Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 261-270 (1990)

ALGUNAS PROPIEDADES DE CURVATURA DE VARIEDADES LOCALMENTE CONFORME CO-KAHLER

J.C. Marrero

Departamento de Matemática Fundamental, Universidad de la Laguna.

Canary Island-Spain.

ABSTRACT

Curvature properties of locally conformal co-Kähler manifolds are investigated.

KEY WORDS: Co-Kähler, conformal changes, curvature.

INTRODUCCION

Una variedad casi hermítica M^{2n} es llamada localmente conforme Kähler si su métrica está conformemente relacionada con una métrica Kähler en algún entorno de cada punto de M^{2n}. Tales variedades y ejemplos de las mismas han sido estudiadas por varios autores (ver (1), (2), (3), (4) y (5)).

En (3), Vaisman estudia la influencia de ciertas relaciones de curvatura (ver (6)) en la geometría de las variedades localmente conforme Kähler y describe la distribución Kähler nullity en dichas variedades.

Por otra parte, si M^{2n+1} es una variedad diferenciable con una estructura casi contacto métrica (φ,ξ,η,g), un cambio conforme de la métrica g da una métrica la cual, en general, no es compatible con la estructura casi contacto (φ,ξ,η). Esto puede ser corregido con un conveniente cambio de ξ y η el cual no implica restricciones fuertes. Tal definición es dada por Vaisman en (7). Posteriormente, y como continuación del trabajo de Vaisman, en (8), (9) y (10) los autores profundizan en el estudio de los cambios conformes sobre variedades casi contacto.

El proposito de este trabajo es estudiar algunos aspectos de la curvatura de variedades localmente conforme co-Kähler. En la sección 1, damos algunos resultados sobre variedades casi hermíticas y casi contacto métricas. En la sección 2, se define y se estudia la distribución co-Kähler nullity sobre una variedad localmente conforme Kähler (ver teorema 2.1). Esta distribución juega el mismo papel, en cierto sentido y en el contexto de las variedades casi contacto métricas, que la distribución Kähler nullity en el contexto de las variedades casi hermíticas (ver proposiciones 2.1 y 2.2). Finalmente, en la sección 3, estudiamos la influencia de ciertas relaciones de curvatura sobre una variedad localmente conforme co-Kähler. Particularmente probamos que, bajo algunas condiciones, estas relaciones pueden caracterizar a las variedades co-Kähler en la clase de las variedades localmente conforme co-Kähler.

PRELIMINARES

Sea V una variedad diferenciable casi hermítica con métrica h y estructura casi compleja J. Para cada x de V, se llama espacio Kähler nullity en el punto x al subespacio del espacio tangente a V en x, T_xV, dado por

$$K(x) = \{u\in T_xV \ / \ (\nabla_u J)v = 0, \text{ para todo } v \text{ de } T_xV\}$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de h.

En cada subconjunto abierto de V en el cual la dimensión de K(x) sea constante la aplicación $x \longrightarrow K(x)$ define una distribución que se denomina distribución Kähler nullity.

Denotamos por $\mathfrak{X}(V)$ el álgebra de Lie de los campos de vectores sobre V. La forma de Kähler Ω es dada por $\Omega(X,Y)=h(X,JY)$ y la forma de Lee es la 1-forma θ definida por $\theta(X) = 1/(n-1)\ \delta\Omega(JX)$, donde δ es el operador coderivada, $\dim V = 2n$ y $X,Y\in\mathfrak{X}(V)$. La variedad V se dice Kähler si $d\Omega = 0$ y $N_J = 0$ y localmente conforme Kähler si $d\Omega = \theta\wedge\Omega$ y $N_J = 0$, siendo N_J el tensor de Nijenhuis de J.

Por otra parte, sea M una variedad casi contacto métrica con métrica g y estructura casi contacto (φ,ξ,η). Entonces, tenemos

$$\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

$$g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

para $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, donde I denota la transformación identidad. La 2-forma fundamental Φ de la variedad casi contacto métrica (M,φ,ξ,η,g) es definida por $\Phi(X,Y) = g(X,\varphi Y)$ y la forma de Lee es dada por $\omega(X) = (\nabla_\xi\Phi)(\xi,\varphi X) + \delta\eta/2n\ \eta(X)$ para $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. Al campo de vectores B metricamente equivalente a ω se le denomina campo de Lee de M.

