AHLFORS, EL JARDINERO QUE VINO DEL NORTE

José Luis Fernández Pérez

En el Congreso Internacional de Matemáticos de Oslo, de 1936, el Rey de Noruega, Haakon VII, entrega las dos primeras Medallas Fields. Los galardonados son Jesse Douglas y Lars Valerian Ahlfors. El norteamericano Douglas no está presente, y en su nombre recoge el premio el gran Norbert Wiener, colega suyo en el Massachusetts Institute of Technology.

Tiempos turbulentos; los vientos del fascismo y el totalitarismo ya azotan Europa. La asistencia al Congreso es escasa.

Douglas recibe la Medalla por su trabajo en el problema de Plateau, que pide verificar la existencia de superficies mínimas con una frontera determinada. Constantin Carathéodory describe, como presidente del comité de selección, el trabajo de los dos premiados. Fue Hermann Weyl, en 1954, el último que se atrevió a describir el trabajo de *todos* los galardonados.

Ahlfors, el primer matemático que recibe la Medalla Fields, nuestro más prestigioso galardón, es, sin duda, la figura central de la variable compleja del siglo XX, a la que aportó contribuciones germinales en casi todas sus áreas, creando y desarrollando muchas de ellas. Hay quien define, y casi no exagera, el análisis complejo del siglo XX como las matemáticas que tienen que ver con los trabajos de Ahlfors.

79

Lars Ahlfors nació en 1907 en Helsinki, en el seno de una familia de cultura y lengua suecas. A Helsinki, se la conocía entonces por su nombre sueco de Helsingfors (y así fue hasta la indepen-

Lars Ahlfors

dencia de Finlandia tras la Primera Guerra Mundial) y era la capital del Gran Ducado de Finlandia del imperio zarista. La minoría sueca de Finlandia vivía fundamentalmente en la costa y dominaba, en gran medida, las estructuras económicas del Gran Ducado.

Ahlfors se doctoró en Helsinki en 1930, fue profesor en Helsinki y en Zúrich, y tras la Guerra Mundial, en 1946 se estableció definitivamente en la Universidad de Harvard, en la que había trabajado de 1935 a 1938.

En Matemáticas, la tradición, los modelos, las escuelas son muy importantes; los matemáticos atesoran con celo y devoción sus genealogías de maestro a discípulo.

Ahlfors es, quizás, el principal exponente de la gran escuela nórdica de teoría de funciones. Lindelöf, sueco-finlandés como Ahlfors, y al que se considera con justicia el padre de la matemática finlandesa, importó esa tradición desde Suecia, y en ella se formó Rolf Nevanlinna, quien, a su vez, fue el maestro de Ahlfors.

La teoría de funciones, el análisis de las funciones de variable compleja y de las superficies de Riemann, es un área clásica de las matemáticas. Uno de sus resultados más deslumbrantes por la sencillez y contundencia de su enunciado es el teorema de Picard. Una función entera es una función de variable compleja con valores complejos, definida y holomorfa (derivable en sentido complejo) en todo el plano. Pues bien, el teorema de Picard afirma que: *toda función entera no constante toma todos los valores complejos salvo a lo sumo un valor excepcional.* La prueba es ahora muy sencilla. Tiene tres ingredientes.
79 Supongamos que tenemos una f como la del enunciado y que omite dos valores, 0 y 1, digamos. Hay una función holomorfa M definida en un disco y que toma todos los valores salvo esos dos. Se trata de un cubrimiento. La topología nos dice que una tal f se puede factorizar a través de M, es decir, $f=Mb$. Esta b es holomorfa en todo el plano complejo y acotada, y el teorema de Liouville (una sencilla acotación de coeficientes de Taylor) nos dice que b es constante, luego f es constante también. .

Desde Picard, se quería entender su teorema sin apelar a los llamados métodos trascendentes, es decir, sin apelar a la función modular. Lindelöf contribuyó decisivamente a ese programa, de hecho, el teorema de Phragmén-Lindelöf fue obtenido como herramienta para esos estudios.

Nevanlinna aporta un cambio radical cuando, en los años veinte, crea la teoría que ahora lleva su nombre. Teoría que, al incorporar métodos de teoría de potencial y de geometría diferencial, permite obtener cotas explícitas del número medio de veces con que las funciones toman los distintos valores, en términos de ciertas tasas de crecimiento.

