NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 71, agosto de 2009, páginas 57–74

Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica

Julio Barreto García (L. B José Antonio Sosa Guillen, I. U. T. Antonio José de Sucre)

Fecha de recepción: 15 de abril de 2008
Fecha de aceptación: 4 de junio de 2009

Resumen En este artículo analizaremos un poco la acepción geométrica de algunos productos notables en relación a la noción de área, tomando en consideración la aditividad que guardan las figuras geométricas elementales que la conforman al construirlos, bien sean estos paralelogramos tales como los cuadrados o los rectángulos. Además, veremos la aplicación de algunos productos notables tratados desde un punto de vista geométrico, aplicados en la solución de la ecuación cuadrática usando algunos procesos cognitivos y también veremos algunas aplicaciones numéricas de los mismos. Igualmente, veremos la acepción geométrica de la media geométrica (cuadratura del rectángulo o del triángulo) y algunas aplicaciones de la misma, generados a partir de la aditividad de las áreas de las figuras geométricas elementales involucradas.

Palabras clave Magnitud, Procesos cognitivos, Productos notables, Media geométrica.

Abstract This article will examine some of the geometric meaning of some product remarkable in relationship to the notion of area, taking into account the additivity which are basic geometric shapes that conform to either build, these parallelograms such as squares or rectangles. In addition, we will see the implementation of some notable both treated from a geometric, applied in solving the quadratic equation using some cognitive processes and we will also see numerical applications some of them. Similarly, in the same way we see the geometric meaning of the geometric mean (square a rectangle or triangle) and some applications of it generated from the additivity of the areas of basic shapes involved.

Keywords Magnitude, Cognitive processes, Remarkable products, Geometrical mean

1. Introducción

El desarrollo de los *procesos cognitivos* en el campo de la *Didáctica de la Matemática* es capaz de ayudar a nuestros estudiantes de secundaria en la percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica, los cuales se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por Duval, 1998 pp. 37-51 y desarrollados por Torregrosa y Quesada 2007, pp. 273-300, en donde el proceso cognitivo de *visualización* está íntimamente relacionada con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente, tomando en consideración la noción de área.

La coordinación de estos *procesos cognitivos* les permitirá construir desde una perspectiva geométrica las fórmulas usadas en algunos productos notables como lo son el cuadrado de una suma y de una diferencia, las cuales necesitan del concepto de conjunto elemental y de figuras congruentes para facilitar la deducción y aplicación de estas fórmulas. Así mismo, se tomara en cuenta las nociones de área para la acepción geométrica tanto de los productos notables como de la cuadratura del rectángulo o la cuadratura del triángulo, los cuales son llamados muchas veces media geométrica.

2. Antecedentes Históricos

Es razonable pensar que los primeros orígenes de la geometría se encuentran en los mismos orígenes de la humanidad, pues seguramente el hombre primitivo clasificaba, aun de manera inconsciente, los objetos que le rodeaban según su forma. En la abstracción de estas formas comienza el primer acercamiento -informal e intuitivo- a la geometría.

Las primeras civilizaciones mediterráneas adquieren poco a poco ciertos conocimientos geométricos de carácter muy práctico. Estos son esencialmente algunas fórmulas o mejor dicho algoritmos expresados en forma de “receta” para calcular longitudes y áreas. La finalidad era práctica, pues se pretendía con ello calcular la producción proporcional de las parcelas de tierra para determinar los impuestos, o reconstruir las parcelas de tierra después de las inundaciones. Siempre se ha dicho que los egipcios tenían una alta formación matemática, y se ha llegado a insinuar que tuvieran un acervo de conocimientos secretos o que se hubieran perdido con el paso de los tiempos. Estas hipótesis nunca han sido confirmadas, y los documentos existentes tienden a echarlas por tierra. Los egipcios se centraron principalmente en el cálculo de áreas y volúmenes, encontrando, por ejemplo, para el área del círculo un valor aproximado de 3.1605. Sin embargo el desarrollo geométrico adolece de falta de teoremas y demostraciones formales. También encontramos rudimentos de trigonometría y nociones básicas de semejanza de triángulos.

La historia nos hace pensar que el conocimiento que esta civilización así como los de las culturas mesopotámicas, tuviera sobre geometría pasó íntegramente a la cultura griega a través de Tales, los Pitagóricos, y esencialmente de Euclides. Constituyeron los problemas de medida el bloque central en este campo: Área del cuadrado, del círculo, con una no muy buena aproximación de ($\pi = 3$), volúmenes de determinados cuerpos, semejanza de figuras, e incluso hay autores que afirman que esta civilización conocía el Teorema de Pitágoras aplicado a problemas particulares, aunque no, obviamente, como principio general.

3. Referentes Teóricos

El campo de la *Didáctica de la Matemática* ha tomado un auge muy importante en los últimos años, debido al estudio que ella ha realizado en relación a los procesos cognitivos que deben desarrollar nuestros estudiantes al resolver los problemas específicamente de geometría en los cuales estén envueltos. Esta parte de la Didáctica de la Matemática debido al estudio de las capacidades geométricas que involucra ha sido denominada *Didáctica de la Geometría*

En este artículo usaremos el modelo propuesto por Duval, 1998, pp. 37-51 en el cual se restringe un poco el concepto de *visualización* por el de *aprehensión*, en el cual “Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar”, según el Diccionario de la Real Academia Española (2001).

4. Percepción geométrica de algunas figuras poligonales y de algunos productos notables

“La lógica y la teoría de las magnitudes deben combinarse y unirse, para crear el nuevo concepto de la matemática universal. Esta nueva ciencia toma de la lógica el ideal de la construcción rigurosamente deductiva y el postulado de los primeros fundamentos ‘evidentes’ de la argumentación, al paso que determina el contenido que a estos fundamentos debe darse tomando como modelo la geometría y el álgebra”.

Cassirer, E. El problema del conocimiento, p.454.

Las matemáticas son el estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, y de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas. Esta teoría se desarrolla en le referencia de J Barreto, 2008.

Un ejemplo que caracteriza el hecho que todo cuadrado es un rectángulo, pero el cuadrado es el de perímetro más pequeño:

Ejemplo aplicable: El plano de una casa[1].

