Rev.Acad.Canar.Cienc., IV (núms. 1 y 2),85-99 (1992)

EVALUACION DE INTEGRALES INDEFINIDAS CON FUNCIONES GENERALIZADAS DE LAGUERRE.

M. González, y S.Kalla

Centro de Investigación de Matemática Aplicada

Universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería,

Apartado 10.482

Maracaibo - Venezuela.

ABSTRACT

In this work we evaluate indefinate integrals of the form $I = \int f(x)\, L_{\nu}^{\alpha}(x)\, dx$, assuming that the result can be expressed as $A(x) L_{\nu}^{\alpha}(x) + B(x) L_{\nu+1}^{\alpha}(x)$. Here $f(x)$ is a bounded and continuous or sectionally continuous function over the interval $[x_1, x_2]$ and $L_{\nu}^{\alpha}(x)$ is the generalized Laguerre function of order ν. We observe that $L^{\alpha}(x)$ satisfy some recurrence relations that permit us to reduce the problem of evaluation of I to resolve a differential equation in B(x). Fractional Calculus is used to solve this differential equation. With this technique we obtain more general results than those scattered in the existing literature.

Key words: integrals, the generalized Laguerre function, the differential equation, the Fractional Calculus.

RESUMEN

En este artículo se evaluan integrales indefinidas de la forma $I = \int f(x)\, L_{\nu}^{\alpha}(x)\, dx$, asumiendo que el valor de esta integral es $A(x) L_{\nu}^{\alpha}(x) + B(x) L_{\nu+1}^{\alpha}(x)$. La función $f(x)$ es acotada y continua o seccionalmente continua sobre el intervalo $[x_1, x_2]$ y $L_{\nu}^{\alpha}(x)$ es la

función generalizada de Laguerre de orden ν.Se demuestra que $L_\nu^\alpha(x)$ satisface algunas relaciones de recurrencia que permiten reducir el problema de la.evaluación de I a resolver una ecuación diferencial en B(x). El Cálculo Fraccional se utiliza para resolver esta ecuación diferencial. Con esta técnica se obtienen resultados más generales que los presentados en la literatura existente.

Palabras claves:Integrales , función generalizada de Laguerre, ecuación diferencial,cálculo fraccional.

1. EVALUACION DE INTEGRALES INDEFINIDAS

En esta sección se aplica la técnica de Piquette y Van Buren[6], para evaluar integrales del tipo

$$I = \int f(x)\, L_\nu^\alpha(x)\, dx, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}^- \tag{1}$$

donde f(x) se asume acotada y continua o seccionalmente continua y $L_\nu^\alpha(x)$ es la función generalizada de Laguerre de orden ν definida como:

$$L_\nu^\alpha(x) = \binom{\nu+\alpha}{\alpha}\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}-\nu\\ \alpha+1\end{matrix};x\right) = \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}-\nu\\ \alpha+1\end{matrix};x\right) \tag{2}$$

$\alpha \notin \bar{\mathbb{Z}}$

AL usar (2) y algunas relaciones de recurrencia de la función hipergeométrica confluente LEBEDEV[3],se deducen los siguientes resultados

$$DL_\nu^\alpha(x) = \frac{(x-\nu-\alpha-1)}{x}\, L^\alpha(x) + \frac{\nu+1}{x}\, L_{\nu+1}^\alpha(x) \tag{3}$$

$$DL_{\nu+1}^\alpha(x) = \frac{\nu+1}{x}\, L_{\nu+1}^\alpha(x) - \frac{(\nu+1+\alpha)}{x}\, L_\nu^\alpha(x) \tag{4}$$

donde D es la derivada con respecto a x.

Según la técnica, asumamos que I puede representarse como:

$$I = A(x)L_\nu^\alpha(x) + B(x)L_{\nu+1}^\alpha(x) \tag{5}$$

donde A(x) y B(x) son funciones a determinar.

Si derivammos (1) y (5) con respecto a x, usamos (3) y (4) y luego agrupamos, tenemos que:

$$f(x)L_\nu^\alpha(x) = \left[DA(x) + \frac{x-\nu-\alpha-1}{x}A(x) - \frac{\nu+1+\alpha}{x}B(x)\right]L_\nu^\alpha(x)$$

$$+ \left[\frac{\nu+1}{x}A(x) + DB(x) + \frac{\nu+1}{x}B(x)\right]L_{\nu+1}^\alpha(x)$$

Al comparar coeficientes:

$$\begin{cases} DA(x) + \dfrac{x-\nu-\alpha-1}{x}A(x) - \dfrac{\nu+\alpha+1}{x}B(x) = f(x) \\ \\ DB(x) + \dfrac{\nu+1}{x}B(x) + \dfrac{\nu+1}{x}A(x) = 0 \end{cases}$$

