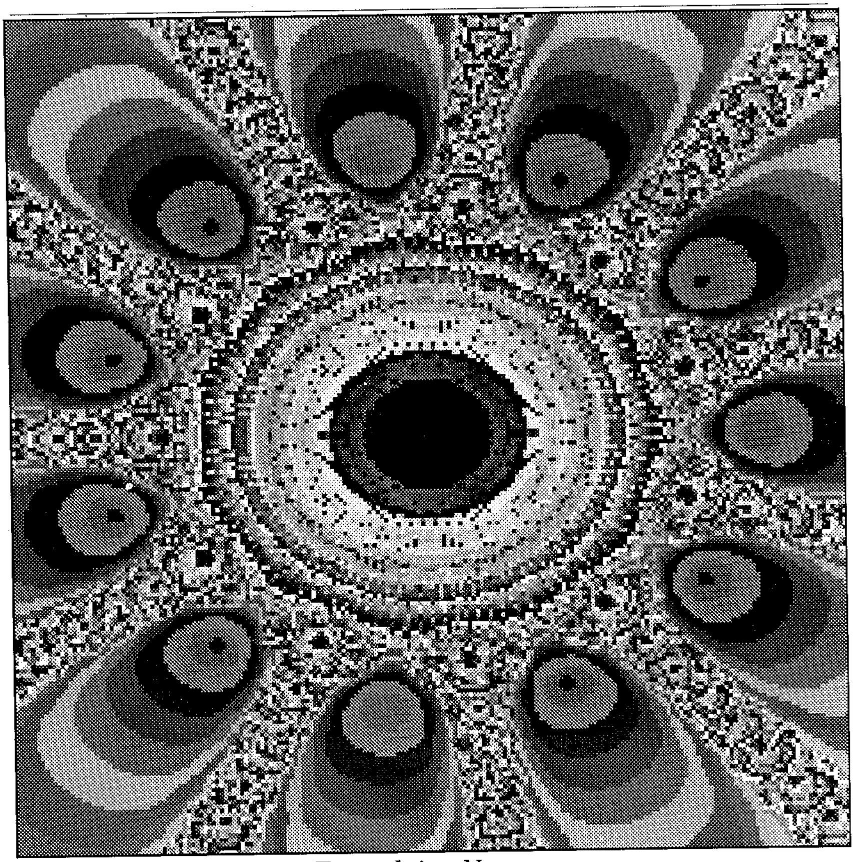
LA ENSEÑANZA DE LOS FRACTALES

Margarita Marín Rodríguez

"En los primeros dibujos de la curva fractal habrá pocos indicios que permitan conocer la estructura matemática subyacente. (IAN MALCOM)"

Ian Malcom es un personaje de ficción, matemático moderno, más parecido por su atuendo a un cantante de rock que a la figura clásica característica; su mundo irreal es "Parque Jurásico", novela/película tan de moda recientemente, en donde tiene uno de los papeles protagonistas, lo que lleva a preguntarnos: ¿un matemático, con su lenguaje, en una novela?, y ¿cómo es eso?. Mi respuesta personal después de haber leído la novela es: fractales y caos, por su belleza y utilización práctica, han conseguido popularizar las matemáticas más que ninguna de sus otras teorías.

Presursores de los fractales los encontramos a finales del siglo XIX con la aparición de unos "monstruos geométricos", de propiedades sorprendentes, como curvas de longitud infinita en una región acotada del plano (curva de Koch), pero tendremos que esperar a la década de los setenta, ya en pleno siglo XX, para que un matemático, Benoît Mandelbrot, con la ayuda imprescindible de los ordenadores, divulgue estos entes los bautice con el nombre de fractales y, sobre todo, sea capaz de ver sus aplicaciones prácticas consistentes en presentar modelos para analizar y estudiar ciertos fenómenos de la naturaleza. Surge la **Geometría fractal**, o Geometría de la Naturaleza, parcela de las matemáticas que todavía no tiene muy claros sus límites reales.



Fractal tipo Newton

Tampoco existe una definición unánime para el ente fractal; podríamos caracterizarlos por su forma de obtención, diciendo que un fractal es el resultado final que se obtiene de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado. Este proceso geométrico suele ser de naturaleza muy simple, mientras que el producto final es de una gran complejidad, de hecho, un fractal consta de fragmentos geométricos de orientación y tamaño variables, pero de aspecto similar, resaltando en él dos características: su dimensión fraccionaria y su autosimilitud.

Cualquiera que haya visto un fractal lo recordará siempre, pues suelen ser de una belleza asombrosa y cautivante. Este hecho y la realidad de que para su descripción, construcción y exploración se requiere muy poca información, me indujeron a pensar en la posibilidad de introducir la teoría fractal en nuestras clases, con el objetivo fundamental de provocar en los alumnos un cambio de actitud hacia la asignatura maldita. Si nos decantamos por dicha opción, surgen inmediatamente las típicas preguntas: por qué su entrada en las aulas, a qué niveles, qué objetivos y contenidos concretos y cómo realizar la puesta a punto. Las respuestas a las mismas son las recogidas en este artículo y narradas a continuación.