Ahlfors, al comienzo de los años treinta, lleva esas técnicas y esa conjunción de métodos mucho más lejos y logra dar formas de estimar el número de veces (y no el número medio de veces) que se toman los valores, como número de hojas de cubrimientos ramificados y en términos del área que va cubriendo la función. Es la teoría de cubrimientos de Ahlfors; el motivo principal por el que se le concedió la medalla Fields. La teoría de Ahlfors constituye la culminación de sesenta años de investigaciones que habían comenzado con Liouville y Picard.

Unos años antes, Ahlfors había demostrado también la conjetura de Denjoy. Esta conjetura, que ahora es el teorema de Ahlfors-Carleman, afirma que el número máximo de valores asintóticos de una función entera está determinado por la rapidez de crecimiento de esa función, o más precisamente, el número de valores asintóticos de una función entera es a lo sumo dos veces el orden de la función. Carleman, matemático sueco, había sido capaz, unos años antes, de demostrar el resultado pero con un factor 5 en lugar de 2, que es el mejor posible. Para probar este teorema, Ahlfors demostró el llamado teorema de distorsión de Ahlfors, una extensión prodigiosa del teorema de Phragmén-Lindelöf, que se ha convertido en una herramienta estándar en el estudio geométrico de las funciones.

También se interesó en aquellos años por la existencia de función de Green en superficies de Riemann, para lo que dio un criterio geométrico, la condición de Ahlfors. Un criterio que ha sido el germen de muchos resultados en la teoría del potencial en variedades.

Para resolver estas cuestiones Ahlfors creó técnicas nuevas de amplio espectro que se siguen usando hoy en día en todas las investigaciones en que, de manera profunda, se necesita entender geométricamente la holomorfía, como, por ejemplo, en ese campo tan actual que es la dinámica compleja que en años recientes ha cosechado dos medallas Fields: J.-C. Yoccoz y C. McMullen.

Las medallas Fields no eran entonces lo que son ahora. Las de 1936 eran las primeras.

Eran momentos de una gran tensión política. La Unión Matemática Internacional casi había desaparecido como consecuencia de los enfrentamientos entre las representaciones de distintos países. Fields, al dotar en su testamento la financiación de las medallas, quería ayudar a conferirle al cultivo de las matemáticas un ánimo lo más internacional posible, lejos de intereses nacionales. Pero, el ambiente para esto era aún menos propicio que cuando el congreso de Toronto, que Fields había organizado y que tanta amargura le había causado.

Los temas matemáticos por los que se otorgaron las medallas, problema de Plateau y superficies de Riemann, eran ambos muy queridos de Carathéodory que los conocía muy bien; el propio Carathéodory había recomendado en 1935 la Universidad de Harvard que contratara a Ahlfors. En el momento de la concesión, Douglas y Ahlfors trabajaban en los Estados Unidos, de hecho en instituciones vecinas, MIT y Harvard, lejos de la confrontación matemática entre Alemania y Francia.

El propio Ahlfors recuerda con modestia:

> El prestigio [de la Medalla Fields] quizás no era todavía el que ahora goza, pero en cualquier caso me sentí muy honrado. [...] El premio contribuyó, en gran medida, a incrementar la confianza que sentía en mi trabajo.

Pero desde luego, las contribuciones de Ahlfors a sus 29 años y su carrera científica posterior justifican plenamente la Medalla que se le concedió incluso con los criterios, el rigor y el prestigio que con el tiempo las Medallas fueron adquiriendo.

Ahlfors era muy formal en su comportamiento; puntual, correcto, atento, atildado en el vestir. Pero reservado, muy reservado.

Sus discípulos de doctorado recuerdan cuan exigente era en lo que concernía a su formación; no le interesaba ni lo artificial ni lo lateral. Al mismo tiempo era muy generoso con ellos. Atendía con respeto a lo que su discípulo tuviera que decirle, y si había substancia, y sólo entonces, aportaba ideas, sugerencias, nuevos enfoques y su, siempre valioso, personal punto de vista.

No publicó ningún artículo conjuntamente con ninguno de sus discípulos de doctorado. No lo consideraba apropiado. Gustaba recordar cuanto le habían ayudado Nevanlinna y Pólya a resolver la Conjetura de Denjoy, y como éstos rechazaron su oferta de publicar los resultados conjuntamente.

