Problemas Comentados (XVII)

J.A. Rupérez Padrón y M.García Déniz
-Club Matemático-

En el artículo de esta serie publicado en el número 64 de la revista planteábamos la posibilidad de que fuese el último. Agradecemos desde aquí las comunicaciones que nos pedían la continuidad y la confianza de los editores de la revista para mantener un tiempo más esta colaboración. Agradecemos de manera especial las palabras que desde Río Gallegos (Santa Cruz, Argentina) nos envió Guillermo Coronado. Gracias por los ánimos, compañero.

Abundando en lo expresado sobre la resolución de problemas en el número anterior, parece conveniente ver un nuevo problema solucionado mediante el proceso indicado en el esquema aportado.

PROBLEMA DE LAS PASAS Y LA MEMORIA

Éste es un ejemplo de problema que puede ser resuelto mediante distintas estrategias:

1) Por MODELIZACIÓN con ENSAYO Y ERROR elemental.
2) Por ENSAYO Y ERROR dirigido
3) Por ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN con RELACIÓN PARTES/TODO
4) Por REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN con CODIFICACIÓN ALGEBRAICA (ECUACIONES)

> LAS PASAS Y LA MEMORIA
> Mi madre dice que comiendo rabillos de pasas se aumenta la memoria. Yo digo que resolviendo problemas aumentaremos nuestra capacidad de razonamiento, por tanto podemos ser un poco más lógicos, reflexivos y en consecuencia un poquito más inteligentes.
> He comido un total de 100 pasas de uva en un periodo de 5 días. Después del primer día, cada día comí seis pasas más que el día anterior.
> ¿Cuántas pasas de uva comí el primer día? ¿Cuántas los demás días?

PROCESO DE RESOLUCIÓN

I) COMPRENDER
Mediante la lectura y el interrogatorio adecuado se deberá encontrar fácilmente lo siguiente:
DATOS:
- Cinco días
- Cien pasas en total

OBJETIVO:
- Número de pasas comidas el primer día (principal)
- Número de pasas comidas cada día (secundario)

RELACIÓN:
- Cada día se comen seis pasas más que el día anterior

DIAGRAMA:

Día 1º	Día 2º	Día 3º	Día 4º	Día 5º
	6	6 6	6 6 6	6 6 6 6

La etiqueta del primer día no se conoce. Las etiquetas del resto de los días están formadas por la etiqueta del primer día (desconocida) más la etiqueta 6 un número variable de veces.

II) PENSAR
Según el nivel de conocimientos de los alumnos se podrá elegir una manera u otra de pensamiento para resolver este problema. Pero cualquiera de las estrategias mostradas puede ser elegida por cualquier alumno en cualquier momento. Normalmente, la modelización es conveniente en alumnos de menor edad o nivel de conocimientos, el ensayo y error cuando no se dominan las operaciones aritméticas de manera adecuada, la relación Partes/Todo en Segundo o Tercer Ciclo de Primaria y la codificación pre-algebraica en Tercer Ciclo de Primaria o la algebraica en Primer Ciclo de Secundaria.

ESTRATEGIA:

Por MODELIZACIÓN
Por ENSAYO Y ERROR
Por ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN con RELACIÓN PARTES/TODO
Por REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN con CODIFICACIÓN ALGEBRAICA (ECUACIONES)

III) EJECUTAR
Veamos ahora como se trabaja en cada una de las estrategias mencionadas.
1º) Por **modelización**
Debemos buscar cajas que representen las colecciones de pasas comidas cada día y objetos (botones, semillas, bolas, etc) que representen las pasas. A cada caja se le coloca el rótulo correspondiente al día y se separan 100 objetos que representarán las pasas disponibles en total. Se hace un ensayo con el primer día, colocando en la primera caja el número de pasas que se crea adecuado. El segundo día llevará la misma cantidad y otras seis más. Y así cada día hasta terminar con las cinco cajas o con las 100 pasas. Si no llegan a cubrir la quinta caja, se deberá disminuir el número inicial en el siguiente ensayo. Si sobran, se deberá aumentar dicho número. Procediendo así con los ensayos necesarios se llegará finalmente al número inicial ajustado. Ese número será la solución al objetivo principal.