Queremos construir una casa, cuya superficie o área en el suelo mide 100 m^2. Pero para economizar queremos construir los muros lo menos largo posible. ¿Qué plano se debe elegir? ¿El de una casa de 10 m por 10 m, de 20 m por 5 m, de 25 m por 4 m, de 100 m por 1 m? De hecho, debemos responder a la siguiente pregunta: De todos los rectángulos con superficie o área de 100 m^2 ¿Cuál es el que tiene el perímetro[2] más pequeño?

Respuesta: En todos los casos es un cuadrado. Pues de todos los rectángulos con una superficie dada, el que tiene efectivamente, el perímetro más pequeño es el cuadrado. De igual modo, de todos los rectángulos que tienen un perímetro dado, el que tiene la superficie o área más grande es un cuadrado.

Es muy importante el estudio de los paralelogramos mediante su clasificación, ahora para reforzar más esta teoría definamos lo siguiente:

Definición 1 (Banda): Es la superficie comprendida entre dos rectas paralelas. Veamos la **Figura 1** de abajo:

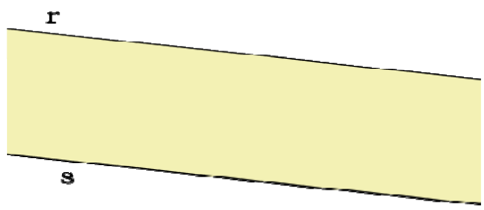
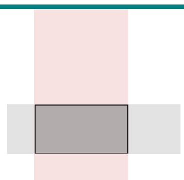
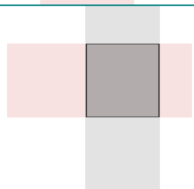
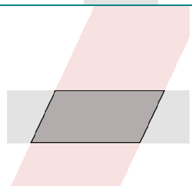
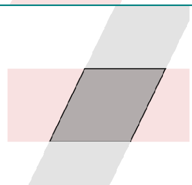


Figura 1: Banda es esta superficie comprendida entre las rectas paralelas r y s.

4.1. Clasificación de las Bandas

La intersección de dos bandas es un polígono de cuatro lados o cuadrilátero que recibe el nombre de paralelogramo, la cual es una figura muy importante y por esto es que simplemente no llamaremos paralelogramo al romboide como estamos acostumbrados, ya que todas estas figuras mencionadas a continuación son paralelogramos. Y así tenemos lo siguiente:

[1] Este ejemplo muestra que todo cuadrado es un rectángulo, pero inversamente no es cierto.
[2] Es la suma de las longitudes de los lados de un polígono.

Clasificación	Figura	Definición
Rectángulo:		Es la intersección de dos bandas perpendiculares de diferentes anchuras. Es decir, que tiene las anchuras no *congruentes*.
Cuadrado:		Es la intersección de dos bandas perpendiculares de igual anchura. Es decir, que tiene las anchuras *congruentes*.
Romboide:		Es la intersección de dos bandas no perpendiculares de diferentes anchuras. Es decir, que tiene las anchuras no *congruentes*.
Rombo:		Es la intersección de dos bandas no perpendiculares de iguales anchuras. Es decir, que tiene las anchuras *congruentes*.

4.2. Producto notable del cuadrado de una suma

Aunque la Escuela Pitagórica se dice que fue la fundadora de la Aritmética tal y como se ha concebido hasta nuestros días, debido a que conocían y utilizaban los números enteros atribuyéndoles un significado filosófico-religioso (cada número representaba un ente del universo conocido), también se puede decir que conocían las progresiones aritméticas y geométricas, las proporciones, el cuadrado de una suma y de una resta. Ahora veamos como podemos representar geométricamente el cuadrado de la suma de dos cantidades cuando los valores son positivos.

Usemos los siguientes pasos:

Construimos dos cuadrados, uno de a unidades de lado y otro de b unidades de lado como veremos en la **Figura 2** de abajo:

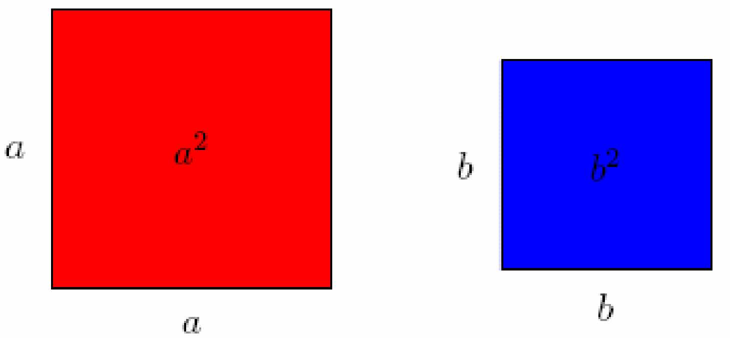


Figura 2: Dos cuadrado, uno de lado a y otro de lado b.

Construimos dos rectángulos de largo a y ancho b, como en la **Figura 3** siguiente:

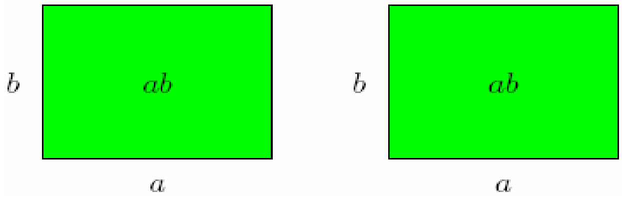


Figura 3: Dos rectángulos de largo a y ancho b.