Una estructura casi contacto métrica (φ,ξ,η,g) sobre M se dice co-Kähler si la estructura casi hermítica (J,h) sobre $M\times\mathbb{R}$ definida por

(1.1) $J(X, a\ d/dt) = (\varphi X - a\xi,\ \eta(X)\ d/dt)$

(1.2) $h((X, a\ d/dt),(Y, b\ d/dt)) = g(X,Y) + ab$

para $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ y a, b funciones diferenciables sobre $M\times\mathbb{R}$, es Kähler. Si N_φ denota el tensor de Nijenhuis de φ y Φ la 2-forma fundamental de la estructura

(φ,ξ,η,g), la anterior condición es equivalente a que $d\Phi = 0$, $d\eta = 0$ y $N_\varphi + 2d\eta\otimes\xi = 0$.

Una estructura casi contacto métrica (φ,ξ,η,g) sobre M se dice localmente conforme co-Kähler (l.c.c-K.) si para cada x de M existe un entorno abierto U de x y una función diferenciable σ sobre U real tal que la estructura $(\varphi, e^{-\sigma}\xi, e^{\sigma}\eta, e^{2\sigma}g)$ es co-Kähler. En (9), se prueba que (φ,ξ,η,g) es l.c.c-K. si y solo si

(1.3) $d\Phi = -2\Phi\wedge\omega$, $d\eta = \eta\wedge\omega$, $N_\varphi = 0$, $d\omega = 0$

siendo ω la forma de Lee de M, ó equivalentemente si

(1.4) $(\nabla_X\varphi)Y = \omega(Y)\varphi X - \omega(\varphi Y)X + \Phi(X,Y)B - g(X,Y)\varphi B$, $d\omega = 0$

para $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

Una variedad (M,φ,ξ,η,g) l.c.c-K. de dimensión mayor o igual que cinco con forma de Lee ω tal que $\omega(\varphi X) = 0$ para todo X de $\mathfrak{X}(M)$, se dice de clase C_5 (para más detalle ver (8)).

LA DISTRIBUCION CO-KAHLER NULLITY EN UNA VARIEDAD LOCALMENTE CONFORME CO-KAHLER

Sea (M,φ,ξ,η,g) una variedad casi contacto métrica. Definimos, para cada m de M, el subespacio $C(m)$ del espacio tangente a M en el punto m dado por

(2.1) $C(m) = \{ u\in T_mM \;/\; (\nabla_u\varphi)v = 0 \quad \forall v\in T_mM \}$,

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de la métrica g. Al subespacio $C(m)$ le llamaremos el espacio "co-Kähler nullity" en el punto m. En cada subconjunto abierto de M en el cual la dimensión de $C(m)$ sea constante, la aplicación $m \longrightarrow C(m)$ define una distribución que denominaremos distribución "co-Kähler nullity".

Consideremos en $M\times\mathbb{R}$ la estructura casi hermítica (J, h) dada por (1.1) y (1.2). Entonces, si para cada m de M y t de $\mathbb{R}$, K(m,t) denota el espacio Kähler nullity en (m,t), no es difícil probar que

<u>Proposición 2.1</u>:

i) dim K(m,t) = dim C(m) + 1.

ii) Si U es un subconjunto abierto de M en el cual la dimensión de C(m) es constante, entonces C es completamente integrable en U si y solo si K es completamente integrable en U×$\mathbb{R}$.

Reciprocamente, sea (V,J,h) una variedad casi hermítica y consideramos en $M\times\mathbb{R}$ la estructura casi contacto métrica (φ,ξ,η,g) dada por

$$\varphi(X, ad/dt) = (JX, 0), \quad \xi = (0, d/dt), \quad \eta(X, ad/dt) = a$$
$$g((X, ad/dt),(Y, bd/dt)) = h(X,Y) + ab$$

donde X, Y son campos de vectores sobre V y a, b funciones diferenciables sobre $V\times\mathbb{R}$.

