La tomografía computerizada y la matemática

Nácere Hayek

Abstract

A general view on the origins of the computerized tomography as well as an outline on its mathematical basic essentials and several modalities, are presented.

Resumen

Se presenta una panorámica de los orígenes de la tomografía computerizada y un esbozo a grandes rasgos de sus fundamentos matemáticos y varias modalidades.

Panorámica de la matemática actual

Las últimas décadas del milenio pasado estuvieron caracterizadas por una expansión de los saberes humanos como nunca hubo en la historia. Hasta tal punto llegaron, en especial las áreas científicas, a ampliar su cuerpo de nociones y conocimientos, que tras los progresos habidos la sociedad y la ciencia comenzaron a separarse la una de la otra, creándose en nuestros días un problema de comunicación de envergadura, sobre todo para el ciudadano no experto. Es sobradamente conocido que para la mente del gran público, el lenguaje de la ciencia le resulta algo lejano, misterioso e incomprensible. Esta reflexión se extiende a una escala cultural de mayor calado, al mundo intelectual. La vida actual exige que un culto hombre de leyes, un brillante historiador, un buen maestro o un destacado periodista, debe adaptarse a nuevos puntos de vista en sus relaciones culturales y sociales, en economía política, en las artes y en la interpretación del hombre acerca de su entorno, lo que hace absolutamente imperativo que tenga que mantener un mínimo contacto intelectual con los últimos desenvolvimientos de la ciencia. Y es que el gran problema de que el ciudadano en general, no tenga noticia de lo que sucede en los centros de investigación, radica en cómo deben difundirse acertadamente los conocimientos científicos a través de los medios de comunicación. Para ello, se requiere desde luego, cada vez en mayor medida, una pléyade de redactores científicos que ayuden a despejar incógnitas de ecuaciones que no se comprenden, porque no es nada fácil traducir el idioma de la ciencia al lenguaje vulgar y hay que tratar de convertir los conceptos abstractos que maneja el científico en imágenes

Números.
Volumen 58, mayo de 2004, páginas 37-44

familiares del mundo cotidiano. En el caso de la matemática, esta cuestión es casi imposible y constituye un problema mucho más tangible y real que en cualquiera otra disciplina científica. Si nos referimos, por ejemplo, a lo que está sucediendo ahora con los espectaculares logros alcanzados con el cada vez más potente computador u ordenador, tenemos que llamar la atención aquí y de una vez por todas, que la matemática *no se limita estrictamente a la máquina*, aunque sean reconocidos sus numerosos resultados conseguidos por medio de esta última. A este respecto, si bien algunos sectores estuvieron algún tiempo manteniendo la creencia de que el computador, hoy usualmente conocido como ordenador, representaba prácticamente una revolución de la ingeniería o de la física, lo cierto era que estaban obviando que las ideas centrales de la invención y uso cotidiano del computador eran ni más ni menos, que matemática sofisticada. El computador/ordenador culmina siglos de esfuerzo encaminados a acelerar los cálculos. Sucede al ábaco, los logaritmos y la regla de cálculo, y representa el descendiente electrónico del computador mecánico (concebido inicialmente por el matemático inglés Charles Babbage en 1835). Si a A. Turing (1912-1954) no se le hubiese ocurrido la idea de una máquina de cálculo universal y J. von Neumann (1903-1957) no hubiese creado el gran computador de tubos electrónicos capaces de seguir programas, el computador quizás se hubiese arrinconado algunas décadas más. Esto afortunadamente no ocurrió, aunque revela la profunda conexión de la matemática más abstracta con el mundo real. El ordenador logró pulverizar el recelo a los grandes cálculos que imponía el recurso a técnicas matemáticas, y ha reducido a cero el tiempo que tenía en general que transcurrir, para que la teoría matemática se adecuara e identificara con la posible aplicación. Fue de hecho, lo que ocasionó la renovación del interés de los científicos por lo que hacían los matemáticos y algunas disciplinas que parecían haberse desentendido de la matemática se rindieron al influjo de la misma con la llegada del ordenador. Actualmente los biólogos consultan libros sobre álgebras de Boole; los médicos, obras sobre la teoría de la información; los psicólogos, absorben tratados sobre la teoría de la probabilidad; la sociología, la lingüística y gran parte de las humanidades, han acusado impactos de la matemática, la cual camuflada bajo el nombre de cliometría se ha infiltrado incluso en el campo histórico. Es cierto que el advenimiento del ordenador ha tenido mucho que ver con el cambio de rumbo que se ha evidenciado en todas estas disciplinas citadas. En realidad hoy, como se sabe, ha transformado nuestros medios de comunicación y hasta nuestro propio modo de pensar. Sin lugar a dudas, representa la más sorprendente revolución de nuestra era, lo que plasma desde un punto de vista ya muy generalizado, la autenticidad de una *matematización* del conocimiento humano. Pero, como antes se dijo, no se trata sólo de eso, ni tampoco de que la matemática *haya quedado reducida en gran medida al reiterado uso de un computador.*