Uniendo estas cuatro figuras, teniendo en cuenta la *aprehensión operativa de reconfiguración*[3], formamos un cuadrado de $a + b$ unidades de lado como vemos la **Figura 4** a continuación:

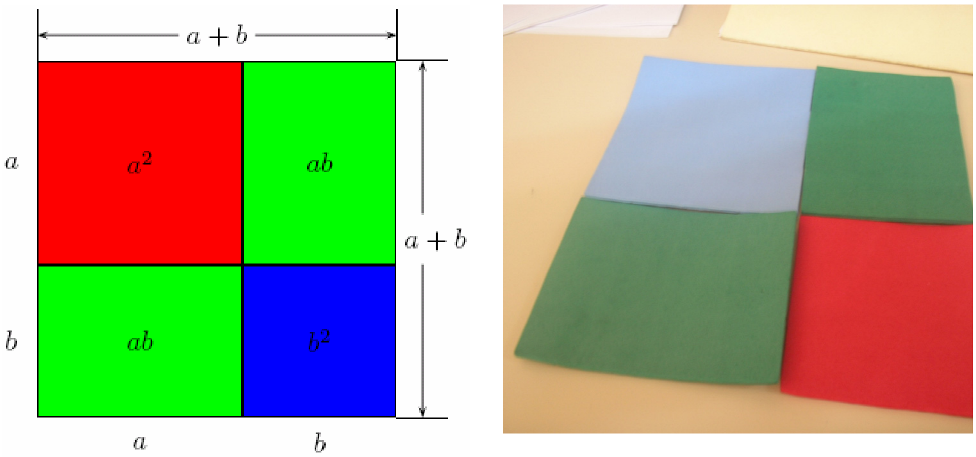


Figura 4: Acepción geométrica del cuadrado de una suma, a la izquierda se muestra la subconfiguración hecha con los polígonos de la **Figura 2** y la **Figura 3** y a la derecha una foto hecha con figuras en actividades con foami[4].

El área de este cuadrado es $(a+b)(a+b) = (a+b)^2$, y como puede verse en la **Figura 4** anterior, el área está formada por un cuadrado rojo de área a^2, un cuadrado de azul de área b^2 y dos rectángulos verdes de área ab cada uno o sea $2ab$. Esto es debido a que los rectángulos son *conjuntos elementales*[5].

Luego, tenemos la siguiente conjetura sin demostración[6]:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1).$$

[3] Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle, donde puzzle se considera como sinónimo de un rompecabezas y se refiere a piezas planas según la Real Academia.
[4] Foto tomada por los compañeros participantes del IV Congresso Internacional de Ensino da matemática efectuado en la ULBRA Canoas/RS, los días 25, 26 e 27 de outubro de 2007.
[5] El área de un conjunto elemental es aditiva (Axioma).
[6] Esta permite resolver el problema aceptando las conjeturas simples de la aprehensión operativa de cambio figural (Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones). Conduce a la solución de un problema.

Ejercicio 1:

Resuelva las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ *siguientes (tomando como solución el campo de los números racionales):*

- Una ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$, es decir con $a = 1$, por ejemplo $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Solución:

Asociemos según la formula *(1)* a x^2 como supuestamente lo hacían los griegos antiguamente con el área de un cuadrado de lado x, $6x$ con el área de dos rectángulos de ancho 3 y largo x, es decir, de área $3x$ cada uno y añadiéndole el área de un cuadrado de lado 3, es decir, de área 9. Luego tenemos, según la **Figura 4** una *aprehensión operativa de reconfiguración* dada en la **Figura 5** de abajo:

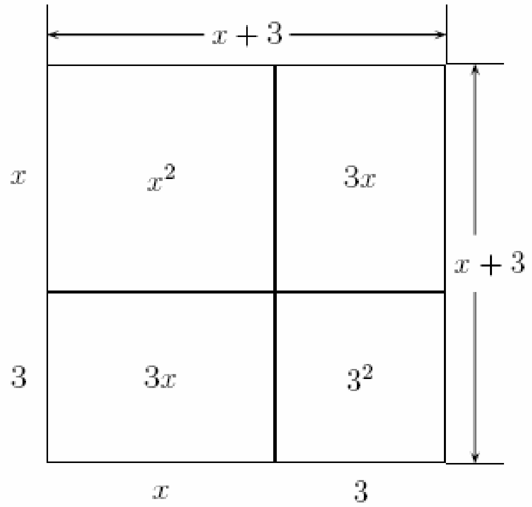


Figura 5: Representación geométrica de la ecuación cuadrática $(x+3)^2$.

Así, tenemos que cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo*[7] que:

$$(x+3)^2 = 0, \text{ según la Figura 5.}$$
$$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{0}, \quad \text{extrayendo raíz cuadrada a ambos lado de la igualdad.}$$
$$x+3 = 0, \quad \text{pues } x+3 \text{ es positivo y } 0 = \text{-}0.$$
$$x+3\text{-}3 = 0\text{-}3, \text{ restando } 3 \text{ a ambos lados de la igualdad.}$$
$$x = \text{-}3, \quad \text{reduciendo, gracias a la existencia del elemento neutro.}$$

Por tanto el conjunto solución denotado por U durante todo el articulo es el siguiente conjunto $U = \{-3\}$, el cual es el valor que anula la ecuación.

[7] Es la asociación de un dibujo a una afirmación matemática.

- Una ecuación de la forma $x^2 + bx = 0$, es decir, por ejemplo $x^2 + 4x = 0$.

Solución:

Asociemos según la formula (1) a x^2 como lo supuestamente hacían los griegos antiguamente con el área de un cuadrado de lado x, $4x$ con el área de dos rectángulos de ancho 2 y altura x, es decir, de área $2x$ cada uno. Luego tenemos según la **Figura 4** una *aprehensión operativa de reconfiguración* dada en la **Figura 6** de abajo:

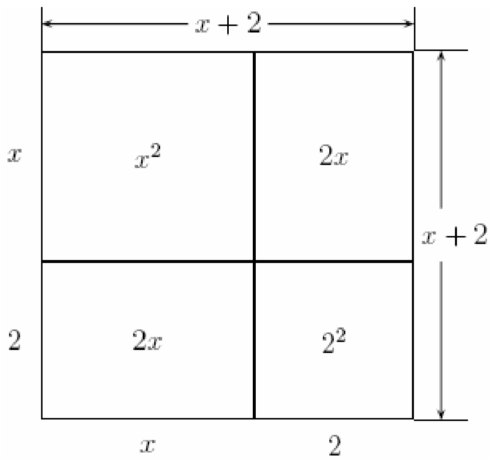


Figura 6: Representación geométrica de la ecuación cuadrática $(x+2)^2$, agregándole un cuadrado de lado 2.