Día 1º	Día 2º	Día 3º	Día 4º	Día 5º
	6	6 6	6 6 6	6 6 6 6

Aquí se pueden introducir, de manera natural, las diferencias entre partición y reparto. Los alumnos pueden resolver el problema simplemente repartiendo las 100 pasas una a una en las distintas cajas hasta terminar con todas. Contar las existentes en cada caja dará la solución. También puede realizarse una técnica mixta: hacer un ensayo de partición y lo que sobre repartirlo uno a uno en cada caja.

2º) Por **ensayo y error**
Se hará lo mismo que en el caso anterior, pero sin modelos físicos. Se usarán los números y la suma.

Día 1º	Día 2º	Día 3º	Día 4º	Día 5º
	6	6 6	6 6 6	6 6 6 6

Se procederá como se indica en la siguiente tabla:

Día 1º	Día 2º	Día 3º	Día 4º	Día 5º	Total	Comentario
15	21	27	33	39	135	>100 Error
13	19	25	31	37	125	>100 Error
11						

Y se seguirá así, con nuevas tentativas hasta obtener la solución al objetivo principal.

3º) Mediante la relación **partes/todo**
Debemos unir los diagramas de cada uno de los días (partes) en un único diagrama (todo) que los comprenda:

	6	6 6	6 6 6	6 6 6 6

100

Se deberá simplificar el diagrama, teniendo en cuenta que hay dos tipos de partes: las que tienen una etiqueta desconocida y las que tienen etiqueta 6. Esto permite formar un único diagrama con sólo dos partes diferentes: una con etiqueta desconocida y otra con etiqueta 6+6+6+6+6+6+6+6+6+6 = 10x6 = 60.

					60

100

Mediante la resta podemos conocer la etiqueta de la parte desconocida:

100 – 60 = 40

Pero esa etiqueta corresponde a una colección formada por cinco partes iguales.

40

5 partes iguales con un total de 40, nos permite calcular la etiqueta de cada parte mediante la división:

40 : 5 = 8

Y éste es el valor de la solución para el objetivo principal.

4º) Mediante la **codificación algebraica**
Debemos pasar del diagrama a la codificación. Llamaremos A al valor de la etiqueta desconocida del primer día y proseguir con los demás días, como se indica en el siguiente esquema:

Número de pasas comidas cada día

Primer día........................ A .... cantidad desconocida
Segundo día.................... A + 6 .... 6 más que el día anterior
Tercer día......................... (A + 6) + 6 .... ídem
Cuarto día....................... (A + 6 + 6) + 6 .... ídem
Quinto día....................... (A + 6 + 6 + 6) + 6 .... ídem

TOTAL........................... 5 veces A + 10 veces 6 = 100 pasas

Esta es la codificación buscada mediante un pre-álgebra, que podemos resolver así:

10 veces 6 = 10 x 6 = 60 pasas sabemos que ha comido seis a seis
100 – 60 = 40 pasas quedan por distribuir
40 : 5 = 8 pasas cada uno de los cinco días

O pasar al álgebra codificando así: $5A + 10 \cdot 6 = 100$
Que resolveremos

$$5\,A + 60 = 100$$
$$5\,A = 100 - 60$$
$$5\,A = 40$$
$$A = 40 : 5$$
$$A = 8$$

Aunque hay una posibilidad más de pasar la codificación algebraica y llegar, en el nivel adecuado, que sería en segundo Ciclo de ESO o en Bachillerato, a darse cuenta de la existencia de una progresión aritmética en la que conocemos la diferencia, el número de términos y la suma de todos los términos. Con lo cual, al utilizar las fórmulas que expresan las dos leyes básicas de este tipo de progresiones, tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A_n = A_1 + d \cdot (n - 1) \text{ à } A_n = A_1 + 6 \cdot (5 - 1) \text{ à } A_n = A_1 + 24$$

$$\frac{A_1 + A_n}{2} \cdot n = S_n \rightarrow \frac{A_1 + (A_1 + 24)}{2} \cdot 5 = 100 \rightarrow (A_1 + 12) \cdot 5 = 100 \rightarrow A_1 + 12 = 20 \rightarrow A_1 = 8$$