Entonces, si K(x) es el espacio Kähler nullity en un punto x de V, se tiene

Proposición 2.2:

i) Para todo $t\in\mathbb{R}$

$$\dim C(x,t) = \dim K(x) + 1.$$

ii) Si U es un subconjunto abierto de V en el cual la dimensión de K(x) es constante, entonces K es completamente integrable en U si y solo si C es completamente integrable en $U\times\mathbb{R}$.

En (3), el autor determina completamente la distribución Kähler nullity en una variedad l.c.K.. Aquí, nosotros describiremos los subespacios co-Kähler nullity en una variedad l.c.c-K..

Sea (M,φ,ξ,η,g) una variedad l.c.c-K. de dimensión 2n+1, ω y B la 1-forma y el campo de Lee de M, respectivamente, y Φ la 2-forma fundamental de la estructura (φ,ξ,η,g). Entonces de (1.4) se sigue que

$$(2.2) \qquad \psi(X,Y) = \omega((\nabla_X\varphi)Y)$$

es una 2-forma exterior sobre M y satisface

$$(2.3) \qquad \psi = \|\omega\|^2\Phi - 2(\omega\wedge\theta),$$

donde $\theta = \omega\circ\varphi$.

Para cada m de M, denotamos por Ann $\psi(m)$ al espacio anulador de $\psi(m)$, esto es, el subespacio de T_mM dado por

$$\mathrm{Ann}\ \psi(m) = \{X\in T_mM \ / \ \psi(m)(X,Y) = 0 \quad \forall Y\in T_mM\}.$$

Se tiene entonces,

Teorema 2.1:

Para todo m de M, C(m) está contenido en el anulador de $\psi(m)$. Además, se tiene la igualdad excepto en el caso de que $\omega_m \neq 0$ y $\omega_m(\xi_m) = 0$. De forma más precisa:

i) Si $\omega_m = 0$, entonces $C(m) = T_mM = \mathrm{Ann}\ \psi(m)$.

ii) Si $\omega_m \neq 0$ y $\omega_m(\xi_m) = 0$, entonces C(m) es 2-dimensional y está generado por B_m y φ_mB_m y Ann $\psi(m)$ es 3-dimensional y está generado por B_m, φ_mB_m y ξ_m.

iii) En cualquier otro caso $C(m) = \mathrm{Ann}\ \psi(m)$ es 1-dimensional y está generado por B_m.

Demostración:

Para cada m de M, sabemos que dim Ann $\psi(m)$ = dim T_mM - rango $\psi(m)$.

De (1.4) se tiene que $\nabla_B\varphi = 0$. Está claro por (2.2) que $C(m) \subseteq$ Ann $\psi(m)$ y, si $\omega_m = 0$, es obvio de (1.4) y (2.2) que $C(m)$ = Ann $\psi(m) = T_mM$.

Supongamos entonces en lo que sigue $\omega_m \neq 0$. Puesto que rango $\psi(m) \geq 2(n-1)$ (ya que de ser rango $\psi_m < 2(n-1)$ implicaría de (2.3) que rango $\Phi_m < 2n$ lo que es absurdo), se deduce que dim Ann$\psi(m)$ es 1 ó 3. Es más, por (2.3), se tiene que

(2.4) $\langle B_m \rangle \subseteq \mathrm{Ann}\, \psi(m) \subseteq \langle B_m, \varphi_m B_m, \xi_m \rangle$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ indica subespacio generado. En efecto, si $u \in \mathrm{Ann}\, \psi(m)$ entonces

$$-\|\omega_m\|^2 g_m(\varphi_m u, v) + g_m(\omega_m(u)\varphi_m B_m, v) + g_m(\omega_m(\varphi_m u)B_m, v) = 0$$

para todo $v \in T_m M$, es decir

$$\varphi_m u = \omega_m(u)/\|\omega_m\|^2 \varphi_m B_m + \omega_m(\varphi_m u)/\|\omega_m\|^2 B_m$$

y así

(2.5) $u = \omega_m(u)/\|\omega_m\|^2 B_m - \omega_m(\varphi_m u)/\|\omega_m\|^2 \varphi_m B_m - \left(\dfrac{\omega_m(u)\eta_m(B_m)}{\|\omega\|^2} - \eta_m(u)\right)\xi_m.$