Por qué su entrada en las aulas?.-

Bajo mi punto de vista, razones didácticas fuertes que aconsejarían incluirlo dentro del bagaje matemático de los estudiantes son las siguientes:

a) Los propios contenidos de la teoría fractal, que nos permiten asistir al nacimiento de un nuevo objeto matemático y todas las controversias que ello despierta, así como comprobar fehacientemente que las matemáticas son un cuerpo de conocimientos en evolución.

b) Los contenidos didácticos que conlleva, ya que el grado de motivación y actitud positiva hacia la matemática resultan altamente favorecidos, permitiéndonos, además, poner en práctica con nuestros alumnos un aprendizaje por descubrimiento guiado.

c) Sus implicaciones tecnológicas, usando un software adecuado para realizar una investigación en matemáticas y comprobar la eficacia del correo electrónico en las relaciones entre estudiosos del mismo tema.

¿A qué niveles?.-

En cuanto a los niveles, si seguimos la sugerencia de Ortega y Gasset: "*Búsquese en el extranjero información, pero no el modelo*", obtenemos que en países europeos, como Dinamarca, forman parte de los últimos cursos de Secundaria, y en EE.UU. se trabajan en al Escuela Superior. Por lo que podemos pensar la posibilidad de introducirlos en el último año de E.S.O., Bachillerato y en las Escuelas de Magisterio, ya que en bastantes facultades de Matemáticas y Escuelas Superiores son una asignatura más.

¿Qué objetivos?.-

Respecto a los objetivos a lograr con los mismos, podemos examinarlos desde dos vertientes:

Cognitiva:

. Desarrollar procesos propios del pensamiento matemático.
. Conocer la evolución de los objetos matemáticos.
. Analizar y sopesar las bases de una nueva teoría.
. Analizar las implicaciones del uso del ordenador en la forma del trabajo matemático.
. Adquirir los conocimientos mínimos para comprender la teoría de fractales y aplicarlo a la comprensión de la lectura de cualquier artículo sobre el tema en revistas científicas.
. Desarrollar un vocabulario adecuado al mismo.

Actitudinal:

. Desarrollar una actitud positiva hacia las matemáticas, disfrutando con ellas.
. Favorecer el trabajo en pequeño grupo.
. Favorecer la comunicación en pequeño y gran grupo.
. Favorecer en los alumnos la confianza en sus propias capacidades para trabajar la matemática.

¿Qué contenidos?.-

Los contenidos matemáticos son muy elementales y algunos nos sirven de repaso de conceptos ya estudiados. Considero imprescindible el análisis del término fractal, qué significa y qué objetos matemáticos engloba, cómo quedan caracterizados por su dimensión fraccionaria (dimensión de Hausdorff) y qué aplicaciones tienen en la descripción de la naturaleza. Igualmente haremos un breve recorrido por su historia, desde finales del XIX a nuestros días con los nombres más significativos de la misma. Esta explicación conlleva además las nociones de iteración, sistemas dinámicos y el concepto de número complejo, para poder estudiar tres tipos de fractales concretos: los de julia, mandelbrot y newton.

Metodología.-

La pregunta clave, en mi opinión, es "cómo lo vamos a hacer", y como respuesta diremos que el tratamiento de dichos contenidos puede realizarse en dos partes con dos metodologías claramente diferenciadas:

1ª Contenidos teóricos previos básicos explicados en gran grupo, siguiendo un aprendizaje significativo por recepción.

2ª Investigación y aplicación de dichos contenidos en el aula de informática siguiendo una estructura de laboratorio y provocando un aprendizaje por descubrimiento guiado.

La investigación y aplicación de los contenidos explicados se realiza en el aula de informática con el programa FRACTINT v. 18.0; este lógical nos permite el análisis y estudio de fractales y familias de los mismos, aunque centraremos su análisis en los tres ya nombrados, clásicos a estas alturas.

La estrategia didáctica de enseñanza que proponemos en la explicación de la 1ª parte es la siguiente:

1. **Motivación al tema** utilizando el artículo "*Cómo descubrí los fractales*" de Benoît Mandelbrot; lectura del mismo en pequeños grupos y puesta en común en gran grupo sobre una serie de preguntas preparadas.
2. **Explicación en gran grupo** de los contenidos arriba expresados por parte del profesor.
3. **Trabajo en grupos** con ejemplares del libro "*Les fractals*" para obtener la dimensión fractal.
4. **Puesta en común y resumen de las ideas de esta primera parte**.

Y en el aula de informática seguimos la estrategia correspondiente a un aula/taller tan bien descrito por Alsina et al. (1988):

1. **Introducción** al tema a tratar y medios tecnológicos con los que trabajar, facilitándoles un pequeño manual del programa FRACTINT para uso del equipo de trabajo, que es obligatoriamente de 2 a 3 personas por ordenador.
2. **Presentación de las investigaciones** a realizar con el FRACTINT, facilitadas en unas fichas de trabajo, recogida como modelo una de ellas al final del artículo.