Al Operar con las ecuaciones anteriores tenemos el siguiente sistema para determinar A(x) y B(x).

$$xD^2B(x) + (x-\alpha+1)DB(x) + (\nu+1)B(x) = -(\nu+1)f(x) \tag{6}$$

$$A(x) = -\frac{x}{\nu+1}DB(x) - B(x), \quad \nu \neq -1 \tag{7}$$

donde $D^2 = d^2/dx^2$

Al tenerse una solución particular de la ecuación diferencial (6) podemos obtener A(x) de (7) y luego de (5) evaluar I.
Una solución particular de (6) puede deducirse por métodos clásicos para resolver ecuaciones diferenciales, sin embargo, en la sección 3 damos un método general eficaz con aplicación del Cálculo Fraccional.

2. ALGUNOS RESULTADOS

Seguidamente damos algunos resultados obtenidos al usar la técnica explicada en la sección anterior. La solución particular de la ecuación diferencial (6) se deduce con el uso de métodos clásicos .

$$\int L_\nu^\alpha(x)\,dx = L_\nu^\alpha(x) - L_{\nu+1}^\alpha(x) = -L_{\nu+1}^{\alpha-1}(x), \quad \alpha \notin \mathbb{Z}^- \tag{8}$$

$$\int x^{-\nu-2} L_\nu^\alpha(x)\, dx = -\frac{x^{-\nu-1}}{\nu+\alpha+1} L_{\nu+1}^\alpha(x), \quad \alpha \notin \mathbb{Z}^-, \; \nu+\alpha+1 \neq 0 \qquad \textbf{(9)}$$

$$\int x^{\nu+\alpha+1} e^{-x} L_\nu^\alpha(x)\, dx = [(2\nu+\alpha+1-x) L_\nu^\alpha(x) - (\nu+1) L_{\nu+1}^\alpha(x)] \frac{x^{\nu+\alpha}\, e^{-x}}{\nu(\nu+\alpha)}$$

$$= \frac{x^{\nu+\alpha}\, e^{-x}}{\nu} L_{\nu-1}^\alpha(x), \quad \alpha \notin \mathbb{Z}^-, \; \nu \neq 0 \qquad \textbf{(10)}$$

$$\int x^\alpha e^{-x} L_\nu^\alpha(x)\, dx = [(\nu+\alpha+1-x) L_\nu^\alpha(x) - (\nu+1) L_{\nu+1}^\alpha(x)] \frac{x^\alpha e^{-x}}{\nu}$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}\, e^{-x}}{\nu} L_{\nu-1}^{\alpha+1}(x), \quad \alpha \notin \mathbb{Z}^-, \; \nu \neq 0 \qquad \textbf{(11)}$$

$$\int e^{-x} L_\nu^\alpha(x)\, dx = [(\nu+1-x) L_\nu^\alpha(x) - (\nu+1) L_{\nu+1}^\alpha(x)] \frac{e^{-x}}{\nu+\alpha}$$

$$= -e^{-x} L_\nu^{\alpha-1}(x) = [L_{\nu-1}^\alpha(x) - L_\nu^\alpha(x)] e^{-x}, \alpha \notin \mathbb{Z}^- \qquad \textbf{(12)}$$

$$\int x^\alpha L_\nu^\alpha(x)\, dx = [(\nu+\alpha+1) L_\nu^\alpha(x) - (\nu+1) L_{\nu+1}^\alpha(x)] \frac{x^\alpha}{\nu+\alpha+1}$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\nu+\alpha+1} L_\nu^{\alpha+1}(x), \quad \alpha \notin \mathbb{Z}^-, \quad \nu+\alpha+1 \neq 0 \qquad \textbf{(13)}$$

De (**3**):

$$\int_0^x L_\nu^\alpha(x)\, dx = -L_{\nu+1}^{\alpha-1}(x) + \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu+2)} \qquad \textbf{(14)}$$

Al Hacer $\alpha = 0$, $\nu = n$ y $\alpha \neq 0$, $\nu = n$ se obtienen los resultados mostrados en PRUDNIKOV[**7**, p.51; (1.y 2.)] respectivamente.

Los resultados del (**9**) al (**13**) son generalizaciones de [7, p.51; (4.,5.,6.,8. y 9.)] respectivamente.

3. SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL MEDIANTE EL CALCULO FRACCIONAL.

Numerosas aplicaciones tiene el Cálculo Fraccional[5,9], una de ellas es en la resolución de ecuaciones diferenciales.En esta sección presentamos un método general para hallar soluciones particulares de la ecuación (6) mediante la equivalencia de ésta con su forma operacional, usando el operador fraccional de Holgrem-Bassam GUERRA J.[2], definido como:

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, m es el menor entero tal que $\alpha+m>0$, f(x) es real en el intervalo [a,b]. Si $f \in C^{(n)}$ donde n es el entero positivo más pequeño que cumple $n+1 \geq m$, definimos:

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} \{f(x)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+m)} D_x^m \int_a^x (x-t)^{\alpha+m-1} f(t)\, dt \qquad (15)$$

El Operador de Holgrem-Bassam coincide con el operador de Riemman-Liouville OLDHAM[5]

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} \{f(x)\} = R_x^{\alpha} f(x)$$

El siguiente teorema permite establecer una equivalencia entre una forma operacional y una ecuación diferencial y sus soluciones GUERRA J.[2].

<u>Teorema:</u>

Si $\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-w} \{(h+bx)^{\gamma} e^{\lambda x} F(x)\}$ existe, entonces la ecuación diferencial

$$(h+bx)D^2Z + (B_1x+C_1)DZ + [B_2x + C_2 + B_3(h+bx)^{-1}]z = F(x) \qquad (16)$$

es equivalente a:

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (h+bx)^{1-p} e^{-\mu x} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{1} (h+bx)^{p} e^{\mu x} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y = F(x)(h+bx)^{\gamma} e^{\lambda x}$$

con $y = (h+bx)^{\gamma} e^{\lambda x} Z(x)$; h, b, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, w, p, μ, γ y λ son reales tales que $b \neq 0$, $w > 0$ si y sólo si:

$$B_1 = \mu b+2\lambda b \qquad (17)$$

$$C_1 = bp+bw+\mu h+2\lambda h+2\gamma b \qquad (18)$$

$$B_2 = b\lambda^2+\lambda\mu b$$

$$C_2 = \gamma b\mu+2\lambda\gamma b+\lambda^2 h+\lambda bw+\lambda\mu h+\mu wb+\lambda pb$$

$B_3 = \gamma b^2(\gamma-1+p+w)$

de donde tenemos:

$$b\lambda^2-\lambda B_1+B_2 = 0 \tag{19}$$

$$b^2\gamma^2 - (bC_1-b\mu h-2\lambda bh-b^2)\gamma + B_3 = 0 \tag{20}$$

$$w\mu b = C_2-\lambda C_1+\lambda^2 h-\gamma b\mu \tag{21}$$

λ y γ son raíces de (19) y (20); μ, w y p se obtienen de (17), (21) y (18) respectivamente.

Además la solución de (16) viene dada por: $Z(x)=Z_1(x)+Z_2(x)+Z_p(x)$, donde $Z_1(x)$ y $Z_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada a (16) y $Z_p(x)$ es una solución particular con

$$Z_1(x) = k(h+bx)^{-\gamma}e^{-\lambda x} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{(w-1)} e^{-\mu x}(h+bx)^{-p}$$

$$Z_2(x)=(h+bx)^{-\gamma}e^{-\lambda x} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{(w-1)}e^{-\mu x}(h+bx)^{-p} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-1}e^{\mu x}(h+bx)^{p-1} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-w}\{0\}$$

$$Z_p(x) = (h+bx)^{-\gamma}e^{-\lambda x} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{(w-1)} e^{-\mu x}(h+bx)^{-p} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-1} e^{\mu x}(h+bx)^{p-1} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-w}\{g(x)\} \tag{22}$$

siendo $g(x) = (h+bx)^{\gamma}e^{\lambda x} F(x)$.

AL hacer $h = B_2 = B_3 = 0$; $b = B_1 = 1$; $C_1 = 1-\alpha$; $C_2 = \nu+1$ y $F(x) = -(\nu+1)f(x)$ en el teorema anterior se tiene la ecuación diferencial (6) y las expresiones.

$\mu + 2\lambda = 1$

$p + w + 2\gamma = 1 - \alpha$

$\lambda^2 + \lambda\mu = 0$

$\gamma\mu + 2\lambda\gamma + \lambda p + \lambda w + \mu w = \nu+1$

$\gamma(\gamma-1+p+w) = 0$

$\lambda^2 - \lambda = 0$

$\gamma^2 + \gamma\alpha = 0$

$\nu + 1 + (\alpha-1)\lambda - \gamma\mu = w\mu$

De las cuales se deducen los conjuntos de valores:

a) $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $w = \nu+1$, $\gamma = 0$, $p = -\nu-\alpha$

b) $\lambda = 0, \quad \mu = 1, \quad w = \nu+\alpha+1, \quad \gamma = -\alpha, \quad p = -\nu$

c) $\lambda = 1, \quad \mu = -1, \quad w = -\nu-\alpha, \quad \gamma = 0, \quad p = 1+\nu$

d) $\lambda = 1, \quad \mu = -1, \quad w = -\nu, \quad \gamma = -\alpha, \quad p = 1+\nu+\alpha$

que sustituímos en (22) con a = 0 y hallamos cuatro soluciones particulares de (6).