De cualquiera de las formas obtenemos la solución al objetivo principal.

SOLUCIÓN: 8 pasas

IV) RESPONDER
La solución debe ser transformada en respuesta. Para ello debemos
COMPROBAR:

Cada día: Total:
8 -> 8 + 6 = 14 -> 14 + 6 = 20 -> 20 + 6 = 26 -> 26 + 6 = 32 -> 8 + 14 + 20 + 26 + 32 =100

ANALIZAR:
Se ha comprobado que la solución del primer día es correcta y también posible. Ahora debemos buscar la respuesta al objetivo secundario, cuántas pasas ha comido cada uno de los otros cuatro días.
Basta con observar los cálculos de la comprobación y ahí tendremos la parte de la respuesta que nos falta.

RESPUESTA:
El primer día comió 8 pasas; el segundo día 14; el tercer día 20; el cuarto día 26 y el quinto día 32 pasas.

GENERALIZAR:
Se pueden plantear todo tipo de problemas parecidos, variando el contexto, los datos y la relación, con el fin de afianzar lo aprendido. Es bueno también, cuando se observa que dominan el trabajo con una estrategia determinada, ofrecer la posibilidad de aprender otra de las indicadas como complemento del proceso. Diseñar esos problemas es labor del profesor o, mejor, del equipo de profesores.

labor del profesor o, mejor, del equipo de profesores.

ADAPTAR:
En el caso de niños pequeños (Infantil, Primer Ciclo de Primaria) debemos utilizar con preferencia la modelización, lo cual nos lleva a disminuir el número total de pasas, el número de días e, incluso, el número de pasas que añade cada día. Deberá hacerse teniendo en cuenta, sobre todo, hasta qué numero conocen.
Para los alumnos de Segundo Ciclo debemos también disminuir los valores, aunque utilicen ensayo y error o partes/todo, a fin de disminuir las dificultades de comprensión.

Comentario: Resulta un problema interesante para conseguir el aprendizaje de los pasos de una cualquiera de las estrategias indicadas para su resolución y mejorar la calidad de cada paso y la progresión hacia la estrategia siguiente.

Nivel: Variando algunos aspectos en el enunciado, puede ser propuesto a distintos niveles. Incluso puede realizarse por modelización y ensayo y error con niños pequeños, siempre que se reduzcan las cantidades hasta llegar al alcance de sus conocimientos (9 pasas en total, 3 días, 1 pasa más cada día).

(**Origen:** Juan Antonio Hans, Colegio Santa María de los Reyes, Sevilla.)

Y ahora toca presentar las soluciones de los PROBLEMAS del número anterior.

SECUENCIAS¿Cómo continúa...?
(¡Ojo! La mayoría son muy tramposos. Hay que ser espabilado...)