La matemática es otra cosa. No es fácil, sin embargo, contestar a la pregunta, ¿ a *qué* otra cosa ? La propia naturaleza de la matemática ha conducido a un confusionismo que ha generado una cadena histórica de sucesivas definiciones para catalogarla. La última conclusión a la que se ha llegado para definirla – ciertamente no definitiva y que probablemente se modificará en el futuro – es que la *matemática consiste en el estudio de las relaciones entre objetos.* Lo que interesa es la relación y su estructura interna; y la labor del matemático se basa en eliminar las relaciones inútiles. Precisamente de ello, procede su enorme poder de abstracción haciendo ver que grupos de objetos sin características comunes, pueden convertirse en matemáticamente próximos, si tienen relaciones similares. La matemática es muy dúctil, porque transforma conceptos abstractos en cantidades medibles; pero aún más, se trata de una ciencia que puede autoreferenciarse. estudiarse a sí misma, lo que la distingue de las otras ciencias, como la física, la química o la medicina, que requieren pasar por la criba de la realidad.

Y es que representa, desde luego, un hecho indiscutible que la relación entre la matemática y muchas otras disciplinas científicas, ha sufrido una transformación sustancial a lo largo de las últimas décadas, y cada día están apareciendo más casos instructivos de matemática abstracta que han encontrado y continuarán encontrando aplicaciones en el mundo real. Sin temor a equivocarnos, podemos concluir que ha quedado fielmente plasmado con una rotunda realidad, el presagio del matemático Lobatchevski: No existe rama de la matemática, por abstracta que sea, que algún día no pueda ser aplicada a los fenómenos del mundo real.

La tomografía computerizada

En este trabajo nos vamos a ocupar de *una* de las técnicas a las que ha dado lugar la matemática, que nos ha parecido un idóneo **paradigma** de cualquier ejemplo que se quiera citar entre las múltiples e interesantes aplicaciones que existen en muy diversas áreas. Es la que se refiere a la *tomografía axial computerizada*, origen del **escáner** que ha revolucionado a la medicina.

a) *Orígenes y fundamentos*

Durante los últimos treinta años los avances en la tecnología dedicada a las imágenes médicas se han derivado del traslado de la radiología convencional a las posibilidades que ofrecen la tomografía axial computerizada (TAC), la resonancia magnética nuclear, la tomografía computerizada por emisión de fotón único o la tomografía por emisión de positrones.

El objetivo de todas estas modalidades de imagen médica es el de visualizar los órganos internos del cuerpo humano, siendo lo más significativo la reconstrucción, punto a punto, de la zona del cuerpo a examinar, sin transgredir lo más mínimo su integridad, es decir, si hacemos uso de la terminología preferida por los médicos, de modo que aquella *no sea invasiva.*

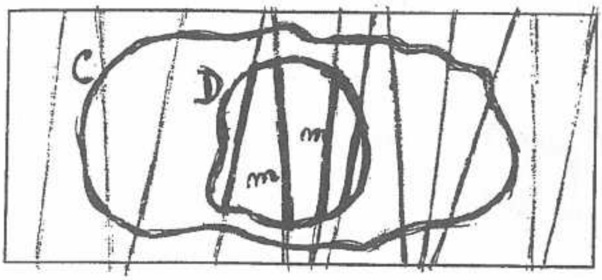
El principio de la reconstrucción de imagen en todas las modalidades de tomografía, es que un objeto, cuyo interior no es observable, cabe reproducirlo exactamente a partir de un conjunto de sus proyecciones recogidas desde diversos ángulos. No obstante, en una aplicación práctica en cualquiera de las modalidades de tomografía computerizada, se puede obtener solamente una estimación real del objeto bajo estudio. La fidelidad de la pretendida reconstrucción depende de muchas cosas, y en especial, del proceso previo de los datos adquiridos.

En tomografía axial computerizada, con su ya bien afamado *escáner* se hacen numerosas radiografías de secciones transversales planas de un objeto (la cabeza humana o una porción del cuerpo, por ejemplo) desde todas las direcciones, obteniéndose datos que son la imagen bidimensional radiografiada sobre la imagen sensible, permitiendo reconstruir el objeto de tres dimensiones, a partir del conocimiento de las diversas imágenes en dos dimensiones. Puede pensarse en la lámina fotográfica, orientada en la dirección deseada, como la de un plano en el espacio. El problema de la reconstrucción de la imagen es un problema de análisis armónico, llamado *el problema de Radon,* matemático que lo resolvió teóricamente hace unos noventa años (y del que hablaremos seguidamente) con una generalización del método de Fourier.