Tenemos que construir un cuadrado agregando otro cuadrado de área 4, es decir, de lado 2.

Así, cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo* que:

$$x^2 + 4x + 4 = 4, \text{ agregando 4 a ambos lados de la igualdad.}$$
$$(x+2)^2 = 4, \text{ según el cuadrado de la Figura 6.}$$
$$\sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{4}, \text{ extrayendo raíz cuadrada a ambos lado de la igualdad.}$$
$$x + 2 = \pm 2, \text{ pues } x+2 \text{ es positivo y } \sqrt{4} = \pm 2.$$

Luego tenemos los dos casos siguientes:

$$x + 2 = 2 \quad \text{ó} \quad x + 2 = -2.$$
$$x + 2 - 2 = 2 - 2 \quad \text{ó} \quad x + 2 - 2 = -2 - 2, \text{ sumando opuestos a ambos lados de la igualdad.}$$
$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = -4.$$

Por tanto el conjunto solución es $U = \{0, -4\}$, los cuales son los valores que anula la ecuación.

- Una ecuación que lleve fracción en los términos, es decir, de la forma $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$.

Solución: Resolver como en los casos anteriores.

- Una ecuación que tenga el coeficiente $a \neq 0$. Por ejemplo $3x^2 + 6x + 3 = 0$.

Solución:

Dividamos la ecuación $3x^2 + 6x + 3 = 0$ entre 3 y obtengamos la ecuación equivalente $x^2 + 2x + 1 = 0$. Luego, asociemos según la formula (1) a x^2 como supuestamente lo hacían los griegos antiguamente con el área de un cuadrado de lado x, $2x$ con el área de dos rectángulos de ancho 1 y largo x, es decir, de área x cada uno. Luego tenemos según la **Figura 4** una *aprehensión operativa de reconfiguración* dada en la **Figura 7** de abajo:

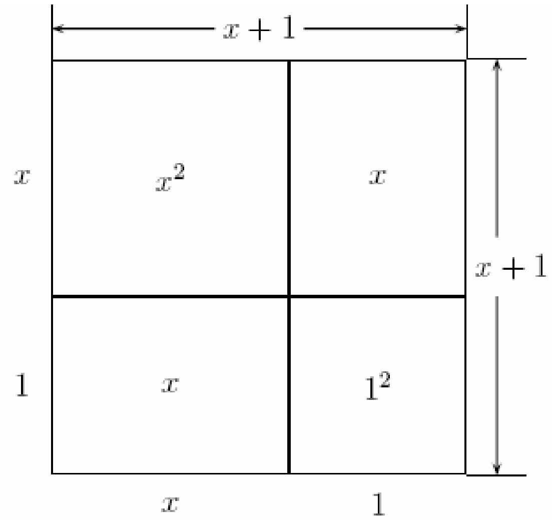


Figura 7: Representación geométrica de la ecuación cuadrática $(x+1)^2$.

Así, tenemos que cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo* que:

$$
\begin{aligned}
(x+1)^2 &= 0, && \text{según la Figura 7.}\\
\sqrt{(x+1)^2} &= \sqrt{0}, && \text{extrayendo raíz cuadrada a ambos lado de la igualdad.}\\
x+1 &= 0, && \text{pues } x+1 \text{ es positivo y } 0 = \text{-}0.\\
x+1\text{-}1 &= 0\text{-}1, && \text{restando 1 a ambos lados de la igualdad.}\\
x &= \text{-}1, && \text{reduciendo, gracias a la existencia del elemento neutro.}
\end{aligned}
$$

Por tanto el conjunto solución es $U = \{-1\}$, los cuales son los valores que anula la ecuación.

- Una ecuación que le falte el término independiente, es decir, de la forma $4x^2 + 8x = 0$.

Solución: Resolver usando los casos anteriores.

- Una ecuación completa, por ejemplo $x^2 + 20x + 30 = 0$.

Solución: Resolver usando los casos anteriores.

- Después de resolver varias ecuaciones que llevan factores mas simples se torna necesario mostrar la necesidad de generar una resolución para cualquier tipo de ecuación cuadrática.

Por ejemplo, la denominada por algunos autores la Formula de Báskara o ecuación cuadrática genérica: $ax^2 + bx + c = 0$.

Solución:

Tenemos los siguientes datos:

- $a, b, c =$ coeficientes o términos de la ecuación.
- $x =$ incógnita.
- $a \neq 0$.

Ahora, dividiendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ entre $a \neq 0$ tenemos lo siguiente:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a}, \text{ sumando opuestos a ambos lados de la igualdad.}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}, \text{ reduciendo.}$$

Luego, asociemos según la formula *(1)* a x^2 como supuestamente lo hacían los griegos antiguamente con el área de un cuadrado de lado x, $\frac{bx}{a}$ con el área de dos rectángulos de ancho $\frac{b}{2a}$ y largo x, es decir, de área $\frac{bx}{2a}$ cada uno. Luego tenemos que podemos formar un cuadrado como el mostrado en la **Figura 8** de abajo:

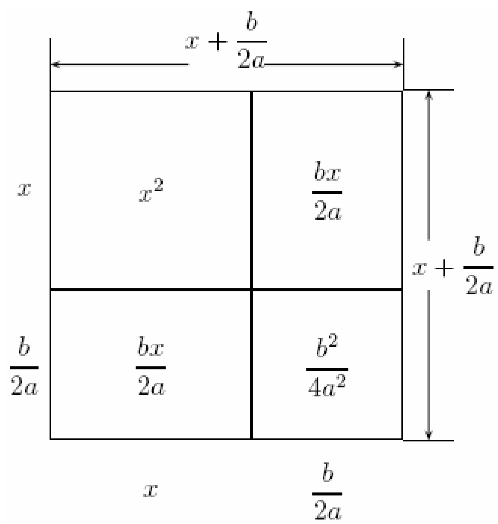


Figura 8: Representación geométrica de la ecuación cuadrática $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Así, tenemos que cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo* que:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \qquad (2).$$

Sumando el área $\frac{b^2}{4a^2}$ de un cuadrado de lado $\frac{b}{2a}$ ambos lados de la ecuación.

