Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 55-66 (1990)

CUADRATURAS SOBRE EL CIRCULO UNIDAD: ASPECTOS ALGEBRAICOS

M. Camacho; P. González-Vera; F. Pérez-Acosta

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna. TENERIFE

ABSTRACT

In this paper, interpolatory quadrature formulas on the unit circle are introduced. We generalize the results given by Jones et al. in [5] by establishing a three-term recurrence relation for the nodal polynomial.

KEYWORDS: Quadrature, Szegö polynomials, para-orthogonality, three-term recurrence relation.

1.INTRODUCCION

En general, una fórmula de cuadratura Gaussiana, que permita estimar el valor de la integral

$$\int_a^b f(t)d\psi(t)$$

siendo (a,b) un intervalo real (finito o infinito) y $\psi(t)$ una función acotada y no decreciente, tiene la forma

$$\int_a^b f(t)d\psi(t) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m^{(n)} f(t_m^{(n)}) + E_n\{f\} = I_n\{f\} + E_n\{f\}$$

Aquí $E_n\{f\}$ representa el término error, de modo que $E_n\{f\}=0$, $\forall\ f\in\Pi_{2n-1}$ (en lo que sigue Π_n denotará el espacio de los polinomios de grado menor o igual a n y $\Pi = \bigcup_{n=0}^{\infty}\Pi_n$)

Los nodos $\left\{t_n^{(n)}\right\}_{m=1}^{n}$ reales, distintos y contenidos en (a,b), Se sabe que son los ceros del n-ésimo polinomio ortogonal con respecto a $d\psi$; a la vez que los pesos $\left\{\lambda_n^{(n)}\right\}_{m=1}^{n}$ se pueden obtener a partir de la condición $E_n\{f\}=0$; $f \in \Pi_{n-1}$, de modo que si $\left\{L_{m,n}(t)\right\}$ constituyen los polinomios fundamentales de Lagrange respecto a los nodos de interpolación $\left\{t_n^{(n)}\right\}_{m=1}^{n}$, entonces se tiene:

$$\lambda_m^{(n)} = \int_a^b L_{m,n}(t)d\psi(t)$$

(Véase [1] para más detalles al respecto)

La determinación numérica de las $\{t_n^{(n)}\}$; esto es, el cálculo de las raíces de un polinomio cuyos coeficientes no se conocen, en general, de modo explícito, ha sido objeto de numerosos estudios ([2], [3]), donde la riqueza de propiedades de los polinomios ortogonales juegan un papel fundamental y en particular, la conocida relación de recurrencia a tres términos.

Nuestro interés radicará ahora en el estudio de fórmulas de cuadratura sobre el círculo unidad, esto es,

$$I_\psi\{f\} = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})d\psi(\theta) = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m^{(n)} f(\zeta_m^{(n)}) + E_n\{f\} \qquad (1.1)$$

donde ahora los nodos $\{\zeta_n^{(n)}\}$ se encuentran sobre $\Gamma = \{z: |z|=1\}$ y los pesos $\{\lambda_n^{(n)}\}$ son determinados de modo que (1.1) sea válida ($E_n\{f\}=0$) no sólo sobre subespacios de los polinomios algebraicos usuales sino sobre funciones más generales que éstos, a saber, los llamados polinomios de Laurent, dados por :

$$\sum_{j=p}^{q} \alpha_j z^j \quad ; \quad \alpha_j \in \mathbb{C} \ ; \quad p,q \in \mathbb{Z}; \quad p\leq q \qquad (1.2)$$

Ahora $\Lambda_{p,q}$ denotará el espacio de las funciones (1.2) y Λ el correspondiente espacio de todos los polinomios de Laurent (Obsérvese que $\Pi_n = \Lambda_{0,n}$).

Se dirá que $\Lambda_{p,q}$ (p y q dependientes de n) representa un "dominio de validez" para la fórmula (1.1) si $E_n\{f\} = 0;\ \forall\ f \in \Lambda_{p,q}$. En [5] se prueba que el "máximo dominio de validez" que puede alcanzar (1.1) es $\Lambda_{-(n-1),n-1}$. El objetivo de este trabajo será probar que para estas fórmulas de cuadratura -análogas en cierto modo a las de Gauss para intervalos sobre el eje real- el polinomio nodal $N_n(z) = \prod_{m=1}^{n} (z-\zeta_m^{(n)})$, satisface una relación de recurrencia a tres términos, así como otros aspectos algebraicos que vienen a completar los dados en [5]. Aquí, los polinomios de Szëgo ([6]) y el concepto de "para-ortogonalidad" ([5]) juegan un papel decisivo, tal y como se pondrá de manifiesto a continuación.