$$B(x) = -(\nu+1) \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{\nu} e^{-x} x^{\nu+\alpha} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-1} e^{x} x^{-\nu-\alpha-1} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-\nu-1} \{f(x)\}, \quad \nu+1 > 0 \tag{23}$$

$$B(x) = -(\nu+1) x^{\alpha} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{\nu+\alpha} e^{-x} x^{\nu} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-1} e^{x} x^{-\nu-1} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-\nu-1-\alpha} \{x^{-\alpha} f(x)\} \tag{24}$$

$\nu+\alpha+1 > 0$

$$B(x) = -(\nu+1) e^{-x} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-\nu-\alpha-1} e^{x} x^{-1-\nu} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-1} e^{x} x^{\nu} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{\nu+\alpha} \{e^{x} f(x)\} \tag{25}$$

$\nu+\alpha < 0$

$$B(x) = -(\nu+1) e^{-x} x^{\alpha} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-\nu-1} e^{x} x^{-\nu-1-\alpha} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-1} e^{-x} x^{\nu+\alpha} \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{\nu} \{x^{-\alpha} e^{x} f(x)\} \tag{26}$$

$\nu < 0$

4. OTROS RESULTADOS

Aquí se evaluan una serie de integrales indefinidas que envuelven funciones generalizadas de Laguerre mediante la técnica descrita, resolviendo la ecuación diferencial (6) con el uso del cálculo fraccional. Se Presentan tres ejemplos en donde se aplican los siguientes diferintegrales OLDHAM[5].

$$- \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}, \quad a \in \mathbb{R}, \ \beta \notin \mathbb{Z}^{-} \tag{27}$$

$$- \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} e^{-\lambda x} (x-a)^{\beta} = \frac{e^{-\lambda a} \Gamma(\beta+1) (x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1+\beta \\ \alpha+\beta+1 \end{matrix}; -\lambda(x-a)\right) \tag{28}$$

$\beta \notin \mathbb{Z}^{-}, \ \alpha+\beta \notin \mathbb{Z}^{-}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} (x-a)^{\beta} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix} \nu \\ \gamma \end{matrix}; -\delta(x-a)\right) = \frac{\Gamma(\beta+1) (x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \, {}_2F_2\left(\begin{matrix} \nu, \beta+1 \\ \gamma, \alpha+\beta+1 \end{matrix}; -\delta(x-a)\right)$$

$\beta \notin \mathbb{Z}^{-}, \ \gamma \notin \{\mathbb{Z}^{-} \cup 0\}, \ \alpha, \nu, \delta \in \mathbb{R}. \qquad (29)$

Con $f(x) = e^{kx}$ en (24)

$$B(x) = -(\nu+1)x^{\alpha} \ {}_0^x I^{\nu+\alpha} \ e^{-x}x^{\nu} \ {}_0^x I^{-1} \ e^{x}x^{-\nu-1} \ {}_0^x I^{-\nu-1-\alpha}\{x^{-\alpha}e^{kx}\}$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}^-$, $\nu+\alpha+1 > 0$.

De (28)

$$B(x) = -\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\nu+1)} x^{\alpha} \ {}_0^x I^{\nu+\alpha} \ e^{-x}x^{\nu} \ {}_0^x I^{-1} \ e^{x} \ {}_1F_1\left(\begin{matrix}1-\alpha\\ \nu+2\end{matrix}; kx\right)$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\}$, $\nu \notin \mathbb{Z}^- -\{-1\}$; $\nu+\alpha+1 > 0$.

Al sustituir ${}_1F_1\left(\begin{matrix}1-\alpha\\ \nu+2\end{matrix}; kx\right)$ por su desarrollo en serie, aplicar propiedad de linealidad y homogeneidad de los operadores fraccionales OLDHAM[5] y (29) tenemos:

$$B(x) = -\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\nu+1)} x^{\alpha} \ {}_0^x I^{\nu+\alpha} e^{-x}x^{\nu}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_n k^n \Gamma(n+1) x^{n+1}}{(\nu+2)_n n! \Gamma(n+2)} {}_1F_1\left(\begin{matrix}n+1\\ n+2\end{matrix}; x\right)\right]$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\}$, $\nu \notin \mathbb{Z}^- -\{-1\}$; $\nu+\alpha+1 > 0$.