Luego factorizando de acuerdo a la **Figura 8** de arriba tenemos:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}, \quad \text{de acuerdo a la Figura 8 y la ecuación } (2).$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}, \quad \text{extrayendo raíz cuadrada a ambos lado de la igualdad.}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}, \quad \text{pues } x+\frac{b}{2a} \text{ es positivo y sumando fracciones.}$$

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}, \quad \text{restando } \frac{b}{2a} \text{ a ambos lados de la igualdad.}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \text{reduciendo y sumando fracciones.}$$

Por tanto el conjunto solución es $U=\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$, los cuales son los valores que anula la ecuación.

- Una utilidad numérica para la ecuación (1) es hallar la solución de cuadrados de números mayores que 10, por ejemplo el cuadrado de 11 colocándola de la manera siguiente:

$$(11)^2=(10+1)^2=10^2+2(10)(1)+1^2=100+20+1=121.$$

Colocando $a=10$ y $b=1$.

Así, sucesivamente lo podemos usar para calcular cualquier cuadrado de un número.

4.3. Producto notable del cuadrado de una diferencia

Ahora usando los cuadrados rojos y azul, junto a los rectángulos verdes de las **Figuras 2** y **Figura 3**, teniendo en cuenta la *aprehensión operativa de reconfiguración* formamos un cuadrado de lado $(a-b)$ como el de la **Figura 9** de abajo:

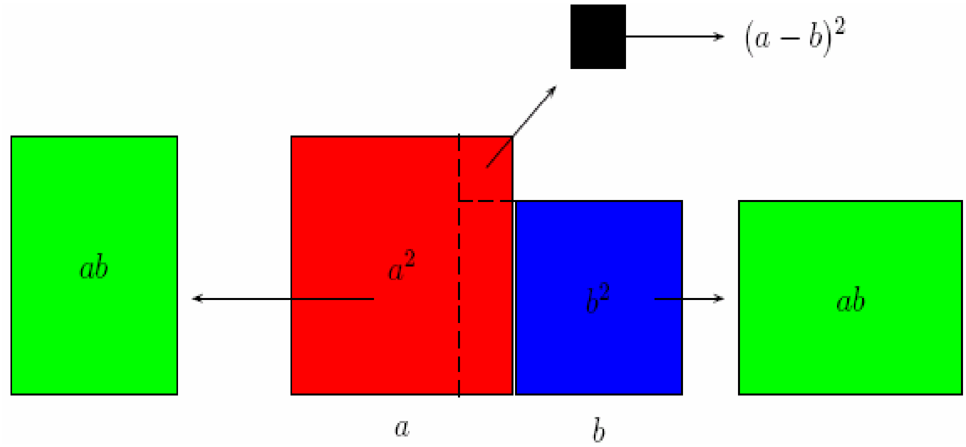


Figura 9: Acepción geométrica del cuadrado de una diferencia.

Y notemos que, el área de este cuadrado es $(a - b)(a - b) = (a - b)^2$, y como puede verse en la **Figura 9** anterior, el área está formada por un cuadrado rojo de área a^2 un cuadrado azul de área b^2 y le quitamos dos rectángulos verdes de área ab cada uno o sea $2ab$ quedando un cuadrado de lado $(a-b)$.

Luego, tenemos la siguiente *conjetura sin demostración*:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (3).$$

Ejercicio 2: *Deduzca otra forma geométrica para el cuadrado de una diferencia (Tome como referencia el* ***Ejercicio 3*** *de abajo y haga una analogía entre estos casos).*

Ejercicio 3: *Resuelva las ecuaciones cuadráticas* $ax^2 - bx + c = 0$ *siguientes (tomando como solución el campo de los números racionales):*

- Una ecuación de la forma $x^2 - bx + c = 0$, es decir con $a = 1$, por ejemplo $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Solución:

Asociemos según la formula (3) a x^2 como supuestamente lo hacían los griegos antiguamente con el área de un cuadrado mas grande de lado x, $10x$ con el área de dos rectángulos que se le están extrayendo al cuadrado grande los cuales tienen lado 5 y x, es decir, de área $5x$ cada uno y 25 con el área de un cuadrado de lado 5 que se le debe agregar al cuadrado grande de acuerdo al área que hay en la intersección de estos rectángulos como vemos en la **Figura 10** de abajo:

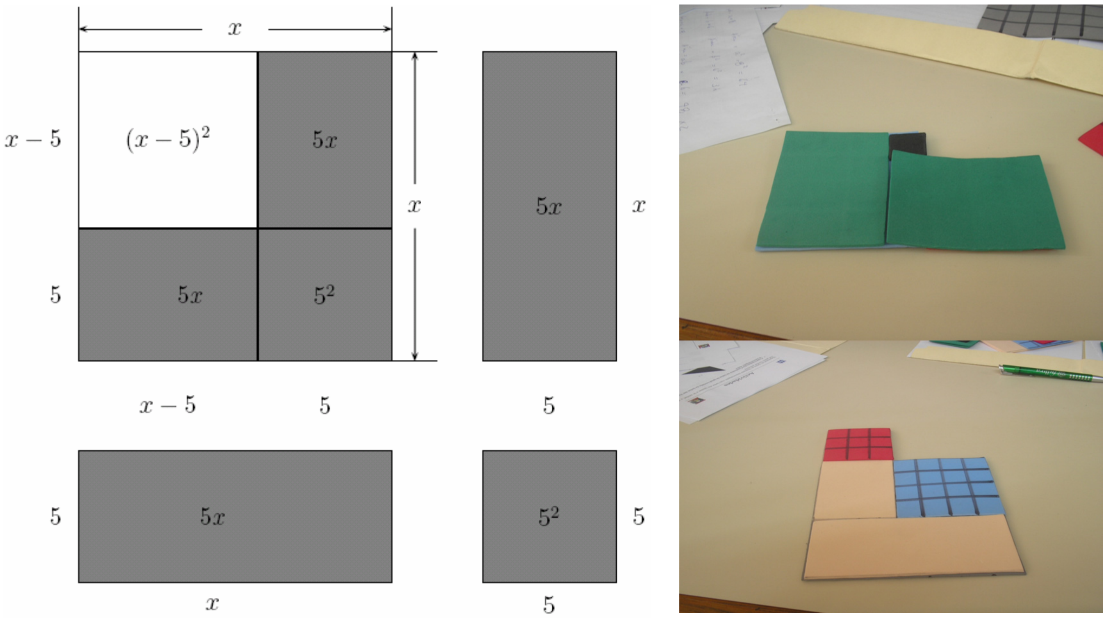


Figura 10: Representación geométrica de la ecuación cuadrática $x^2 - 10x + 25$. A la derecha unas fotos hecha con figuras en actividades con foami[8], arriba se nota que hace falta el cuadradito negro de lado $a - b$ el cual se agrega a la subconfiguracion y abajo otra subconfiguración para la diferencia de cuadrados como el de la izquierda, hechas con foami.

Así, tenemos que cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo* que:

$$
\begin{aligned}
(x-5)^2 &= 0, && \text{de acuerdo a la Figura 10.}\\
\sqrt{(x-5)^2} &= \sqrt{0}, && \text{extrayendo raíz cuadrada a ambos lado de la igualdad.}\\
x-5 &= 0, && \text{pues } x-5 \text{ es positivo y } 0 = \text{-}0.\\
x-5+5 &= 0+5, && \text{sumando } 5 \text{ a ambos lados de la igualdad.}\\
x &= 5, && \text{reduciendo, gracias a la existencia del elemento neutro.}
\end{aligned}
$$

Por tanto el conjunto solución es $U = \{5\}$, el cual es el valor en que se anula la ecuación.

- Una utilidad numérica para la ecuación (3) es hallar la solución de cuadrados de números mayores que 10, al igual que en caso de la ecuación (1).

[8] Foto tomada por los compañeros participantes del IV Congresso Internacional de Ensino da matemática efectuado en la ULBRA Canoas/RS, los días 25, 26 e 27 de outubro de 2007.

4.4. Aplicaciones: Geometría con regla y compás.

Ejercicio 4: *Dos propiedades muy simples que se pueden probar usando las fórmulas de las áreas de triángulo y rectángulos*[9] *son las siguientes:*

Sea ABC *un triángulo rectángulo en* B, *y* H *es el pie de la altura resultante de* B *como veremos en la* ***Figura 11****de abajo:*

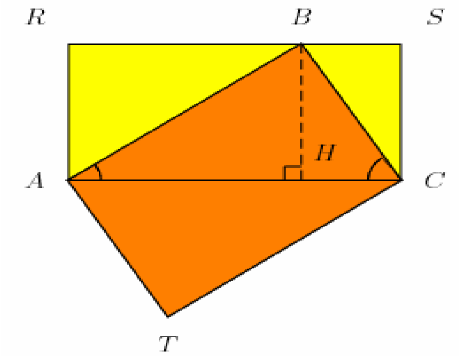


Figura 11: Representación geométrica del **Ejercicio 4**.

Se puede probar que $\overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{BH}$ *y además que* $\overline{BH}^2 = \overline{AH} \times \overline{HC}$.

En efecto: La primera igualdad se prueba de la siguiente manera:

El triángulo ABC *equivale a la mitad del rectángulo* $ARSC$, *es decir, su área denotada* $A_{T(ABC)}$ *es* $A_{T(ABC)} = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BH}}{2}$. *Pero también el triángulo* ABC *es la mitad del área del rectángulo* $ABCT$, *es decir, su área es también* $A_{T(ABC)} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$ *por lo tanto tenemos que:*

$$A_{T(ABC)} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BH}}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$$

De donde tenemos que efectivamente: $\overline{AC} \times \overline{BH} = \overline{AB} \times \overline{BC}$.

Para la prueba de la segunda igualdad notamos que los triángulos ABH *y* BCH *son semejantes (por tener ángulos iguales). Entonces tenemos que:*

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}}.$$

Es decir, tenemos que se cumple:

$$\overline{BH}^2 = \overline{AH} \times \overline{CH}.$$

[9] Ver página Web www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.php

Ejercicio 5: *Un problema relativamente sencillo es el siguiente:*

La gran tradición matemática de la antigüedad fue, sobre todo, geométrica. Los problemas simples en geometría eran aquellos que se podían resolver o construir con regla y compás, como este: Tenemos un cuadrado de lado c, *y con una longitud de lado* L *se desea construir un rectángulo con la misma área que el cuadrado, donde uno de sus lados sea* L.

Respuesta:

Se tiene que $\overline{AC} = L$ *y tomemos* $\overline{AB} = c$ *según tenemos la* ***Figura 12*** *de abajo:*

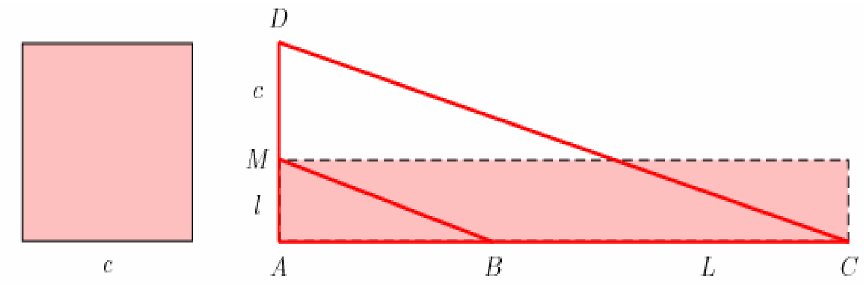


Figura 12: Representación geométrica de la transformación de un cuadrado en un rectángulo de lado dado.

En una recta perpendicular en A, *tomemos* $\overline{AD} = c$. *Luego se traza el segmento* $\overline{DC}$ *y el segmento* $\overline{BM}$ *paralelo a* $\overline{DC}$. *La construcción esta terminada, el segundo lado del rectángulo buscado es justamente* $\overline{AM}$, *que denominamos* l.