2. FORMULAS DE CUADRATURA SOBRE EL CIRCULO UNIDAD DE TIPO INTERPOLATORIO

Supuestos conocidos los nodos $\{\zeta_n^{(n)}\}$ tal que $|\zeta_n^{(n)}|=1$ $(\zeta_i \neq \zeta_j\ ;\ i\neq j)$, entonces

$$I_\psi\{f\} = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})d\psi(\theta) = I_n\{f\} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(n)} f(\zeta_j^{(n)}) \qquad (2.1)$$

para todo elemento f de $\Lambda_{-p,q}$, siendo p y q ≥ 0 y $p+q = n-1$, permite establecer n condiciones, a partir de las que es fácil comprobar algebraicamente que los pesos $\lambda_j^{(n)}$; $j=1,2,\ldots,n$ quedan unívocamente determinados,.

Por otra parte, si $R_{p,q}(z)$ representa el elemento de $\Lambda_{-p,q}$ que interpola a f en los nodos $\left\{\zeta_j^{(n)}\right\}_{j=1}^{n}$, se sabe que ([7]):

$$R_{p,q}(z) = \sum_{j=1}^{n} L_{j,n}\ f(\zeta_j^{(n)})$$

siendo $L_{j,n}(z) = \dfrac{V_n(z)}{(z-\zeta_j^{(n)})\ V'_n(\zeta_j^{(n)})}$ y $V_n(z) = z^{-p}\ N_n(z) = z^{-p} \prod_{j=1}^{n} (z-\zeta_j^{(n)})$

de modo que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} R_{p,q}(e^{i\theta})d\psi(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{-\pi}^{\pi} L_{j,n}(e^{i\theta})\, d\psi(\theta)\right] f(\zeta_j^{(n)})$$

dará lugar a una fórmula del tipo (2.1), la cual denominaremos de "tipo-interpolatorio" en $\Lambda_{-p,q}$. Es fácil comprobar el siguiente

Teorema 1

La fórmula (2.1) tiene dominio de validez $\Lambda_{-p,q}$ si y sólo si es de "tipo-interpolatorio" en dicho subespacio.

Obsérvese, que no se ha hecho ninguna hipótesis sobre los nodos $\left\{\zeta_j^{(n)}\right\}_{j=1}^{n}$, salvo que sean distintos y distribuidos sobre el círculo unidad Γ. Veamos cómo se pueden determinar éstos, a efectos que (1.1) alcance el "máximo dominio de validez" $\Lambda_{-(n-1),n-1}$. A tal propósito, si $\{f_n(z)\}$ representa la sucesión de polinomios de Szegö respecto $d\psi$ y $\{f_n^*(z)\}$ la sucesión recíproca (véase [5]), conviene precisar las siguientes observaciones:

1) Los ceros de $f_n(z)$ se encuentran todos en el interior del círculo unidad $|z| < 1$ (Véase [6]); luego éstos no se pueden tomar como nodos en (1.1).

2) Al ser $\Lambda_{-(n-1),n-1}$, el "máximo dominio de validez" (es decir, no pueden existir fórmulas (1.2) exactas en $\Lambda_{-n,n-1}$ ó $\Lambda_{-(n-1),n}$; ([5], p. 135), disponemos de 2n-1 condiciones para determinar los 2n parámetros $\{\zeta_j^{(n)}\}$ y $\{\lambda_j^{(n)}\}$ en (2.1). Esto trae como consecuencia que debamos manejar, en realidad, familias uniparamétricas de fórmulas (2.1), con "máximo dominio de validez".

Estas observaciones motivan la necesidad de acudir al concepto de "para-ortogonalidad" introducido por Jones et al. en [5]. Así, una sucesión de polinomios $\{X_n\}$ se dirá "para-ortogonal" con repecto a $d\psi$ si para cada $n \geq 0$; $X_n(z)$ es un polinomio de grado n que satisface

$$\langle X_n,1\rangle \neq 0 \ ; \ \langle X_n,z^m\rangle = 0; \ 1 \leq m \leq n-1 \ ; \ \langle X_n,z^n\rangle \neq 0$$

Otra propiedad interesante que manejaremos posteriormente es la siguiente. Si $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$, entonces el polinomio $X(z)$ se dice k-invariante si

$$X^{*}(z) = k\ X(x); \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

y una sucesión de polinomios $\{X_n(z)\}$ se dirá k_n-invariante ($k_n \neq 0$) si $X_n(z)$ es k_n-invariante para cada n.