Si $\omega_m(\xi_m) = 0$, entonces por (2.3) $B_m, \varphi_m B_m$ y $\xi_m \in \mathrm{Ann}\, \psi_m$ y en consecuencia el Ann ψ_m es 3-dimensional y está generado por B_m, $\varphi_m B_m$ y ξ_m. Por otra parte, de (1.4), se deduce que $\varphi_m B_m \in \mathcal{C}(m)$. Además, si $u \in \mathcal{C}(m)$, ya que $(\nabla\varphi)_m(u,\xi_m) = 0$, se sigue también de (1.4), que $\eta_m(u) = 0$. Así, usando (2.5), $\mathcal{C}(m)$ es 2-dimensional y está generado por B_m y $\varphi_m B_m$ lo que prueba ii).

Finalmente, supongamos $\omega_m(\xi_m) \neq 0$. Entonces, si $u \in \mathrm{Ann}\, \psi_m$ se tiene que $\psi_m(u, \xi_m) = 0$ con lo que, por (2.3), $\omega_m(\varphi_m u) = 0$, y así, usando (2.5)

$$\langle B_m \rangle \subseteq \mathrm{Ann}\, \psi(m) \subseteq \langle B_m, \xi_m \rangle.$$

Por consiguiente, Ann $\psi_m = \mathcal{C}(m)$, siendo ambos subespacios 1-dimensionales generados por B_m.■

LAS RELACIONES $K_{1\varphi}$-CURVATURA EN UNA VARIEDAD LOCALMENTE CONFORME CO-KAHLER

Sea (V,J,h) una variedad casi hermítica y R el operador curvatura de Riemann de tipo (0,4) sobre V dado por

(3.1) $R(X,Y,Z,W) = -h(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, W)$

para $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(V)$.

Se dice que (V,J,h) satisface la identidad K_i-curvatura, $i = 1,2,3$, si (ver (6)):

K_1:$R(X,Y,Z,W) = R(X,Y,JZ,JW)$

K_2:$R(X,Y,Z,W) - R(JX,JY,Z,W) - R(JX,Y,JZ,W) - R(JX,Y,Z,JW) = 0$

K_3:$R(X,Y,Z,W) = R(JX,JY,JZ,JW)$.

No es difícil comprobar que $K_1 \Rightarrow K_2 \Rightarrow K_3$ y que las variedades Kählerianas satisfacen las tres identidades.

Sea ahora (M,φ,ξ,η,g) una variedad casi contacto métrica. Se dice que M satisface la identidad $K_{1\varphi}$-curvatura $i = 1,2,3$, si y solo si

$K_{1\varphi}$:$R(X,Y,Z,W) = R(X,Y,\varphi Z,\varphi W)$

$K_{2\varphi}$:$R(X,Y,Z,W) - R(\varphi X,\varphi Y,Z,W) - R(\varphi X,Y,\varphi Z,W) - R(\varphi X,Y,Z,\varphi W) = 0$

$K_{3\varphi}$:$R(X,Y,Z,W) = R(\varphi X,\varphi Y,\varphi Z,\varphi W)$,

para $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$.

Si consideramos en $M\times\mathbb{R}$ la estructura casi hermítica (J,h) dada por (1.1) y (1.2) entonces,

Proposición 3.1 (11):

M satisface la identidad $K_{i\varphi}$-curvatura $(i=1,2,3)$ si y solo si $M\times\mathbb{R}$ satisface la identidad K_i-curvatura $(i=1,2,3)$.

En consecuencia $K_{1\varphi}\Rightarrow K_{2\varphi}\Rightarrow K_{3\varphi}$ y las variedades co-Kählerianas satisfacen las tres identidades.