En efecto,

Los dos triángulos ABM *y* ACD *son semejantes; según el Teorema de Tales, tenemos que:*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AM}}.$$

Es decir,

$$\frac{L}{c} = \frac{c}{l}.$$

Lo que puede escribirse como:

$$c^2 = L \times l.$$

El rectángulo de lados L *y* l *tiene la misma área que el cuadrado de lado* c. *Un problema como este, que puede ser resuelto con regla y compás, es de primer grado y siempre se ha intentado reducir los problemas difíciles a este tipo de construcción fácil.*

De acuerdo a Evariste Galois (1811-1832), el proceso para llegar a la solución para resolver un problema con regla y compás es el siguiente: Cada una de las etapas de un problema a resolver con regla y compás se reduce a una ecuación de primero o segundo grado y, por consiguiente, todos los problemas resolubles con regla y compás se reducen a una ecuación algebraica con una incógnita cuya solución implica la extracción de una cadena de raíces cuadradas. Recíprocamente, si la solución de un problema geométrico se reduce a la solución de una ecuación algebraica de este tipo, dicho problema puede ser resuelto con regla y compás; ello es así porque las raíces cuadradas pueden construirse con regla y compás.

Entonces, para demostrar que un problema geométrico puede ser resuelto con regla y compás debe plantearse, en primer lugar, una ecuación algebraica equivalente al problema dado. Luego si no es posible hallar tal ecuación entonces el problema no tiene solución.

Por ejemplo, la cuadratura del rectángulo es un problema fácil de resolver:

Sea $ABCD$ un rectángulo cualquiera; se quiere construir un cuadrado con la misma área que el rectángulo. ¿Cómo se hace?

Respuesta:

Se alinean extremo con extremo, $\overline{AB}$ con $\overline{BC}$ y se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$, cambiando del *anclaje discursivo* al *anclaje visual*, nos queda la **Figura 13** de abajo:

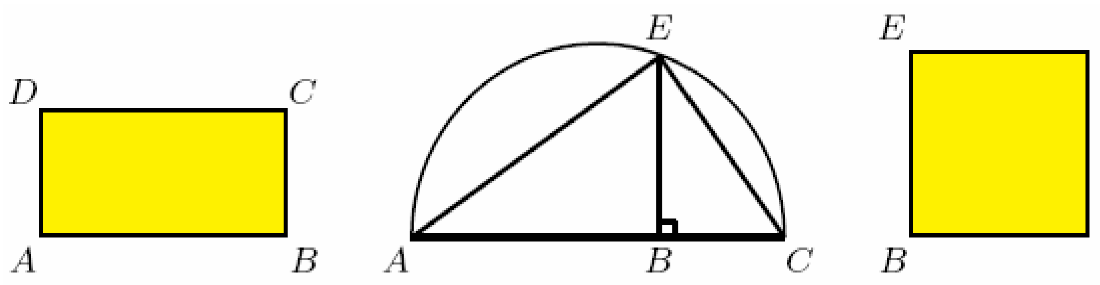


Figura 13: Aquí tenemos un rectángulo $ABCD$ donde tenemos que las longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ forman el diámetro de la semicircunferencia en la que se cumple: $\overline{BE}^2 = \overline{AB} \times \overline{BC}$.

Luego la perpendicular a $\overline{AC}$ en B la cual corta a la semicircunferencia en el punto E. El triángulo AEC es entonces rectángulo en E.

El cuadrado de lado $\overline{BE}$ nos entrega la solución.

En efecto,

Para el triángulo AEC, se tiene que $\overline{DE}$ es la altura resultante del ángulo recto:

Tenemos entonces de acuerdo a la segunda parte del **Ejercicio 4** que:

$$\overline{BE}^2 = \overline{AB} \times \overline{BC}.$$

De aquí tenemos, según Euclides los siguientes enunciados:

4.4.1. Media geométrica: La cuadratura del rectángulo

Este problema es el mas sencillo de plantear ya que consiste en encontrar un cuadrado equivalente a un rectángulo dado. La solución de este problema según D. Jiménez, 2004 pp. 103-117 está en la proposición 13 del sexto libro de los Elementos, en la que se muestra como construir un segmento que sea media geométrica entre otros dos.

La construcción es como el ejemplo anterior además veamos la siguiente **Figura 14**, aplicando una *aprehensión discursiva*[10], cambiando del *anclaje discursivo* al *anclaje visual*[11]:

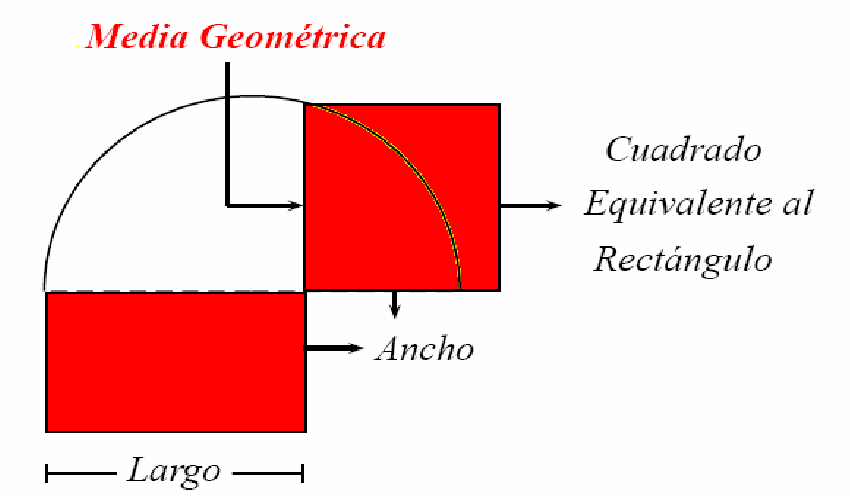


Figura 14: Representación geométrica de la cuadratura del rectángulo.

4.4.2. Media geométrica: La cuadratura del triángulo

La cuadratura de un triángulo, por su parte, según D. Jiménez, 2004 pp. 103-117 se sustenta en la proposición 10 del primer libro de los Elementos, es decir, dividir en dos partes iguales una recta finita dada y en la cuadratura anterior, pues bastaría prolongar la base del triángulo en la mitad de la altura del triángulo y tomar la media geométrica de estas dos cantidades como el lado del cuadrado buscado.