Claramente, la sucesión de polinomios de Szegö, no puede ser "para-ortogonal"; por otra parte, ya que $|f_n(0)| \neq 1$ ([6]) se puede ver que $f_n(z)$ tampoco es k-invariante para $k \in \mathbb{C}$; $k \neq 0$ y $n \geq 0$.

Con todo, a partir de $f_n(z)$ y $f_n^{*}(z)$ podemos obtener sucesiones para-ortogonales y k_n-invariantes, sin más que considerar funciones de la forma

$$B_n(z;w_n) = f_n(z) + w_n f_n^{*}(z) \ ; \ w_n \in \mathbb{C}; \ w_n \neq 0$$

como puede comprobarse de inmediato.

La importancia de ambas definiciones queda reflejada en el siguiente teorema:

<u>Teorema 2</u>

Una fórmula de cuadratura $I_n\{f\} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(n)} f(\zeta_j^{(n)})$ sobre Γ, alcanza el "máximo dominio de validez" si y sólo si:

i) $I_n\{f\}$ es de tipo interpolatorio en $\Lambda_{-p,q}$, siendo p y q enteros no negativos arbitrarios satisfaciendo $p+q = n-1$.

ii) $N_n(z) = \prod_{j=1}^{n} (z-\zeta_j^{(n)})$ es para-ortogonal y k_n-invariante.

<u>Demostración.</u>

"$\Longrightarrow$"

i) Es trivial.

ii) Veamos, en primer lugar, que $N_n(z)$ es k_n-invariante, para $k_n \in \Gamma$. En efecto:

$$N_n^*(z) = z^n N_n(z) = z^n \prod_{j=1}^{n}\left(1/z - 1/\zeta_j^{(n)}\right) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \zeta_j^{(n)} N_n(z)$$

Por otro lado, para $1 \le m \le n-1$, ; $z^{-m} N_n(z) \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$, por consiguiente $\langle N_n, z^m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} N_n(e^{i\theta})(e^{-im\theta})d\psi(\theta) = 0$ por la fórmula de cuadratura. Resta probar que $\langle N_n, 1\rangle \neq 0$ y $\langle N_n, z^n\rangle \neq 0$.

Supongamos que $\langle N_n, 1\rangle = 0$, se tendrá entonces que

$$I_\psi(N_n) = I_n\{N_n\}$$

y la fórmula (2.1) sería válida en $\Lambda_{-(n-1),n}$ (contradicción) . De igual modo ha de ser $\langle N_n, z^n\rangle \neq 0$.

"$\Leftarrow$ "

Sea $N_n(z)$ un polinomio de grado n "para-ortogonal" y k_n-invariante. Sean $\{\zeta_j^{(n)}\}$ las raíces del mismo, las cuales (véase [5], p. 131), serán distintas y contenidas sobre Γ. Fijemos p y q enteros no negativos tal que $p+q = n-1$ y consideremos los polinomios de Laurent $L_j^{(p)}(z) \in \Lambda_{-p,q}$; $j = 1,2,\ldots,n$ y satisfaciendo $L_i^{(p)}(\zeta_j^{(n)}) = \delta_{ij}$ (Véase [7])

Esto nos permite construir una fórmula del tipo (2.1) mediante

$$I_n\{f\} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(n)} f(\zeta_j^{(n)}), \text{ donde } \lambda_j^{(n)} = I_\psi(L_j^{(p)})$$

Sea $L \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ y definamos:

$$R(z) = L(z) - \sum_{j=1}^{n} L(\zeta_j^{(n)})\, L_j^{(p)}(z)$$

entonces $R \in \Lambda_{-(n-1),n+1}$ y $R(\zeta_j^{(n)}) = 0$; $j = 1,2,\ldots n$; existirá por tanto un polinomio $S(z) \in \Pi_{n-2}$ tal que

$$R(z) = \frac{S(z)N_n(z)}{z^{n-1}}$$

Por la para-ortogonalidad de $N_n(z)$ se tiene que $I_\psi(R) = 0$ y por consiguiente

$$I_\psi(L) = I_\psi(R + \sum_{j=1}^{n} L_j^{(p)}(z)\, L(\zeta_j^{(n)})) = I_\psi(R) + \sum_{j=1}^{n} I_\psi(L_j^{(p)})\, L(\zeta_j^{(n)}) = I_n\{L\}$$

■

Comprobemos ahora que la fórmula $I_n\{f\} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(n)} f(\zeta_j^{(n)})$ no depende de la elección del entero p. Sean pues p y p' enteros no negativos con p≠p'. Para fijar ideas, supongamos p'>p; es decir p' = p+r, con 1≤r≤n-1.

