referencia SGR2014-723 (Generalitat de Catalunya). Esta investigación es parte del Convenio de Desempeño UTA 1309 "Educación de calidad para tod@s: un compromiso con la formación inicial de profesores de la Universidad de Tarapacá".

### Bibliografía

- Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 289-315.
- Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79-96.
- Bright, G. (1976). Estimation as Part of Learning to Measure. *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*, 38, (pp. 87-104). Reston, VA: NCTM.
- Callís, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies i curvilínies. Procediments, recursos i estratègies*. Tesis doctoral: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Callís, J., Fiol, M., Luca, C., & Callís, C. (2006). Estimación métrica longitudinal en la educación primaria. factores implícitos en la capacidad estimativa métrica. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 43, 91-110.
- Chamorro, M., & Belmonte, J. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.
- Chamorro, M. (1995). Aproximación a la medida de las magnitudes en la enseñanza primaria. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 3, 31-53.
- Chamorro, M. (1996). El currículum de medida en educación primaria y ESO y las capacidades de los escolares. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 10, 43-62.
- Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson-Prentice.
- Clayton, J. (1996). A criterion for estimation tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27(1), 87-102.
- Clements, D., & McMillen, S. (1996). Rethinking "concrete" manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, 2, 270-279.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.
- Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.

- Hogan, T., & Brezinski, K. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259-280.
- Kinach, B. (2002). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics methods course: Toward a model of effective practice. *Teaching and Teacher Education*, 18, 51-71.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pizarro, N. (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria*. Tesis doctoral: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Pizarro, N., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 523-532). Salamanca: SEIEM.
- Pizarro, N., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2015). La definición del concepto estimación de medida de los maestros de Primaria. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28* (pp. 1202-1209). Barranquilla: CLAME.
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
- Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. En J. Hiebert y M. Behr (eds.). *Number concepts and operations in the middle grades*, pp. 182-197. Reston, VA: NCTM.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. USA: Pearson.

**Lluís Albarracín Gordo.** Universitat Autònoma de Barcelona. Doctor en Didáctica de las Matemáticas, el foco de interés de su investigación se centra en el estudio de los procesos de modelización matemática que desarrollan los alumnos de Educación Primaria y Secundaria cuando resuelven Problemas de Fermi en los que deben estimar grandes cantidades.

Email: [lluis.albarracin@uab](mailto:lluis.albarracin@uab)

**Núria Gorgorió Solà.** Universitat Autònoma de Barcelona, Doctora en Didáctica de las Matemáticas, durante su trayectoria investigadora se ha centrado en el estudio del aula de matemáticas multicultural. En la actualidad su investigación se dirige a la formación inicial del profesorado de matemáticas.

Email: [nuria.gorgorio@uab](mailto:nuria.gorgorio@uab)

**Noemí Pizarro Contreras.** Universidad de Tarapacá, Arica, Chile. Doctora en Didáctica de las Matemáticas, el foco de interés de su investigación se centra en el estudio de la enseñanza de la medida en Educación Primaria y en la formación del profesorado.

Email: [Noemipizarro@gmail.com](mailto:Noemipizarro@gmail.com)