Al usar transformación de Kummer ABRAMOWITZ[1,p.505], propiedades de linealidad y homogeneidad y (29) obtenemos que:

$$B(x) = -\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_n k^n \Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+2) x^{n+1}}{(\nu+2)_n n! \Gamma(n+2)\Gamma(n+2-\alpha)} {}_2F_2\left(\begin{matrix}1, \nu+n+2\\ n+2, n+2-\alpha\end{matrix}; -x\right)$$

Si sustituimos el desarrollo en serie de ${}_2F_2$ LEBVEDEV[3] y arreglamos coeficientes:

$$B(x) = -\frac{\nu+1}{1-\alpha} x \sum_{\substack{n=0\\ l=0}}^{\infty} \frac{(\nu+2)_{n+l}(1)_n(1-\alpha)_n(1)_l}{(2-\alpha)_{n+l}(2)_{n+l}(\nu+2)_n} \frac{(kx)^n}{n!} \frac{(-x)^l}{l!}$$

Al consider el desarrollo en serie de la Función Kampé de Feriét SRIVASTAVA[10]

$$F(y,z) = F^{p:q;k}_{l:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k)\\ (\alpha_l):(\beta_m);(\gamma_n)\end{matrix}; y, z\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_{r+s} \prod_{j=1}^{k} (c_j)_s \; z^s}{\prod_{j=1}^{l} (\alpha_j)_{r+s} \prod_{j=1}^{n} (\gamma_j)_s \; s!} \right] \frac{\prod_{j=1}^{q} (b_j)_r \; y^r}{\prod_{j=1}^{m} (\beta_j)_r \; r!} \tag{30}$$

la cual es convergente en:

i) $p+q < l+m+1$, $p+k < l+n+1$, $|y| < \infty$, $|z| < \infty$.

ii) $p+q = l+m+1, p+k = l+n+1$ y $\begin{cases} |x|^{1/(p-1)} + |z|^{1/(p-1)} < 1, \text{si } p>1 \\ \text{máx}\{|y|, |x|\} < 1, \text{si } p \leq 1 \end{cases}$

tenemos que:

$$B(x) = -\frac{\nu+1}{1-\alpha}\, x\, F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix} \nu+2:1,1-\alpha;1 \\ 2,2-\alpha:\nu+2 \;\;;- \end{matrix} ;\, kx,-x\right] \tag{31}$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\}$; $\nu+\alpha+1 > 0$, $\nu \notin \mathbb{Z}^{-}-\{-1\}$.

Al derivar (31) con respecto a x ,obtenemos el resultado

$$DB(x) = -\frac{\nu+1}{1-\alpha} F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix} \nu+2:1,1-\alpha;1 \\ 2,2-\alpha:\nu+2 \;\;;- \end{matrix} ;\, kx,-x\right]$$

$$-\frac{k(\nu+1)}{2(2-\alpha)}\, x\, F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix} \nu+3:2,2-\alpha;1 \\ 3,3-\alpha:\nu+3 \;\;;- \end{matrix} ;\, kx,-x\right]$$

$$+\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2(1-\alpha)(2-\alpha)}\, x\, F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix} \nu+3:1,1-\alpha;2 \\ 3,3-\alpha:\nu+2 \;\;;- \end{matrix} ;\, kx,-x\right]$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\}$, $\nu \notin \mathbb{Z}^{-}-\{-1\}$; $\nu+\alpha+1 > 0$.

Al sustituir esta última expresión y (31) en (7) se halla A(x) y con (5) tenemos:

$$\int e^{kx}\, L_\nu^\alpha(x)\, dx = \frac{x}{1-\alpha}\left[(\nu+2)L_\nu^\alpha(x) - (\nu+1)L_{\nu+1}^\alpha(x)\right]$$

$$F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}\nu+2:1,1-\alpha;1\\2,2-\alpha:\nu+2\quad;-\end{matrix};kx,-x\right] + \frac{kx^2L_\nu^\alpha(x)}{2(2-\alpha)}$$

$$F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}\nu+3:2,2-\alpha;1\\3,3-\alpha:\nu+3\quad;-\end{matrix};kx,-x\right]$$

$$-\frac{(\nu+2)x^2L_\nu^\alpha(x)}{2(1-\alpha)(2-\alpha)}F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}\nu+3:1,1-\alpha;2\\3,3-\alpha:\nu+2\quad;-\end{matrix};kx,-x\right] \tag{32}$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\},\ \nu \notin \mathbb{Z}^- - \{-1\};\ \nu+\alpha+1 > 0$

Este mismo resultado se obtiene al usar (23).

