Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 133-139 (1990)

CUADRATURAS PARA FUNCIONES PESO COMPLEJAS

Pablo González Vera, Francisco Pérez Acosta y Ramón A. Orive Rodríguez

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

Abstract:

In this note,Interpolatory Quadrature Formulas are extended to a class of complex weight functions and the convergence is proved for certain integrands. We also give some results about Padé-type Approximants to a corresponding important class of fuctions.

Keywords: Padé - type Approximants, quadrature.

1.INTRODUCCION

El objetivo fundamental de este trabajo es estudiar la cuadratura numérica de integrales de la forma:

$$I(F) = \int_{-1}^{+1} \omega(x)F(x)dx \tag{1.1}$$

donde F(x) es una función analítica (en la variable compleja x) en una cierta región que contenga al intervalo real [-1,1] y $\omega(x)$ una función compleja para la cual existan las integrales:

$$c_n = \int_{-1}^{+1} x^n \omega(x)dx \quad , \; n = 0,1,2,..., \tag{1.2}$$

Probaremos que pueden encontrarse n puntos del plano complejo $\{x_i\}$ y n pesos

$\{A_l\}$, de manera que:

$$I_n(F) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l F(x_l) \longrightarrow I \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1.3}$$

Además, veremos que I_n tendrá un grado de precisión igual a (n-1), esto es:

$$I_n(x^j) = I(x^j) \quad , \; j = 0,1,\ldots,n-1$$

Cuadraturas del tipo (1.2) han sido estudiadas por J. Nuttall y C. J. Wherry [1], con el más alto grado de precisión (2n-1) (cuadratura gaussiana), habiendo sido probada su convergencia en base al comportamiento asintótico de polinomios ortogonales respecto a la función peso $\omega(x)$. No obstante, estos resultados quedan restringidos a una clase muy particular de funciones, de manera que funciones peso tan "típicas" como las de la forma:

$\omega(x) = (1-x)^{\alpha} \; (1+x)^{\beta}$, $(\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta > -1)$, quedan excluidas de sus conclusiones (ver [1]).

La condición (1.2) impuesta por nosotros es la más general (y la más "natural") posible. Además, será probada la convergencia de $\{I_n\}$ y la computación de los nodos $\{x_l\}$ y pesos $\{A_l\}$ quedará establecida de forma extremadamente sencilla. Por contra, reconocemos que nuestras fórmulas presentan el inconveniente de que su grado de precisión es menor que el de las obtenidas en [1].

2.APROXIMANTES TIPO-PADÉ EN EL INFINITO

Como veremos más adelante, el estudio de la convergencia de (1.3) está estrechamente relacionado con el de la convergencia de Aproximantes tipo-Padé (ATPs) diagonales en el infinito a la función:

$$H(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{\omega(x)}{z-x}\, dx \tag{2.1}$$

(Para una discusión sobre la convergencia de Aproximantes de Padé a (2.1), véase [2]).

Desde un punto de vista general, a partir de una serie formal de potencias

$$L_\infty(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-(j+1)} \quad (z\to\infty) \tag{2.2}$$

se trata de construir fracciones racionales con denominador prefijado de grado n y numerador de grado (n-1),de manera que su desarrollo en serie de potencias descendentes de z coincida con L_∞ hasta el grado n. Formalmente,este es el fundamento de los ATPs introducidos por Brezinski [3]. A fin de fijar ideas, recordemos brevemente su construcción,incorporando algunas leves modificaciones. Para ello se introduce el siguiente funcional lineal,actuando sobre el espacio de los polinomios: $c(x^j) = c_j$, $j = 0,1,\ldots$ Asumiendo que c puede extenderse a un espacio suficientemente amplio Σ, de forma que $(1/z-x) \in \Sigma$, para $z \in \mathbb{C}$, podemos afirmar que para la función $H(z) = c(1/z-x)$, se tiene,al menos,formalmente:

$$H(z) = c\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{z^{j+1}} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \; z^{-(j+1)} = L_\infty, \quad (z\to\infty)$$

Como es bien sabido,en el caso real,esta relación existente entre H y la serie L_∞ ha sido empleada con éxito por Stieltjes y Hamburger para resolver el problema de momentos. En base a la misma,podemos construir funciones racionales que correspondan a L_∞ en la siguiente forma: Dado un polinomio arbitrario $P_n(z)$,de grado n, puede probarse fácilmente que $Q_n(z)$ dado por:

$$Q_n(z) = c\left(\frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} \right) \tag{2.2}$$

(donde c actúa sobre x, quedando z como parámetro) es un polinomio de grado (n-1),verificándose además:

$$H(z) - \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = O(z^{-(n+1)}), \quad (z\to\infty)$$

Este aproximante racional a H (o a L_∞) se representa por $(n/n)_{L_\infty}(z)$, y se conoce como Aproximante tipo-Padé a H en el infinito (ver [3]).