> Tuve la suerte increíble de encontrar un nuevo enfoque, basado en aplicaciones conformes, que, con considerable ayuda de Nevanlinna y de Pólya, me permitió obtener la demostración. Con generosidad sin par me prohibieron que mencionara
> 79 [en el artículo] el papel que habían desempeñado.

Cuenta Ahlfors que la idea crucial se le ocurrió en un viaje en tren, y que fue entonces, cuando sintió que podía llegar a ser un matemático, lo que da una muestra de su nivel de exigencia personal.

Ahlfors se casó con Erna, austríaca de nacimiento, *a girl from Vienna (una chica de Viena)*, en los años 30. Los Ahlfors eran anfitriones encantadores, afectuosos y animados, excelentes conversadores, interesados por todo. En sus fiestas, la característica reserva, el protocolo o la jerarquía se desvanecían y el ambiente se animaba enseguida, a lo que solía ayudar la excelente colección de maltas y vodkas de la que hacían gala y de la que disfrutaban con proverbial resistencia.

La elegante presencia, apreciada y respetada, del matrimonio Ahlfors en cualquier reunión científica suponían todo un símbolo de distinción.

Respetaba singularmente a sus maestros, Lindelöf y Nevanlinna, y apreciaba, con admiración, a amigos como Arne Beurling y André Weil. Este último cuenta, en un capítulo muy interesante de su *Souvenirs d'apprentissage,* el tiempo que pasó en Finlandia, y como Ahlfors y Nevanlinna lograron sacarle de la cárcel justo antes de que fuera juzgado como espía en plena Guerra Mundial, mientras que el primero fue una inestimable ayuda para permitirle salir de Finlandia camino de Suiza poco antes del final de la guerra.

Lars Ahlfors falleció en 1996; Erna poco antes.

La carrera científica de Ahlfors es ejemplar, todo un modelo. Publicó relativamente pocos artículos pero cada uno de ellos es significativo. Sus intereses fueron evolucionando gradualmente, y en cada paso abrió un campo nuevo de la variable compleja, en ocasiones con un sólo artículo. Un gusto y una selección de intereses insuperables. Decía al respecto: *I like to go fishing where the fish are, rather than trying exclusively for the big one (me gusta ir a pescar donde están los peces más que intentar capturar sólo el más grande).* o que una de las marcas de gran matemático es saber elegir bien los problemas y las cuestiones que se adecuan a su capacidad e intereses, un consejo nada trivial.

Sentía una verdadera pasión por las matemáticas, en la que se exigía una perfección artesana de obra bien hecha, que logró transmitir a sus alumnos y colegas a lo largo de una carrera que abarca sesenta años; con ochenta años publicó artículos de sumo interés sobre transformaciones de Möbius y sobre deformaciones cuasiconformes multidimensionales.

Hermann Weyl, siempre tan literario, se refiere a Ahlfors en la introducción de su libro sobre curvas meromorfas y equidistribución, como *ese gran jardinero que vino del Norte y que plantó el viñedo que ahora cultivo*

Distancias invariantes en variedades complejas (lema de Ahlfors-Schwarz), capacidad analítica o de Ahlfors, equidistribución y curvas meromorfas, longitud extremal e invariantes conformes, aplicaciones cuasiconformes (el teorema de Riemann con métricas variables), grupos Kleinianos (conjetura de Ahlfors, teorema de Finitud), son sólo algunas palabras claves que jalonan su extraordinaria producción científica. Por el conjunto de toda su carrera Ahlfors recibió el Wolf Prize en 1981.

Pero además, Ahlfors publicó en 1953 un clásico, su texto *Complex Analysis*, que para mucha gente sigue siendo, tras cincuenta años, la mejor introducción a la variable compleja por su claridad, por su riqueza y por el entusiasmo por las matemáticas que de él emana.

Bibliografía

Obras completas (*Complete papers*) de Lars V. Ahlfors, publicadas por Birkhäuser-Verlag.

Dos artículos en su memoria publicados en el número de febrero de 1998 del Notices of the American Mathematical Society.

La escuela de variable compleja que Ahlfors, y su buen amigo Lipman Bers, crearon en todo el mundo desde los Estados Unidos rinde tributo a su memoria con *los Ahlfors-Bers Symposia*.