Evaluamos esta misma integral aplicando (25)

$$B(x) = -(\nu+1)e^{-x}\ \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-\nu-\alpha-1}\ e^x x^{-1-\nu}\ \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-1}\ e^{-x}x^{\nu}\ \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{\nu+\alpha}\ \{e^{(k+1)x}\},$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}^-,\ \nu+\alpha < 0.$

Por (28), la introducción de la definición en serie de la ${}_1F_1$ LEBEDEV[3] y por la aplicación de propiedad de linealidad y homogeneidad de los operadores fraccionales [5] tenemos:

$$B(x) = -\frac{\nu+1}{\Gamma(1-\nu-\alpha)}e^{-x}\ \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-\nu-\alpha-1}e^x x^{-1-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1)_m(1+k)^m}{(1-\nu-\alpha)_m\, m!}\overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-1}e^{-x}x^{m-\alpha}$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\},\ \nu+\alpha < 0.$

Al usar (28):

$$B(x) = \frac{-(\nu+1)e^{-x}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\nu-\alpha)}\ \overset{x}{\underset{0}{I}}{}^{-\nu-\alpha-1}\ e^x x^{-\alpha-\nu}\ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1)_m(1-\alpha)_m(1+k)^m x^m}{(1-\nu-\alpha)_m(2-\alpha)_m m!}$$

$${}_1F_1\left(\begin{matrix}1+m-\alpha\\2+m-\alpha\end{matrix};-x\right)$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\},\ \nu+\alpha < 0.$

Por Transformación de Kummmer, propiedades de linealidad y (29) tenemos que:

$$B(x) = \frac{-(\nu+1)e^{-x}x}{(1-\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)_m(1-\alpha)_m(k+1)^m}{(2-\alpha)_m m!(2)_m} x^m {}_2F_2\left(\begin{matrix} m+1-\nu-\alpha,1 \\ 2-\alpha+m,2+m \end{matrix}; x\right)$$

Al sustituir el desarrollo en serie de ${}_2F_2$ LEBEDEV[3] y arreglar coeficientes se deduce que:

$$B(x) = \frac{-(\nu+1)e^{-x}x}{(1-\alpha)} \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\infty} \frac{(1)_m(1-\alpha)_m(1-\alpha-\nu)_{m+n}(1)_n}{(2-\alpha)_{m+n}(2)_{m+n}(1-\alpha-\nu)_m} \frac{(k+1)^m x^m}{m!} \frac{x^n}{n!}$$

Por (30):

$$B(x) = \frac{-(\nu+1)e^{-x}x}{(1-\alpha)} F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix} 1-\nu-\alpha:1,1-\alpha;1 \\ 2,2-\alpha:1-\nu-\alpha;- \end{matrix}; (k+1)x, x\right] \qquad (33)$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\}$, $\nu+\alpha < 0$.

Al derivar respecto a x

$$DB(x) = \frac{-(\nu+1)e^{-x}(1-x)}{1-\alpha} F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix} 1-\nu-\alpha:1,1-\alpha;1 \\ 2,2-\alpha:1-\nu-\alpha;- \end{matrix}; (k+1)x, x\right]$$

$$- \frac{(k+1)(\nu+1)e^{-x}x^2}{2(2-\alpha)} F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix} 2-\nu-\alpha:2,2-\alpha;1 \\ 3,3-\alpha:2-\nu-\alpha;- \end{matrix}; (k+1)x, x\right]$$

$$- \frac{(\nu+1)(1-\nu-\alpha)e^{-x}x^2}{2(1-\alpha)(2-\alpha)} F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix} 2-\nu-\alpha:1,1-\alpha;2 \\ 3,3-\alpha:1-\nu-\alpha;- \end{matrix}; (k+1)x, x\right] \qquad (34)$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\}$, $\nu+\alpha < 0$.

Al sustituir (33) y (34) en (7) para hallar A(x), y de (5) obtenemos finalmente:

$$\int e^{kx} L^{\alpha}_{\nu}(x)\, dx = \frac{e^{-x}x}{1-\alpha} [(\nu+2-x)L^{\alpha}_{\nu}(x) - (\nu+1)L^{\alpha}_{\nu+1}(x)]$$

$$F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}1-\nu-\alpha:1,1-\alpha;1\\2,2-\alpha:1-\nu-\alpha;-\end{matrix};(k+1)x,x\right]$$

$$+\ \frac{(k+1)e^{-x}x^2}{2(2-\alpha)}\,L^{\alpha}_{\nu}(x)\ F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}2-\nu-\alpha:2,2-\alpha;1\\3,3-\alpha:2-\nu-\alpha;-\end{matrix};(k+1)x,x\right]$$

$$+\ \frac{(1-\nu-\alpha)e^{-x}x^2}{2(1-\alpha)(2-\alpha)}\,L^{\alpha}_{\nu}(x)\ F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}2-\nu-\alpha:1,1-\alpha;2\\3,3-\alpha:1-\nu-\alpha;-\end{matrix};(k+1)x,x\right] \qquad (35)$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\},\ \nu+\alpha < 0.$