Hagamos $V_n(z) = x^{-p} N_n(z)$, entonces se sabe que ([7]):

$$L_j^{(p)}(z) = \frac{V_n(z)}{(z-\zeta_j^{(n)})\, V'_n(\zeta_j^{(n)})}$$

Tomando $\overline{V}_n(z) = z^{p'} N_n(z) = z^{-r} V_n(z)$ entonces

$$L_j^{(p')}(z) = \left(\frac{\zeta_j^{(n)}}{z}\right)^r \frac{V_n(z)}{(z-\zeta_j^{(n)})\, V'_n(\zeta_j^{(n)})} \tag{2.2}$$

Deseamos probar que $\lambda_j^{(n)} = I_\psi(L_j^{(p)}) = I_\psi(L_j^{(p')})$

Para ello hagamos

$$\frac{1}{z-\zeta_j^{(n)}} = -\left[\frac{1}{\zeta_j^{(n)}} + \frac{z}{[\zeta_j^{(n)}]^2} + \ldots + \frac{z^{r-1}}{[\zeta_j^{(n)}]^r}\right] + \left(\frac{z}{\zeta_j^{(n)}}\right)^r \frac{1}{z-\zeta_j^{(n)}} \tag{2.3}$$

. De (2.2), (2.3) y teniendo en cuenta la para-ortogonalidad de $N_n(z)$ se concluye lo deseado.

Esta es la razón por la cual, en [5] se toma tan solo el caso particular p=0 (q=n-1) y por tanto $\Lambda_{-p,q} = \Lambda_{0,n-1} = \Pi_{n-1}$, es decir, el proceso de interpolación en el Teorema 2, se lleva a cabo en el subespacio de los polinomios usuales de grado menor o igual a n-1 y no se consideran polinomios de Laurent.

3. RELACION DE RECURRENCIA A TRES TERMINOS

Como se ha visto en la sección 2, el polinomio nodal $N_n(z)$ para una fórmula de cuadratura del tipo (2.1) sobre el círculo unidad con "máximo dominio de validez", ha de ser para-ortogonal y k_n-invariante. Nuestro objetivo será probar que dada una sucesión de polinomios con estas características satisface una relación de recurrencia a tres términos. Como consecuencia de [5] p. 130, el polinomio nodal $N_n(z)$, admitirá la siguiente expresión

$$N_n(z) = c_n(f_n(z) + w_n f_n^*(z)) \ ; \ c_n \neq 0 \quad y \quad |w_n| = 1$$

Hagamos $X_n(z) = \lambda_n N_n(z)$, siendo $\lambda_n \neq 0$ arbitrario; obviamente $X_n(z)$ será también para-ortognal, teniéndose además

$$X_n^*(z) = [\lambda_n N_n(z)]^* = \bar{\lambda}_n N_n^*(z) = \bar{\lambda}_n k_n N_n(z) = k'_n X_n(z), \text{ donde } k'_n = \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} k_n$$

Dada la arbitrariedad de λ_n; podemos elegir este parámetro de modo que $k'_n = 1$; resultando:

$$X_n(z) = X_n^*(z)$$

teniendo dicho polinomio $X_n(z)$ los mismos ceros que $N_n(z)$. De nuevo, tendremos

$$X_n(z) = c'_n(f_n(z) + w'_n f_n^*(z)); \ c'_n \neq 0 \ ; \ |w'_n| = 1$$

por consiguiente:

$$X_n^*(z) = \bar{c}'_n(f_n^*(z) + \bar{w}'_n f_n(z)) = X_n(z)$$

Comparando coeficientes, obtenemos:

$$c'_n = c'_n w'_n \text{ luego } w'_n = \frac{\bar{c}'_n}{c'_n}$$

es decir, $X_n(z)$ será de la forma:

$$X_n(z) = c'_n f_n(z) + \bar{c}'_n f_n^*(z) \text{ con } c'_n \neq 0$$

En lo que sigue, supondremos $c'_n = \lambda \neq 0$; $n = 0,1,\ldots$ y consideramos la sucesión de polinomios:

$$p_k(z) = \lambda\, f_k(z) + \bar{\lambda}\, f_k^*(z) \qquad (3.1)$$

Estamos ahora en condiciones de enunciar el principal resultado de esta sección:

Teorema 3

Sea $\{p_k(z)\}$ la sucesión dada por (3.1) de modo que $Re(\lambda\ p_k(1)) \neq 0$, siendo $\lambda \neq 0$, entonces para $k = 1,2,\ldots$

$$p_{k+1}(z) = (\alpha_k + z\,\overline{\alpha}_k)p_k(z) + \gamma_k\, z\, p_{k-1}(z)$$

donde

$$\alpha_k = \frac{\lambda\, S_{k+1} + \overline{\lambda}}{\lambda\, S_k + \overline{\lambda}} \qquad \text{y} \qquad \gamma_k = \frac{Re(\lambda\mu_{k+1}) - Re(\alpha_k)\, Re(\lambda\mu_k)}{Re(\lambda\mu_{k-1})}$$

donde la sucesión $\{\mu_k\}$ viene dada por

$$\mu_k = \mu_{k-1} + S_k\, \overline{\mu}_{k-1}\ ;\ \mu_0 = 1$$

siendo $S_0 = \int_{-\pi}^{\pi} d\psi(\theta)$ y $S_n = f_n(0)$; $n = 1,2,\ldots$

Demostración.

De las conocidas relaciones de recurrencia que satisfacen los polinomios de Szegö y sus recíprocos, resulta fácil comprobar que los polinomios $p_k(z)$, $p_{k+1}(z)$, $z\ p_k(z)$ y $p_{k-1}(z)$ son linealmente dependientes, por tanto podremos escribir:

$$p_{k+1}(z) = (\ \alpha_k + z\,\beta_k)\ p_k(z) + \gamma_k\ z\ p_{k-1}(z);\ k = 1,2,\ldots \qquad (3.2)$$

para $z = 0$ deducimos que $p_{k+1}(0) = \alpha_k\ p_k(0)$, luego $\alpha_k = \dfrac{p_{k+1}(0)}{p_k(0)}$

Pero de (3.1), $p_k(0) = \lambda\ f_k(z) + \overline{\lambda}\ f_k^*(z)\ ;\ k = 1,2,\ldots$

Ahora bien, al ser $f_k(z)$ mónico, entonces $f_k^*(0) = 1$, quedando

$$p_k(0) = \lambda\ S_k + \overline{\lambda}$$

Además, $p_k(0) \neq 0$, pues en caso contrario $S_k = -\lambda/\lambda$, es decir $|S_k| = 1$ contradiciendo la conocida propiedad de que $1 - |S_k|^2 \neq 0$.

Por otra parte, comparando los coeficientes de los términos de mayor grado en ambos miembros de la relación (3.2), se obtiene:

$$\lambda + \overline{\lambda}\ \overline{S}_{k+1} = \beta_k(\lambda + \overline{\lambda}\ \overline{S}_k)$$

es decir

$$\beta_k = \frac{\lambda + \bar{\lambda}\,\bar{S}_{k+1}}{\lambda + \bar{\lambda}\,\bar{S}_k} = \bar{\alpha}_k \ ; \ k = 1,2,\ldots$$

Finalmente, haciendo $z = 1$ en (3.3) resultará

$$p_{k+1}(1) = (\ \alpha_k + \bar{\alpha}_k)\ p_k(1) + \gamma_k\ p_{k-1}(1)$$

Pero $p_k(1) = \lambda\ f_k(1) + \bar{\lambda}\ f_k^*(1) = \lambda f_k(1) + \bar{\lambda}\ \bar{f}_k(1) = 2\ \mathrm{Re}(\lambda\ f_k(1)) \neq 0$ (por hipótesis); así tendremos:

$$\gamma_k = \frac{\mathrm{Re}(\lambda f_{k+1}(1)) - 2\ \mathrm{Re}(\alpha_k)\ \mathrm{Re}(\lambda f_k(1))}{\mathrm{Re}(\lambda f_{k-1}(1))}$$

Haciendo $\mu_k = f_k(1)$ y teniendo en cuenta [5], p. 120,

$$\mu_k = \mu_k + S_k\ \bar{\mu}_{k-1},\ \text{con}\ \mu_0 = f_0(1) = 1$$

Con ésto queda completada la prueba del Teorema. ∎

Dado que los parámetros α_k también quedan definidos para $k = 0$, si tomamos $p_{-1} = 0$ vemos que la relación (3.2) también sigue siendo válida para $k = 0$.

