Recibido: martes, 06 noviembre 2007

pasatiempos ::

matematicalia

revista digital de divulgación matemática

Vol. 3, no. 3 (jun. 2007)

¿Qué pasaría si... (*)

Pinche sobre una fórmula para ampliarla. Vuelva a pinchar sobre ella para reducirla, o pinche manteniendo pulsada la tecla [shift] para reducir todas las que permanezcan ampliadas.

...nos preguntáramos si habrá un número menor que 2 que también sea estrictamente mayor que todos los números a_n en nuestra “torre exponencial” de abril? ¿Existirá tal número?

[La solución, en el próximo número]

Solución al problema anterior

...construyéramos una “torre exponencial”

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

de la siguiente manera? El primer número es $a_1 = \sqrt{2}$; el segundo número es $a_2 = \sqrt{2}^{a_1}$; el tercer número es $a_3 = \sqrt{2}^{a_2}$; en general,

$$a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}.$$

¿Cuán grandes se hacen estos números a medida que n crece?

Respuesta: Para todo n, a_n es estrictamente menor que 2.

Para entender esta respuesta, es bueno que comencemos por ver qué valores toman estos números a_n. Una calculadora nos lo puede decir aproximadamente:

$a_1 = \sqrt{2} \simeq 1,41421$	$a_2 \simeq 1,63253$	$a_3 \simeq 1,76084$	$a_4 \simeq 1,84091$	$a_5 \simeq 1,89271$	$a_6 \simeq 1,927$
$a_7 \simeq 1,95003$	$a_8 \simeq 1,96566$	$a_9 \simeq 1,97634$	$a_{10} \simeq 1,98367$	$a_{11} \simeq 1,98871$	$a_{12} \simeq 1,99219$
$a_{13} \simeq 1,99459$	$a_{14} \simeq 1,99625$	$a_{15} \simeq 1,9974$	$a_{16} \simeq 1,9982$	$a_{17} \simeq 1,99875$	$a_{18} \simeq 1,99913$
$a_{19} \simeq 1,9994$	$a_{20} \simeq 1,99958$	$a_{21} \simeq 1,99971$	$a_{22} \simeq 1,9998$	$a_{23} \simeq 1,99986$	$a_{24} \simeq 1,9999$
$a_{25} \simeq 1,99993$	$a_{26} \simeq 1,99995$	$a_{27} \simeq 1,99997$	$a_{28} \simeq 1,99998$	$a_{29} \simeq 1,99999$	$a_{30} \simeq 1,99999$
$a_{31} \simeq 1,99999$	...				

De acuerdo con esta lista, los números a_n parecen crecer más y más lentamente, empezando con el valor $\sqrt{2}$, y parecen aproximarse a 2. La calculadora ha sido muy útil al darnos esta información. Pero ¿cómo podemos estar seguros de que los a_n nunca llegan a 2 o lo sobrepasan? Ni la calculadora ni el ordenador más poderoso nos van a dar la respuesta, pues sin importar la cantidad de valores que comprobemos, siempre nos quedará un número infinito de casos. Es necesario entonces que probemos matemáticamente que $a_n < 2$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ Para ello usaremos un método de prueba que se llama *Principio de Inducción*, y que dice lo siguiente:

Supongamos tener un enunciado que depende de un parámetro n que toma todos los valores $1, 2, 3, \ldots$. En nuestro caso, el enunciado es "$a_n < 2$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$". Llamemos $P(n)$ a este enunciado. Si podemos probar la veracidad de las siguientes dos afirmaciones:

1) $P(1)$ se cumple;
2) si $P(n)$ se cumple, también $P(n+1)$ se cumple para cualquier n,

entonces el enunciado $P(n)$ se cumple para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Veamos que en nuestro caso estas dos afirmaciones son ciertas.

La afirmación $P(1)$ dice que $a_1 < 2$. Esto es claramente cierto porque $a_1 = \sqrt{2}$.

Supongamos ahora que para un n fijo indeterminado, $a_n < 2$. Tenemos que probar que también $a_{n+1} < 2$.
Recordemos que, por definición, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$. Usando nuestra suposición sobre a_n, podemos decir que $\sqrt{2}^{a_n} < \sqrt{2}^2 = 2$. O sea, $a_{n+1} < 2$.

Como hemos comprobado que las dos afirmaciones son ciertas, el Principio de Inducción nos permite concluir que $a_n < 2$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Una pregunta muy natural es ¿por qué el Principio de Inducción es verdad? No me voy a meter en camisa de demasiadas varas intentando dar una respuesta rigurosa. La puedes ver, con ejemplos y comentarios, en el artículo http://mate.dm.uba.ar/~spuddu/inducc.pdf.

Una explicación intuitiva de por qué este principio funciona es la siguiente: ¿cómo podrías convencerte de que eres capaz de subir las escaleras de un edificio de muchísimos pisos? Pues podrías decirte que puedes subir al primer piso, y que desde cada uno de los pisos puedes subir al siguiente.

Por cierto, esta analogía se puede aplicar a nuestra "torre exponencial", que podemos pensar como un edificio infinitamente alto, donde cada nueva potencia es otro piso.

Podríamos terminar aquí con la torre, pero como dicen que los matemáticos no sabemos parar, aquí os dejo con el próximo *¿Qué pasaría si ...?* que habéis visto al tope de esta página: ¿habrá un número menor que 2 que también sea estrictamente mayor que todos los números a_n... Ya veremos qué pasa...

Sobre la autora

Josefina (Lolina) Álvarez es Professor of Mathematics en New Mexico State University (USA). Especialista en análisis armónico y funcional, se doctoró en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires (Argentina), bajo la dirección de A.P. Calderón. Ha ocupado diversos puestos y cargos académicos en la Universidad de Buenos Aires y en las estadounidenses de Princeton, Chicago, Florida Atlantic University y New Mexico. Ha sido investigadora del CONICET (Argentina). Miembro de la Unión Matemática Argentina, Mathematical Association of America y American Mathematical Society, formó parte del *Committee on Committees* de esta última entre 1999 y 2002. Ha dictado numerosas conferencias en congresos y sesiones especiales e impartido seminarios en Alemania, Argentina, Bélgica, Brasil, Canadá, Colombia, España, Estados Unidos, México, Perú, Polonia, Suecia y Venezuela. Ha pertenecido y en varias ocasiones presidido los comités organizadores de distintos congresos y minisimposia. Ha ejercido como evaluadora para prestigiosas revistas especializadas. Desde 2002 hasta 2007 ha sido Editora Asociada del *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. Autora o coautora de numerosos artículos científicos y varias monografías en análisis armónico y funcional y directora de cinco tesis doctorales, ha desarrollado asimismo una intensa actividad en el campo de la educación matemática, habiendo recibido diversos galardones a la excelencia docente.

matematicalia
revista digital de divulgación matemática

(*) Sección a cargo de Josefina Álvarez.