Desde luego, la resolución **práctica** del problema es otra cosa: en ella se utiliza la llamada transformada rápida (FFT) de Fourier, que desarrolla en el discreto lo que la transformada de Fourier desarrolla en el continuo, y permite efectuar en tiempo real los complejos cálculos que comparecen en el problema de Radon. Se concedió un Premio Nobel de Medicina por ello. Lo curioso es que este Premio se otorgó en 1979 a los científicos A.M. Cormack y G.N. Hounsfield, ninguno de los cuales era médico, y que aún no teniendo formación en biología o en medicina, trabajaban en el campo de la denominada investigación aplicada. El primero era un ingeniero que consideró como rectas de un plano los rayos X que atravesaban transversalmente la zona explorada, midiendo la pérdida de intensidad (o de energía) de cada rayo a la entrada y salida de la zona (lo que permitiría reconocer los obstáculos o impurezas a lo largo del camino), y recurriendo luego a las fórmulas de Radon, para conocer el interior de aquella; el segundo, por haber construido el primer mecanismo computacional para almacenar la información recibida mediante detectores ultrasensibles, capaces de medir la intensidad de los rayos al atravesar el cuerpo. En la actualidad, esta operación se realiza en segundos. El trabajo de Hounsfield comenzó diez años después que el de Cormack y de manera enteramente independiente, y ambos se enfrentaron al problema fundamental de la obtención de las medidas precisas del coeficiente de atenuación de los rayos X en todos los puntos de la sección sujeta a examen. Si Radon hubiera vivido, quizás hubiera compartido con ellos el Premio Nobel.

La cuestión que dio origen al desarrollo de la importante rama tecnológica de la tomografía fue al principio sólo una simple curiosidad matemática, que luego conduciría a su trascendental descubrimiento y que puede enunciarse de la siguiente manera:

Imaginemos en el plano un conjunto C (convexo) que contiene en su interior a otro conjunto D (convexo).

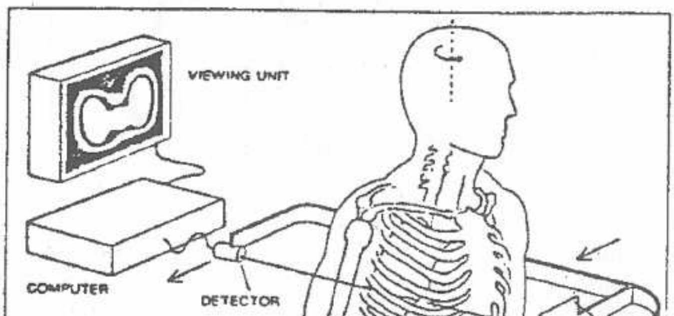


Si se consideran todas las rectas del plano que corten a C, resultaría que algunas de ellas no cortarían a D, mientras que otras lo cortarían según una cierta cuerda o segmento m. El problema es el siguiente: Si se conoce esta m para todas las rectas que cortan a D, ¿se podría conocer la forma y la posición de D? El matemático Radon probó que sí, obteniendo unas fórmulas de transformadas que hoy llevan su nombre. O sea, se puede reconstruir todo lo que hay en el interior de D, a partir del conocimiento de lo que sucede en cada recta al atravesar D.

El problema fundamental en *procesamiento de imágenes* es reconstruir la sección transversal de un objeto haciendo uso de varias imágenes de sus proyecciones. El objetivo de averiguar el interior de un cuerpo a partir de sus secciones por planos (o por rectas) y cuyas proyecciones son recogidas desde varios ángulos, no es más que la interpretación geométrica de un teorema demostrado por el matemático Johahn Radon (1887-1956) en 1917[1]. Cormack y Hounsfield lo utilizaron para la tomografía computerizada, en donde las imágenes de cortes transversales en un tejido humano son llamadas **tomogramas** (palabra que deriva del griego *tomos* que significa sección). El ejemplo más sobresaliente de CT sigue siendo la transmisión para radiología diagnóstica: una sección transversal del cuerpo humano es escaneada mediante una emisión de rayos X cuya pérdida de intensidad es registrada por un detector y procesada por un computador para producir una imagen bidimensional, que a su vez se refleja sobre una pantalla. La técnica para generar estos tomogramas consiste explícitamente en los siguientes tres pasos:

1) La fuente de rayos X y el detector, colocados frente a frente en un soporte, se hacen girar tomando un número finito de posiciones alrededor del campo.