1) U, D, T, C, C, S, S, O, ...
2) A, B, C, D, E, …
3) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
4) D, N, O, S, A, J, J, M, ...
5) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...
6) S, M, H, D, S, M, ...
7) C, D, I, L, M, V, …
8) T, C, P, H, H, O, E, …
9) 3, 3, 4, 6, 5, 4, 5, 4, ...
10) R, D, A, C, T, ...
11) B, C, D, F, G, H, …
12) 1, 3, 6, 10, 15, 21, …
13) B, C, D, E, H, I, K, O, …
14) 0, 5, 4, 2, 9, 8, 6, …
15) O, C, E, ...
16) O, S, S, O, O, S, E, O, …
17) 1001, 6, 500, E, O, E, S, 6, E, J, ...
18) A, T, G, C, L, V, L, E, ...
19) 1884, 1888, 1892, 1896, …
20) A, K, Q, J, N, O, S, S, C, …
21) G, E, L, N, D, J, J, ...
22) 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, ...
23) A, A, A, A, B, C, E, E, E, F, G, G, G, G, I, L, L, L, L, L, L, L, P, S, S, S, S, S, T, T, ...
24) A, E, A, P, A, U, U, U, E, C, O, …
25) 202, 122, 232, 425, 262, 728, ...
26) M, G, D, Y, J, A, R, ...

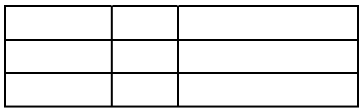
Están sacadas (y adaptadas después) del libro “The Bumper Compendium of Mind-Bending Puzzles” , editado por Heather Dickson y publicado por Lagoon Books en 1998.

Respuestas:
1) N: Por NUEVE; son las iniciales de los nombres de los números.
2) K: Son las denominaciones de las vitaminas.
3) 34: Cada número es la suma de los dos anteriores.
4) A: Por ABRIL; son las iniciales de los meses del año, en sentido inverso.
5) 29: Son los números primos.
6) A: Por AÑO; son las iniciales de las distintas maneras de medir el tiempo, ordenadas de menor a mayor.
7) X: Son las letras usadas en la numeración romana.
8) D: Por DECÁGONO; son las iniciales de los nombres de los polígonos.
9) 5: Nueve tiene 5 letras.
10) P: Por PEÓN; son las iniciales de los nombres de las piezas del ajedrez.
11) J: Son las consonantes.
12) 28: La secuencia se obtiene añadiendo 2 al primer número, 3 al segundo, 4 al cuarto, etc.

13) X: Letras que tiene un eje de simetría horizontal.
14) 7: Los dígitos en orden alfabético.
15) B: Por BASTOS; son los nombres de los palos de la baraja española.
16) E: Por NUEVE; es la letra final del nombre de cada número.
17) O: Para poder completar la frase MI VIDEO ES VIEJO, cuando se cambia cada número por su equivalente en cifras romanas.
18) S: Por SAGITARIO; son las iniciales de los signos del Zodiaco.
19) 1904: Son los años bisiestos. Los años que acaban en dos ceros no lo son.
20) C: Por CUATRO; son las cartas de la baraja inglesa.
21) R: Por Ruth; son las iniciales de los nombres de los libros del Antiguo Testamento.
22) 1000: Son números del sistema binario.
23) V: por Vilaflor; son las iniciales de los Ayuntamientos de Tenerife en orden alfabético.
24) E: La segunda letra en el nombre de cada mes. ¡Pero en inglés! Para que los políglotas se luzcan.
25) 293: Los números del 20 al 30 escritos seguidos y separados después de tres en tres.
26) P: por Padrón; eran las iniciales de los autores del artículo.

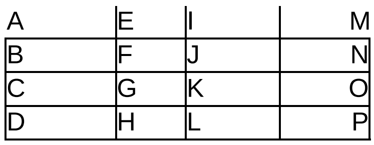
Este tipo de juego entre enigma y serie alfanumérica, puede servir para repasar conceptos de una forma divertida, relacionándolos con conocimientos o actividades de las últimas clases.

¿Cuántos rectángulos hay en el dibujo?