De (2.2) obtenemos, de forma inmediata,la siguiente expresión del error de aproximación:

$$E_n(z) = H(z) - (n/n)_{L_\infty}(z) = \frac{1}{P_n(z)}\, c\left(\frac{P_n(x)}{z-x} \right) \tag{2.3}$$

En particular, si imponemos que:

$$c\left(x^j P_n(x) \right) = 0 \ , \ j = 0,1,\ldots,n-1 \tag{2.4}$$

obtenemos, a partir de (2.3) que:

$$H(z)P_n(z) - Q_n(z) = O\left(z^{-(2n+1)}\right) \ , \ (z \to \infty) \tag{2.5}$$

La condición (2.4) indica que $P_n(x)$ es el n-simo polinomio ortogonal formal [5] con respecto a c. En este caso, el correspondiente ATP se denomina AP (Aproximante de Padé).

En lo que sigue, supondremos que H(z) viene expresada por (2.1), con $\omega(x)$ verificando (1.2). Así, dado un polinomio arbitrario de grado n, se tiene de (2.3):

$$E_n(z) = \frac{1}{P_n(z)} \int_{-1}^{+1} \frac{\omega(x) P_n(x)}{z - x}\, dx \tag{2.6}$$

Veamos, entonces, qué sucede cuando elegimos $P_n(z)$ de forma que sus ceros estén distribuidos uniformemente en el círculo unidad (ver [6]). En orden a estudiar la convergencia en este caso, necesitamos el siguiente :

LEMA 1 ([6])

Sea E un abierto - conexo de $\mathbb{C}$. Supongamos que δE es una curva analítica de Jordan y asumamos que $K = \mathbb{C} - \overline{E}$ es regular, en el sentido de que posea una función de Green G(z) con polo en el infinito. Sea $\left\{ \beta_j^{(n)} \right\}$ (j=1,...,n) una familia de puntos de δE, "uniformemente distribuidos" con respecto a: $d_\mu(t) = \frac{\delta G}{\delta n} \frac{|dt|}{2\pi}$, donde n representa la normal interior a δE.

En estas condiciones, si tomamos $P_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \left(z - \beta_j^{(n)} \right)$, se tiene:

$$\text{a) } \overline{\lim_{n\to\infty}}\ |P_n(z)|^{1/n} = \mathrm{Cap}(E) \ , \ \text{para } z \in E$$

$$\text{b) } \overline{\lim_{n\to\infty}}\ |P_n(z)|^{1/n} = e^{G(z)}\mathrm{Cap}(E) \ , \ \text{para } z \in K$$

Sentado esto, pasemos a nuestro resultado fundamental:

136

TEOREMA 1.

Sea $P_n(z)$ como en el Lema 1, para n = 1,2,... Entonces, la sucesión de ATPs

$$(n/n)_H(z) = \frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$$ convverge geométricamente a H(z), para todo $z \in \mathbf{C}$: $|z|>1$.

Demostración.

Supongamos que $\Gamma = \{ t: |t|=\rho \}$, con $1<\rho<|z|$, con $z \in \mathbf{C}$ fijo. El teorema del módulo máximo prueba que para $x \in [-1,1]$, se tiene:

$|P_n(z)| \le \sup_{t\in\Gamma} |P_n(t)| = |P_n(t_0)|$, con $t_0 \in \Gamma$. De (2.6) tenemos:

$$|E_n(z)| \le \frac{|P_n(t_0)|}{|P_n(z)|} \int_{-1}^{+1} \frac{|\omega(x)|\,|dx|}{|z-x|} \le K \frac{|P_n(t_0)|}{|P_n(z)|}$$

donde K es una constante independiente de n. Como $|t_0|>1$ y $|z|>1$, podemos erscribir,de acuerdo con el Lema 1:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |E_n(z)|^{1/n} \le \frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |P_n(t_0)|^{1/n}}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |P_n(z)|^{1/n}} = \frac{e^{G(t_0)}}{e^{G(z)}} = \lambda$$

Como es bien sabido, en el caso particular de un círculo de centro z_0 y radio r: $E = \{ z: |z-z_0|<r \}$, entonces $e^{G(z)} = \frac{|z-z_0|}{r}$, quedando por consiguiente:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |E_n(z)|^{1/n} \le \lambda = \frac{|t_0|/\rho}{|z|/\rho} = \frac{|t_0|}{|z|} = \frac{\rho}{|z|} < 1 ,$$

lo cual prueba la convergencia geométrica de la sucesión de ATPs a H(z) ∎

De forma inmediata,se tiene el siguiente:

COROLARIO

La sucesión $\{ (n/n)_H(z) \}$ converge uniformemente en cualquier compacto conte--nido en D: $\{ z\in\mathbf{C} \,/\, |z|>1 \}$.