3. **Discusión y contraste en gran grupo** sobre los distintos descubrimientos realizados.
4. **Aplicación** de lo aprendido analizando por su cuenta los fractales que les llamen la atención en el programa.

Como uno de los objetivos fundamentales con este tema es provocar un cambio de actitud en los alumnos hacia las matemáticas, atrayéndoles a su estudio por la belleza y misterio de estos entes, así como la consecución de su autoafirmación en el estudio de las mismas, muy fácil de conseguir con el uso de este programa abierto, creo que la evaluación del mismo debería centrarse más en la percepción de este añorado cambio de actitud que en la adquisición real de los conceptos matemáticos.

Para finalizar, me gustaría invitar a todos aquellos profesores interesados en el tema y con posibilidad de introducirlo en sus aulas, a un intercambio, vía correo electrónico, sobre nuestros éxitos, fracasos, anécdotas, etc., pues estoy convencida de que este tema puede resultar revolucionario para nuestros alumnos.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA, C. et al. (1988); *Materiales para construir la Geometría*; Síntesis, Madrid.
BARRALLO, J. (1992); *Geometría fractal. Algorítmica y representación*; Anaya Multimedia, Madrid.
CRICHTON, M. (1993); *Jurassic Park (Parque Jurásico)*; Plaza & Janés, Barcelona.
FERNÁNDEZ, F.; PACHECO, J.M. (1991); *Valor matemático elemental de los fractales*; SUMA, nº 9, pp 4-10.
GUZMÁN, M. de et al. (1993); *Estructuras fractales y sus aplicaciones*; Labor, Barcelona.
LESORT, M. (1986); *Cómo descubrí los fractales. Entrevista con Benoît Mandelbrot*; Mundo Científico, nº 58, pp 576-580.
MANDELBROT, B. (1987); *Los objetos fractales*; Tusquets, Barcelona.
STEWART, I. (1982); *Les fractals*; Belin, París.
- (1991); *¿Juega Dios a los dados?*; Crítica, Barcelona.
WEGNER, T. y otro (1991); *Fractal creations*; Waite Group Press, USA.
Libro escrito por los autores del

programa FRACTINT donde explican con todo rigor matemático las funciones y los métodos de iteración empleados para generar fractales en el programa. El programa FRACTINT en la v. 18.0 puede conseguirse en el sistema telemático CLAVIUS, Base de Datos Educacional, en Madrid. Tfno. voz 91 - 3112372 y modem 91 - 3112371.

ANEXO

MODELO DE FICHA DE TALLER
FICHA DE TRABAJO:
FRACTAL TIPO JULIA

Descripción.-

Así llamados en honor al matemático francés Gaston Julia que los estudió a principios de siglo.

Conjunto de Julia de una polinomial es la frontera del conjunto de puntos que escapan al infinito tras un número suficientemente grande de iteraciones.

Esto significa que la órbita de un punto del conjunto de Julia NO escapa a infinito, pero arbitrariamente cerca de éste existen puntos cuyas órbitas sí lo hacen.

Trabajamos siempre con la función $f(z) = z^2 + C$ siendo tanto z como C números complejos. Podemos dibujar conjuntos de Julia para cualquier valor de C, aunque sólo aquellos que cumplan $C \leq 2$ ofrecen resultados interesantes.

Arranca el FRACTINT, elige el tipo julia y selecciona todo por defecto. Observa la figura que obtienes, pon en marcha el zoom y analiza diversas partes de la misma.

EXPERIMENTA por tu cuenta:

a) Analiza con el FRACTINT los gráficos obtenidos para los siguientes valores de C:

$C = -0.3 - 0.4\,i$
$C = -1 + 0\,i$
$C = 0.36 + 0.1\,i$
$C = -0.48 - 0.53\,i$
$C = -0.8 + 0.4\,i$
$C = 0.5 + 0\,i$
$C = -1.5 + 0\,i$
$C = 1 + 1\,i$

b) Los mismos valores con el tipo **julia_inverse** del FRACTINT. Lo que saldrá ahora en pantalla es el auténtico julia sin relleno como en el caso anterior.

Observa que en función del parámetro obtienes conjuntos de Julia de una sola pieza (conexos) o de múltiples piezas (inconexos), ya que, debido a la autosemejanza interna, si un conjunto de Julia no es conexo, entonces está formado por infinitos fragmentos.

c) Graba una de las imágenes a .GIF

d) Representa dicha imagen grabada en 3D

e) Si dispones de una impresora, imprime esa imagen.

f) Realiza el tratamiento adecuado de la imagen en .GIF para poderla incorporar a un documento en WordPerfect.

g) Compara tus experiencias con otros entusiastas a través del correo electrónico. Igualmente si has obtenido una imagen bonita y novedosa con un parámetro personal, envíala al sistema en un upload para compartir con los demás.