RESOLUCIÓN

Aunque se pueden contar de diversas maneras, en cualquier caso lo importante es proceder con orden y encontrar una manera de realizar el conteo que sea clara y precisa.
Podría hacerse utilizando tramas, colores, tamaños o cualquier otra señal gráfica; sin embargo, la mejor manera es utilizar algún elemento que contenga un cierto orden en sí, como por ejemplo las letras del alfabeto. Denominaremos con letras mayúsculas los vértices de la figura:



Así pues comenzaremos por escribir todos los rectángulos de lado

AB: ABEF, ABIJ, ABMN		EF: EFIJ, EFMN		IJ: IJMN	
AC: ACEG, QCIK, ACMO		EG: EGIK, EGMO		IK: IKMO	
AD: ADEH, ADIL, ADMP	9	EH: EHIL, EHMP	6	IL: ILMP	3
BC: BCFG, BCJK, BCNO		FG: FGIK, FGNO		JK: JKNO	
BD: BDFH, BDJL, BDNP	6	FH: FHJL, FHNP	4	JL: JLNP	2
CD: CDGH, CDKL, CDOP	3	GH: GHKL, GHOP	2	KL: KLOP	1

Sumando todas esas cantidades, tendremos:

9 + 6 + 3 + 6 + 4 + 2 + 3 + 2 + 1= 36 rectángulos.

El orden impuesto por el alfabeto sobre la figura nos permite garantizar que no ha quedado ninguno sin contabilizar.

En el dibujo hay TREINTA Y SEIS (36) rectángulos.

Un vendedor de huevos hace su primera venta dando al cliente la mitad de los huevos que lleva en su cesta más medio huevo. Al segundo cliente, le vende la mitad de los huevos que le quedan más medio huevo. Con el tercero hace lo mismo y con el cuarto también. Solo que con el cuarto se queda sin huevos. ¿Con cuántos huevos empezó la venta?

Éste es el típico problema del que conocemos el algoritmo de funcionamiento y el resultado final, pero no el dato

inicial, que precisamente es lo que pregunta. Por lo tanto, es el ideal para resolver utilizando la estrategia específica de IR HACIA ATRÁS.
El algoritmo es siempre el mismo:

Doy al cliente la **mitad de a** y 1/2 huevo **más**
Me quedo con la **mitad de a** y 1/2 huevo **menos**

Empiezo con **a** huevos ⟶ termino con **b** huevos

a : 2 ->- ½

Y se repite cuatro veces hasta terminar con 0 huevos.
Es importante entender que no se puede vender 1/2 huevo; sucederá que al hallar la mitad, no dará exacta la división; por tanto el 1/2 más que da es para completar la unidad y no tener esa extraña medida. Es decir, la cantidad de partida ha de ser siempre un número **impar**.

Para resolver el problema basta con utilizar cuatro veces el algoritmo inverso:

Añado 1/2 huevo más a lo que tengo y hallo el **doble**

Empiezo con **b** huevos ⟶ termino con **a** huevos

a + 1/2 -> x 2

Y se repite cuatro veces hasta terminar con la cantidad de huevos con la que se empezó.

0 + 1/2 = 1/2 **->** 1/2 x 2 = 1 **->->** 1 + 1/2 = 1 y 1/2 **->** 1 y 1/2 x 2 = 3 **->->**

------------- paso 1º -------------- ------------------- paso 2º -----------------

->-> 3 + 1/2 = 3 y 1/2 **->** 3 y 1/2 x 2 = 7 **->->** 7 + 1/2 = 7 y 1/2 **->** 7 y 1/2 x 2 = 15

--------------- paso 3º ---------------------- ------------------ paso 4º ------------------

La venta empezó con 15 huevos.

Un típico loco del volante atropella a una ancianita y se da a la fuga. Tres testigos ven la matrícula de su coche: un tuerto del ojo derecho, un tuerto del ojo izquierdo y un matemático distraído. El primero sólo ve las dos primeras cifras de la izquierda, y recuerda que son iguales; el segundo sólo ve las dos últimas cifras, y dice que también son iguales; el matemático distraído recuerda que el número de la matrícula tiene cuatro cifras y que es un cuadrado perfecto.
¿Cuál es el número de matrícula del automóvil del loco del volante?