Observación: Téngase en cuenta que este resultado es válido,por ejemplo,para el caso en que $P_n(z)$ tenga como ceros a las raíces n-simas de la unidad,esto es: $P_n(z) = z^n-1$.

3.CUADRATURA NUMERICA

Visto lo anterior,nuestro análisis seguirá a partir de ahora el enfoque clásico (véase [7],[8]). Supongamos que F(x) es analítica en la región $\{ z\in\mathbf{C}: |z|\le\rho \}$ $(\rho>1)$ (que incluye a $[-1,1]$ y sea Γ el contorno $|z| = \rho$. Tenemos que por el Teorema Integral de Cauchy:

$F(x) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{F(z)}{z - x} dz$, $x \in [-1,1]$. Por otra parte,

$$I(F) = \int_{-1}^{+1} \omega(x)\, F(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} \omega(x) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(x)}{z - x} dz$$

$=$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(z) \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\omega(x)}{z - x} dx \right] dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(z)\, H(z)\, dz, \text{ con } H(z)$$

dada por (2.1). Entonces,si $P_n(z)$ es un polinomio arbitrario de grado n con ceros $\{x_l\}_{l=1}^n$, podemos escribir:

$H(z) = (n/n)_H(z) + E_n(z) = \dfrac{Q_n(z)}{P_n(z)} + E_n(z) = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \frac{A_l}{z - x_l} + E_n(z)$. De aquí:

$$I(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left[\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} + E_n(z) \right] F(z)\, dz$$

$$= \sum_{l=1}^{n} A_l F(x_l) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma E_n(z)\, F(z)\, dz = I_n(F) + R_n(I)$$

donde $I_n(F) = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} A_l F(x_l)$ **es una cuadratura de la forma (1.1) y**

$R_n(I) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma E_n(z)\, F(z)\, dz$ **representa el error de dicha fórmula.**

Antes de probar la convergencia del método,examinemos el grado de precisión de I_n. Obtenemos el siguiente:

TEOREMA 2

$I_n(x^j) = I(x^j)$, $j = 0,1,\dots,n-1$.

Demostración

Téngase en cuenta que $I(x^j) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} x^j\, \omega(x)\, dx = c_j$, siendo

$H(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j\, z^{-(j+1)}$. Por otra parte: $I_n(x^j) = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} A_l\, x_l^j = c'_j$, siendo

$(n/n)_H(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c'_j\, z^{-(j+1)}$, para $|z|$ suficientemente grande. Pero,por definición de ATPs,se sigue: $c_j = c'_j$, $j = 0,1,\dots,n-1$, de donde,inmediatamente:

$I_n(x^j) = I(x^j)$, $j = 0,1,\dots,n-1$. ■

Por último,y teniendo en cuenta el corolario anterior,podemos asegurar:

TEOREMA 3

$$\lim_{n\to\infty} I_n(F) = \int_{-1}^{+1} F(x)\ \omega(x)\ dx$$, para toda función F(x) analítica en

un círculo que contenga al intervalo real [-1,+1].

BIBLIOGRAFIA

[1] J.NUTTALL,C.J.WHERRY: "Gaussian Integration for Complex Weight Functions". J. Inst. Maths. Applics.21,pp.165-170 (1.978)

[2] A.P. MAGNUS: "Toeplitz matrix techniques and convergence of Complex Weight Padé Approximants". J. of Compt. and Appl. Maths. 19,pp.23-38 (1987)

[3] C .BREZINSKI: "Padé-type Approximation and General Orthogonal Polynomials".Birkhauser,Berlin (1.980)

[4] W.B. JONES, W.J. THRON: "Sequences of meromorphic functions corresponding to a formal Laurent Series". SIAM J. Math. Anal. Vol 10, no.1, pp 1-17 (1.979)

[5] A. DRAUX: "Polynomes Orthogonaux Formels-Applications". Lecture Notes in Maths. 974 (1.983).

[6] J.L. WALSH: "Interpolation and Approximation by rational functions in the complex domain". Colloq. Publ. XX. Amer. Math. Soc. Providence (1.969)

[7] G. SZEGÖ: "Orthogonal Polynomials". Amer. Math. Soc. (1.959).

[8] A. SIDI: "Numerical Quadrature and nonlinear sequences of transformations;
unified rules for efficient computation of integrals with algebraic and loga--rithmic endpoint singularities". Math. of Compt. Vol 35, no. 151, pp 851-874 (1.980).