Definamos ahora para cualquier entero k, $k \geq 0$ la matriz tridiagonal

$$J_k(z) = \begin{bmatrix} \alpha_0+\alpha_0 z & -\gamma_1 z & & 0 \\ 1 & \alpha_1+\alpha_1 z & -\gamma_2 z & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & & -\gamma_k z \\ & & 1 & \alpha_k+\bar{\alpha}_k z \end{bmatrix}$$

Computando el determinante de $J_k(z)$, por la regla de Laplace obtenemos la siguiente relación a tres términos

$$\det|J_k(z)| = (\alpha_k + \bar{\alpha}_k)\ \det|J_{k-1}(z)| - z\ \gamma_k\ \det|J_{k-2}(z)|$$

si imponemos las condiciones iniciales $\det|J_{-1}(z)| = p_0(z)$ y $\det|J_{-2}(z)|=0$, entonces del Teorema 3 establecemos:

Corolario 1

Para $k = 0,1,\ldots$; $p_k(z) = \det|J_{k-1}(z)|$, con las condiciones iniciales anteriores para $k = 0$, $k = -1$.

Introduzcamos ahora las matrices

$$A_k = \begin{bmatrix} \alpha_0 & & & & \\ 1 & \alpha_1 & & 0 & \\ & 1 & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \\ & & & 1 & \alpha_k \end{bmatrix} \quad k = 0,1\ldots$$

$$B_k = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_0 & -\gamma_1 & & & \\ & \bar{\alpha}_1 & -\gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \\ & 0 & & \bar{\alpha}_{k-1} & -\gamma_k \\ & & & & \bar{\alpha}_k \end{bmatrix}, \quad k = 0,1\ldots$$

se cumple que

$$J_k(z) = A_k + z\,B_k \qquad (3.3)$$

Dado que $\alpha_k \neq 0$; $k = 0,1,\ldots$ entonces $\det|A_k| \neq 0$ y $\det|B_k| \neq 0$

De (3.3) si $z \neq 0$, entonces $\det|J_k(z)| = 0$ si y sólo si

$$\det|A^{-1}_k\, B_k + z^{-1}\, I| = 0 \qquad (3.4)$$

Por (3.4) y el Corolario 1, tenemos

Corolario 2

Sean $\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \ldots$ los nodos de una fórmula de cuadratura sobre Γ con "máximo dominio de validez", entonces $-\dfrac{1}{\zeta_i^{(n)}} = -\bar{\zeta}_i^{(n)}$; $i = 1,2,\ldots$

son los autovalores de la matriz

$$A^{-1}_{n-1}B_{n-1}; \quad n = 1,2,\ldots \qquad (3.5)$$

Vemos pues que hemos reducido el problema de determinar los nodos de una fórmula de cuadratura a la estimación de los autovalores de las matrices especiales dada por la forma (3.5).

AGRADECIMIENTOS: Los autores desean manifestar su más profunda gratitud al Profesor Olav Njastad de la Universidad de Trondheim (Noruega), quien durante su visita a esta Universidad contribuyó con sus acertadas sugerencias y comentarios en la preparación final de este artículo.

REFERENCIAS

[1] **V.I. KRYLOV** *Approximate Calculation of Integrals.* MacMillan. New York(1962)

[2] **W. GAUTSCHI** *Construction of Gauss Christoffel quadrature formulas.* Math. Comp. 22 (1968) pp. 251-270.

[3] **W. GAUTSCHI** *On the construction of Gaussian quadrature rules from mo fied moments.* Math. Comp. 24 (1970) pp. 245-260.

[4] **G.H. GOLUB; J.H.WELSCH** *Calculation of Gauss quadrature rules.* Math. Comp. 23 (1969) pp. 221-230.

[5] **W.B. JONES; O. NJASTAD; W.J. THRON** *Moment Theory , Orthogonal polynomials, Quadrature and Continued Fractions associated with the unit circle.* Bull. London Math. Soc. 21 (1989). pp. 113-152.

[6] **Y.L. GERONIMUS** *Polynomials Orthogonal on a circle and their applications.* Amer. Math. Soc. Trans. 104, Providence, R.I. (1954).

[7] **P. GONZALEZ-VERA** *Two point PadéType Approximants. A new algebraic approach.* Publication A.N.O. Universitè de Lille (France) (1986). n° 110.