(El matemático no era Ramanujan)

Con los datos del problema podemos deducir que la matrícula del coche tiene la forma

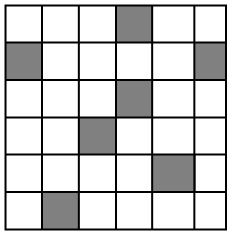
aabb , siendo a una cifra y b otra.

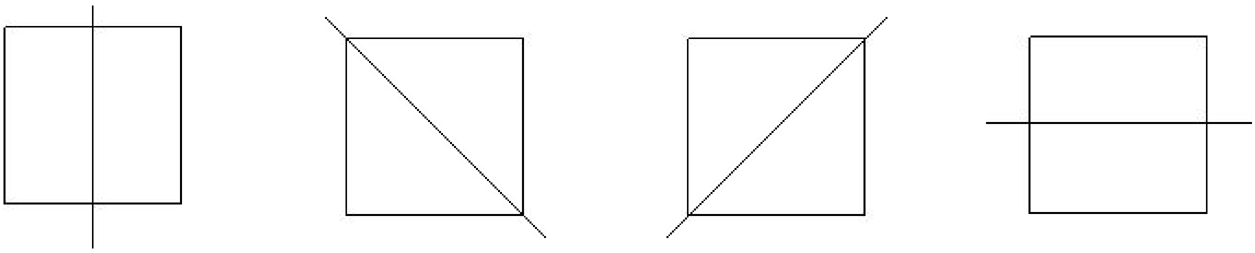
Sabemos, además que dicho número es un cuadrado perfecto.

La descomposición polinómica del número será:
1000 a + 100 a + 10 b + b = 1100 a + 11 b = 11 (100 a + b)
El número ha de ser, por tanto, múltiplo de 11.
Y como ha de ser cuadrado perfecto, esa descomposición debe contener, al menos, al cuadrado de 11 y, por ello, siendo 100 a + b = 99 a + a + b, entonces a+b también ha de ser múltiplo de 11.
a + b sólo puede ser 11 y debe ser una de estas sumas:
9+2 , 8+3, 7+4, 6+5 o 2+9, 3+8, 4+7, 5+6.
Por otra parte, un cuadrado perfecto sólo puede terminar en 1, 4, 5, 6 y 9, por lo que b ha de ser una de estas cinco cifras.
Es decir, el número buscado ha de ser uno de éstos: 2299, 7744, 6655 o 5566. Aquél que tenga raíz cuadrada exacta será la solución.
El único que cumple esa condición es el 7744, que es el cuadrado de 88.

El número de matrícula del automóvil era 7744.

¿Cuál es el menor número de cuadraditos que hay que sombrear en este tablero para que la figura resultante tenga algún eje de simetría?

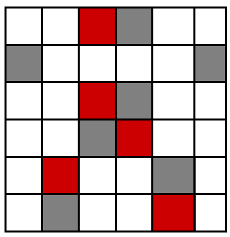




Estos son los posibles ejes de simetría de un cuadrado.
La simetría indica que a ambos lados del eje las dos partes de la figura están colocadas de igual manera pero en disposición inversa. Es decir, cada pareja simétrica de cuadros están colocados en la perpendicular al eje y a la misma distancia de éste.

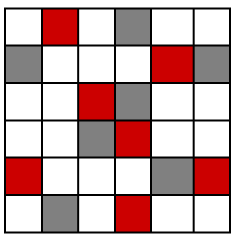
Probando en los cuatro, a partir de los cuadros ya marcados trataremos de completar la figura simétrica. Aquella que requiera menos cantidad de cuadros añadidos será la solución.

Con respecto al eje vertical:



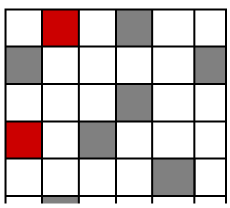
Se necesitan colorear 5 cuadros.

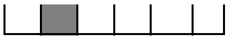
Con respecto al eje horizontal:



Se necesitan colorear 7 cuadros.