2) Las medidas de *absorción* de rayos X en cada una de las posiciones se registra en un ordenador que –por medio de un algoritmo basado en el teorema de Radon– proporciona la *densidad* del tejido en cada punto del plano de la sección. En un terminal de pantalla, se representa un mapa de densidades, permitiendo por ejemplo, la detección de un tumor.



Desde el punto de vista matemático, la transformada que aplica una función en R^2 en el conjunto de sus integrales de línea, es denominada *transformada de Radon (en dos dimensiones)*. Así, el problema de CT exige simplemente la inversión de la transformada de Radon en R^2. Esto fue lo que hizo en 1917 Radon dando una fórmula explícita de inversión. En

1 J. Radon, *BerichteSáchsische Akademie der Wissenschaften*, Leipzig, Math.-Phis. Kl. **69**,262-267 (1917).

realidad, aquella fórmula de Radon posee un valor limitado para cálculos prácticos y resuelve parte del problema. Ello se debe a que en la práctica, las integrales pueden ser medidas sólo para un número finito de líneas L. La transformación de Radon 3D se define usando proyecciones 1D de un objeto de 3D, al que designaremos f(x,y,z), donde esas proyecciones son obtenidas por integración de f(x,y,z) sobre un plano cuya orientación puede describirse por un vector unidad a.

Geométricamente, la transformación de Radon 3D continua, aplica una función en R^3 en el conjunto de sus integrales planas en R^3. Formalmente, se define la transformación por una integral triple (con límites de integración de $-\infty$ a $+\infty$) denotada $\Re\, f(\alpha, s)$.

Para las aplicaciones modernas, es conveniente tener una discretización de la transformación de Radon. De modo específico, cada definición de la transformación discreta de Radon 3D debe satisfacer las siguientes propiedades: Exactitud algebraica, fidelidad geométrica, ser rápidamente computable, obedecer a relaciones paralelas a las de la teoría continua y sobre todo, la de ser *invertible* y además, con un algoritmo de reconstrucción rápida.

Para una mejor comprensión de la teoría y algoritmos de CT, existen buenas obras con el adecuado rigor matemático [2].

b) *Modalidades principales.*

Existen tres modalidades principales de tomografía computerizada: tomografía de transmisión o por rayos X, de emisión o por ultrasonidos. Presentan como característica común, los algoritmos computerizados para la reconstrucción de los tomogramas a partir de los rayos proyectados. Todos los algoritmos están basados sobre el principio de que las proyecciones son ciertas integrales de línea de las diferentes energías cuantificables.

La tomografía de transmisión o por rayos X, incluye dos tipos nítidamente diferentes de configuraciones fundamentales de barrido: tomógrafos rotatorios de haces en abanico y tomógrafos de generador rotatorio y detectores fijos. En general, en tomografía computerizada, los rayos X constituyen la forma más usual de energía utilizada para producir las proyecciones necesarias para *invertir* la transformada de Radon.

En la tomografía de emisión, la fuente de energía queda alojada en el interior del objeto mas bien que en el exterior del mismo. Su objetivo es

2 Véase, por ejemplo, F. Natterer, , *The Mathematics of Computerized Tomography*, Ed. Wiley , Stuttgart, New-York (1980, reprinted 1989). Se trata de una obra recomendable y con buena bibliografía.

el de encontrar imágenes de cortes de la distribución de isótopos radioactivos en el organismo, que previamente han sido administrados como radiofármacos. Estos radioisótopos se caracterizan por emitir fotones gamma o positrones, según sea el tipo de desintegración.

La tomografía ultrasónica (o sea, sustitución de rayos X por técnicas como ultrasonidos) se propone obtener imágenes de corte por varios parámetros acústicos del tejido. El interés de este tipo de tomografía radica en que coadyuva en el problema –casi imposible de resolver– de cuantificar las imágenes ecográficas bidimensionales. Pondérese a este respecto, que la cuestión de reconstrucción de tejidos duros se halla aún pendiente de solución.

Hoy en día, los estudios que tienden a perfeccionar la tomografía computerizada se centran en el uso de escáners de haces múltiples, con el fin de reducir el número de rotaciones del soporte y conseguir algoritmos más rápidos.

De lo que no cabe duda alguna es de que la tomografía computerizada habrá de mejorar nuestro conocimiento y nuestra comprensión de los mecanismos moleculares subyacentes en las enfermedades de la clínica humana. En este orden de cosas, la tomografía de emisión de positrones ha contribuido, en particular y entre otras aplicaciones, al conocimiento de las enfermedades coronarias y podrá permitir la detección de isquemia miocárdica silente, así como de sus consecuencias metabólicas.

Nácere Hayek. Catedrático emérito de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
Correo electrónico: nhayek@ull.es