Este resultado también se obtiene usando (26). Al reunir (32) y (35):

$$\int e^{kx}L^{\alpha}_{\nu}(x)\,dx =$$

$$=\begin{cases}
\dfrac{x[(\nu+2)L^{\alpha}_{\nu}(x)-(\nu+1)L^{\alpha}_{\nu+1}(x)]}{1-\alpha}\ F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}\nu+2\ :1,1-\alpha;1\\2,2-\alpha:\nu+2\ \ ;-\end{matrix};kx,-x\right]\\[2ex]
\quad+\ \dfrac{kx^2L^{\alpha}_{\nu}(x)}{2(2-\alpha)}\ F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}\nu+3:2,2\alpha;1\\3,3-\alpha:\nu+3\ ;-\end{matrix};kx,-x\right]\\[2ex]
\quad-\ \dfrac{(\nu+2)x^2L^{\alpha}_{\nu}(x)}{2(1-\alpha)(2-\alpha)}\ F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}\nu+3\ :1,1-\alpha;2\\3,3-\alpha:\ \nu+2;-\end{matrix};kx,-x\right]\\[2ex]
\nu+\alpha+1>0,\ \alpha\notin\mathbb{Z}-\{0\},\ \nu\notin\mathbb{Z}-\{-1\}\\[3ex]
\dfrac{x[(\nu+2-x)L^{\alpha}_{\nu}(x)-(\nu+1)L^{\alpha}_{\nu+1}(x)]}{1-\alpha}e^{-x}F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}1-\nu-\alpha:1,1-\alpha;1\\2,2-\alpha:1-\nu-\alpha;-\end{matrix};(k+1)x,x\right]\\[2ex]
\quad+\ \dfrac{(k+1)e^{-x}x^2}{2(2-\alpha)}\,L^{\alpha}_{\nu}(x)\ F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}2-\nu-\alpha:2,2-\alpha;1\\3,3-\alpha:2-\nu-\alpha;-\end{matrix};(k+1)x,x\right]\\[2ex]
\quad+\ \dfrac{(1-\nu-\alpha)e^{-x}x^2}{2(1-\alpha)(2-\alpha)}\,L^{\alpha}_{\nu}(x)\ F^{1:2;1}_{2:1;0}\left[\begin{matrix}2-\nu-\alpha:1,1-\alpha;2\\3,3-\alpha:1-\nu-\alpha;-\end{matrix};(k+1)x,x\right]\\[2ex]
\nu+\alpha<0,\ \alpha\notin\mathbb{Z}-\{0\}.
\end{cases} \qquad (36)$$

Un procedimiento similar se realiza para obtener otros dos resultados.

$$\int xL_{\nu}^{\alpha}(x)\ dx = \frac{x^2}{2(2-\alpha)}[(\nu+3)L_{\nu}^{\alpha}(x) - (\nu+1)L_{\nu+1}^{\alpha}(x)]\ {}_2F_2\left(\begin{matrix}1,\nu+3\\3,3-\alpha\end{matrix};-x\right)$$

$$- \frac{(\nu+3)\ x^3}{6(2-\alpha)(3-\alpha)}\ L_{\nu}^{\alpha}(x)\ {}_2F_2\left(\begin{matrix}2,\nu+4\\4,4-\nu\end{matrix};-x\right) \tag{37}$$

$\alpha \notin \mathbb{Z} - \{0,1\},\ \nu+1 > 0$

$$\int x^{-\alpha}L_{\nu}^{\alpha}(x)\ dx = \frac{x^{1-\alpha}}{(1-2\alpha)(1-\alpha)}[(2-\alpha+\nu)L_{\nu}^{\alpha}(x) - (\nu+1)L_{\nu+1}^{\alpha}(x)]$$

$${}_2F_2\left(\begin{matrix}1,\nu+2-\alpha\\2-\alpha,2-2\alpha\end{matrix};-x\right) - \frac{(\nu+\alpha-2)x^{2-\alpha}}{2(1-2\alpha)(1-\alpha)^2(2-\alpha)}\ L_{\nu}^{\alpha}(x)\ {}_2F_2\left(\begin{matrix}2,\nu+3-\alpha\\3-\alpha,3-2\alpha\end{matrix};-x\right) \tag{38}$$