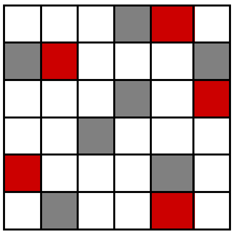
Con respecto al eje diagonal izquierdo:





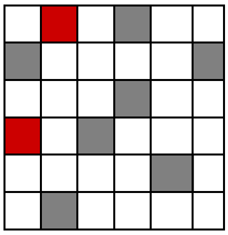
Se necesitan colorear 2 cuadros.

Con respecto al eje diagonal derecho:



Se necesitan colorear 5 cuadros.

La prueba que requiere menor número de cuadros es la tercera.
Ésa es la solución.



Y ahora, como de costumbre, los nuevos problemas.

Hay un tipo de problemas muy curiosos, en los cuáles aparece un dato desconcertante y aparentemente irrelevante. Es ese problema archiconocido que pide averiguar las edades de las tres hijas y el dato final es "**la mayor toca el piano"** . En ese estilo hemos encontrado en un artículo muy sabroso:. **Un problema para discutir**, de Claudio Bernardi, en la revista ARCHIMEDE, 3/2004. Dice así:

Las edades de las hijas del caníbal.

En el curso de una exploración en una isla perdida, tú y un amigo sois capturados por una tribu de aborígenes. Se trata de feroces caníbales, que además tienen una gran pasión por las matemáticas. Las cosas se ponen mal, pero el rey de los caníbales os ofrece una posibilidad de salvación.
El rey tiene dos hijas; se sabe que alguna de ellas tiene más de 1 año. El rey te dice que la suma de las dos edades es 15, mientras comunica a tu amigo, detenido en otra prisión, el producto de las dos edades.
En este punto, para salvarte la vida, debes hallar cuántos años tienen las dos hijas del rey. ¿Qué hacer? Si tú pudieses recibir información de tu amigo, deberías solamente resolver un clásico sistema de suma y producto, pero está excluida toda posibilidad de comunicación. Estás a punto de dar una respuesta, cuando el rey, que después de todo no es tan feroz, trata de animarte: "Tu amigo está a salvo, porque ha determinado las dos edades sin una pizca de duda".
¡He aquí, ésta es la información que te faltaba! ¿Por qué?

Los tres muchachos.

Tres jóvenes que van juntos al colegio cada día, pesan un total de 113 kg, de los cuales 48 corresponden al peso de Luis. El muchacho que lleva zapatos pesa exactamente 7 kg menos que el que más pesa. Carlos pesa más que el muchacho que va en zapatillas. Armando pesa menos que el muchacho que va con calzado deportivo. ¿Qué muchacho lleva zapatos?

La travesía del desierto.

Un vehículo especial se va a adentrar en un tramo desértico de 640 km de recorrido.

Consume, de media, 2'7 l de gasoil por km, y su depósito adaptado, es capaz para 680 l. Tendrá que situar bidones con gasoil en el desierto donde reabastecerse. El vehículo puede transportar bidones para el gasoil vacíos, donde descargar parte del combustible que transporta en su depósito especial, pero no puede llevar más de los 680 l mencionados. Planificando adecuadamente la operación, ¿cuál es el consumo mínimo de gasoil necesario para que el vehículo cruce el desierto?

(Adaptados de *Wood, Larry E*.; *Thinking Strategies*.)

Y aquí quedamos hasta el próximo artículo. Escriban mensajes y comentarios a esta sección y cuenten sus soluciones y experiencias o, si lo prefieren, propongan sus propios problemas. Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera del próximo NÚMEROS.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**

El **Club Matemático** está formado por los profesores
José Antonio Rupérez Padrón, del **IES Canarias Cabrera Pinto** (La Laguna),
y **Manuel García Déniz,** del **IES Tomás de Iriarte** (Santa Cruz de Tenerife).
mgarciadeniz@sinewton.org / jaruperezpadron@sinewton.org