Así, cambiando del *anclaje discursivo* al *anclaje visual*, tenemos la **Figura 15** de abajo:

[10] Es la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Tal vínculo puede realizarse de dos maneras, según las direcciones de la transferencia realizada, a la que se denomina cambio de anclaje.
[11] Es la asociación de una afirmación matemática a un dibujo.

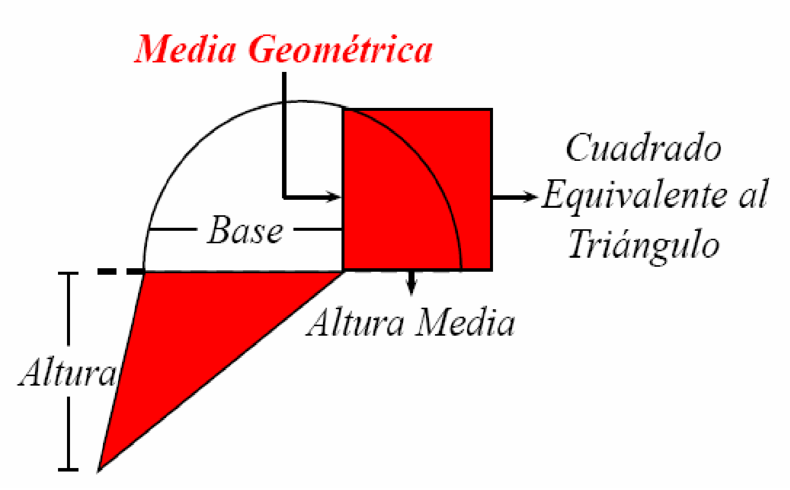


Figura 15: Representación geométrica de la cuadratura del rectángulo.

En el lenguaje común, resolver la cuadratura del círculo significa buscar la solución de un problema que no tiene solución. "Darle forma cuadrada" al círculo, es construir exactamente, con una regla y un compás, un cuadrado de la misma área que un círculo dado.

Existen numerosas soluciones que se acercan, pero ninguna es exacta. Sin embargo, un matemático Griego, Hipócrates de Quios, propuso una solución en el siglo V a. C. Logró construir un cuadrado exactamente igual a una figura delimitada por dos círculos, una lúnula. La figura en cuestión, es dada con el siguiente cambio configural en la **Figura 16** de abajo:

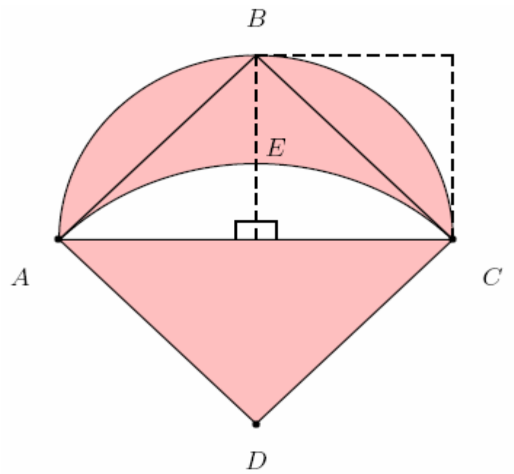


Figura 16: Lúnula de Hipócrates.

Resulta fácil demostrar que el área comprendida entre los dos arcos de círculos es igual al área del triángulo isósceles ABC.

Para terminar la cuadratura de la lúnula, basta con trazar un cuadrado cuya área sea igual a esta ultima, lo que los griegos ya sabían hacer.

5. Interpretaciones y conclusiones

En las percepciones de los productos notables del cuadrado de una suma y una diferencia nuestros estudiantes aprenderán reforzando la parte algebraica de una ecuación de segundo grado con la representación geométrica de la misma, lo cual les hará visualizar la parte analítica, permitiéndoles manipularla inclusive a través de figuras hechas con foami o algún material que se pueda cortar y reconstruir. Además con el estudio de la media geométrica, usaran como los antiguos griegos la construcción con regla y compás, repasando inclusive un poco la historia de la matemática.

Bibliografía

Barreto, J. (2008). Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. Números [en línea]. 69. Recuperado el 20 de abril de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros

Barreto, J. (2008). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Números [en línea]. 69. Recuperado el 20 de abril de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros

Barreto, J. (2009). Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del teorema de Pitágoras. Versión electrónica. UNION [en línea] 17. Recuperado el 20 de abril de 2009, de http://www.fisem.org/

Barreto, J. (2009). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. Números [en línea]. 70. Recuperado el 15 de Junio de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mannana. V. Villani (Eds), Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

De Cuadros, M., Hoffman, V., Klaus, I., Oliveira, C. (1999). Algebra con Geometría: Un enfoque practico na 7a serie do ensino fundamental. Brasil.

Enciclopedia del Estudiante Larousse. (1999). Matemática e Informática. Edición especial en lengua española de la Encyclopédie des Jerines, Larousse S.A.

Jiménez, D. (2004). π la letra griega que los griegos no usaron. Venezuela: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. 11 (1), pp. 103-117.

Oliveira, C. (2002). Equacão do segundo grau pela volta ao quadrado perfeito. IV simposio de educación matemática, Universidad Luterana Do Brasil.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Relime*, 10 (2), pp. 273-300. México: Publicación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Julio Cesar Barreto García, Nací en la ciudad de San Felipe estado Yaracuy (Venezuela). Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Fungí como Coordinador Académico de Investigación de la Organización de Investigaciones Matemáticas en Pregrado de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Obtuve el Primer Lugar en el VII Encuentro Nacional de Estudiantes de Ciencias 2006 efectuado en la Facultad de Ciencias de La Universidad del Zulia, actualmente soy profesor de Física y Matemática en educación media y diversificada en el LB José Antonio Sosa Guillen, L.B. José Antonio Páez, Instituto Nacional de Cooperación Educativa, a nivel universitario soy docente de Matemática en el Instituto Universitario de Tecnología Antonio José de Sucre extensión San Felipe.
Dirección electrónica: juliocbarretog@hotmail.com