$\alpha \notin \mathbb{Z}-\{0\};\ \nu+1 > 0;\ \alpha \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots.$

De los resultados (36), (37) y (38) se deducen varios casos particulares, tales como:

- Si $\nu = 0$, $k = -1$ en (36) entonces $\int e^{-x}dx = 1-e^{-x}$ al usar transformación de Kummer y además las siguientes relaciones MILLER[4], ABRAMOWITZ[1], PRUDNIKOV[6].

$$F_{q:1;0}^{p:2;1}\left[\begin{matrix}\mu_1,\ldots,\mu_p:1,\alpha;1\\ \nu_1,\ldots,\nu_q:\ \beta\ ;-\end{matrix};x,x\right] = \frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha}\ {}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}1,\mu_1,\ldots,\mu_p\\ \nu_1,\ldots,\nu_q\end{matrix};\ x\right)$$

$$+ \frac{\alpha}{1+\alpha-\beta}\ {}_{p+2}F_{q+1}\left(\begin{matrix}1,1+\alpha,\mu_1,\ldots,\mu_p\\ \beta,\nu_1,\ldots,\nu_q\end{matrix};\ x\right)$$

$${}_2F_2\left(\begin{matrix}a\ ,\ b\\a+1,b+1\end{matrix};z\right) = \frac{a}{a-b}\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}b\\b+1\end{matrix};z\right) + \frac{b}{b-a}\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\a+1\end{matrix};z\right)$$

$$\frac{d}{dz}\ {}_2F_2\left(\begin{matrix}a,b\\c,d\end{matrix};z\right) = \frac{ab}{cd}\ {}_2F_2\left(\begin{matrix}a+1,b+1\\c+1,d+1\end{matrix};z\right)$$

$$(b-1)\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\b-1\end{matrix};z\right) = (b-1)\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix};z\right) + z\frac{d}{dz}\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix};z\right)$$

$$
{}_1F_1\left(\begin{matrix}1\\m\end{matrix};z\right) = (m-1)!\,z^{1-m}\left\{e^z - \sum_{n=0}^{m-2}\frac{x^n}{n!}\right\}
$$

1,2,3,...

- Si $\nu = 0$ en (2) y (37) entonces $\int x dx = \frac{x^2}{2}$ al considerar las siguientes relaciones ABRAMOWITZ[1];

$$
(b-a)\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a-1\\b\end{matrix};z\right) = (b-a-z)\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix};z\right) + z\frac{d}{dz}\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix};z\right)
$$

$$
\frac{d}{dz}\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\b\end{matrix};z\right) = \frac{a}{b}\ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a+1\\b+1\end{matrix};z\right)
$$

para valores de $a = 1$, $b = 3-\alpha$, $z = -x$.

- Si $\nu = 0$ en (2) y (38) entonces $\int x^{-\alpha}dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, $\alpha \neq 1$ al considerar las relaciones anteriores para $a = 1$, $b = 2-2\alpha$, $z = -x$.

AGRADECIMIENTO

Este trabajo forma parte de un proyecto financiado por CONDES de la Universidad del Zulia.Agradecemos el apoyo brindado.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.(1972), *Handbook of Mathematical Functions* , Dover Publications, Inc. New York.

[2] GUERRA, J. Y KALLA, S.L.,(1990), Rev. Tec. Ing., Univ.Zulia, 13, No. 1,59-64.

[3] LEBEDEV, N.,(1972),*Special Functions and Their Applications*, Dover Publications, Inc., New York.

[4] MILLER,A R.(1990), Journal of Mathematical Analysis and Applications , 151, 428-437

[5] OLDHAM, K.B. and SPANIER, J.,(1974), *The Fractional Calculus* Academic Press, New York.

[6] PIQUETTE, J.C. and VAN BUREN, A.L.,(1984),SIAM J.Math. Anal.,15,No.4,July

[7] PRUDNIKOV, A. P., BRICHKOV J. and MARICHEV, O.,(1988), *Integrals and Series. Special Functions*,Vol.2, Gordon andand Breach Science Publishers.

[8] PRUDNIKOV, A. P., BRICHKOV J. and MARICHEV, O.,(1988) *Integrals and Series.Additional Chapters* ,Vol 3 ,Gordon and Breach Science Publishers.

[9] SAMKO, S.G., KILBAS, A.A. and MARICHEV, O.I., (1987) *Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications*, Nauha, Russia .

[10] SRIVASTAVA, H.M. and KARLSSON, P.W.,(1985),*Multiple Gaussian Hipergeometric series*, Ellis Horwold Limited, England .