En (3), Vaisman estudia la influencia de las identidades K_i-curvatura en la geometría de las variedades l.c.Kähler. A continuación, obtenemos condiciones bajo las cuales una variedad l.c.c-K. satisfaciendo la identidad $K_{i\varphi}$-curvatura $(i=1,2,3)$ es co-Kähler. Previamente, nosotros damos algunos resultados que utilizaremos posteriormente.

Sea (M,g) una variedad de Riemann y consideremos sobre M la métrica g' resultante al aplicar un cambio conforme sobre la métrica g, esto es, $g' = e^{2\sigma}g$, siendo $\sigma: M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre M.

Denotamos por R' el tensor curvatura asociado a la métrica g', por $\omega = d\sigma$, por B el campo de vectores sobre M definido por $\omega(X) = g(X,B)$ y por L_ω el tensor simétrico de tipo $(0,2)$ sobre M dado por

$$(3.2)\quad L_\omega(X,Y) = (\nabla_X\omega)Y - \omega(X)\omega(Y) = g(\nabla_X B,Y) - \omega(X)\omega(Y)$$

para todo X, Y de $\mathfrak{X}(M)$.

Entonces,

Proposición 3.2 (12):

$$(3.3)\quad e^{-2\sigma}R'(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - \{L_\omega(X,Z)g(Y,W) - L_\omega(Y,Z)g(X,W) + L_\omega(Y,W)g(X,Z) - L_\omega(X,W)g(Y,Z)\} + \|\omega\|^2\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\}$$

para todo X, Y, Z, W de $\mathfrak{X}(M)$.

Supongamos ahora que (M,φ,ξ,η,g) es una variedad l.c.c-K. y que ω es su forma de Lee. Entonces de la proposición anterior y del hecho de que una variedad co-Kähler satisface la condición $K_{1\varphi}$ se obtiene

Corolario 3.1:

$$(3.4)\quad R(X,Y,Z,W) - R(X,Y,\varphi Z,\varphi W) = \{L_\omega(X,Z)g(Y,W) - L_\omega(X,\varphi Z)g(Y,\varphi W) - L_\omega(Y,\varphi Z)g(X,\varphi W) + L_\omega(Y,W)g(X,Z) - L_\omega(Y,\varphi W)g(X,\varphi Z) - L_\omega(X,W)g(Y,Z) + L_\omega(X,\varphi W)g(Y,\varphi Z)\} + \|\omega\|^2\{g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) - g(X,\varphi Z)g(Y,\varphi W) + g(X,\varphi W)g(Y,\varphi Z)\}$$

para $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$.

Seguidamente, tal y como anunciabamos anteriormente, estudiamos las relaciones de curvatura $K_{i\varphi}$ $i=1,2,3$ sobre una variedad l.c.c-K..

Sea (M,φ,ξ,η,g) una variedad l.c.c-K. de dimensión mayor ó igual que cinco con campo de Lee B y $\mathrm{div}B$ la divergencia de B. Entonces, se tiene

Teorema 3.1:

Si M satisface la condición $K_{1\varphi}$ y es compacta, la variedad es co- Kähler. Si la compacidad es reemplazada por la condición div B ≥0 entonces la variedad es también co-Kähler.

Demostración:

Utilizando (3.4) se deduce:

$$\{L_\omega(X,Z)g(Y,W) - L_\omega(Y,Z)g(X,W) + L_\omega(Y,W)g(X,Z) - L_\omega(X,W)g(Y,Z) -$$

$$- L_\omega(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) + L_\omega(\varphi Y,Z)g(\varphi X,W) - L_\omega(\varphi Y,W)g(\varphi X,Z) + L_\omega(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z)\}$$

$$+ \|\omega\|^2 \{g(\varphi Y,Z)g(\varphi X,W) - g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) - g(Y,Z)g(X,W) + g(X,Z)g(Y,W)\} = 0$$

para $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$, donde ω es la forma de Lee de M.

Considerando una base local de campos de vectores y pasando a coordenadas la anterior expresión, se obtiene:

$$\{(L_\omega)_{ik}g_{jl} - (L_\omega)_{jk}g_{il} - (L_\omega)_{il}g_{jk} + (L_\omega)_{jl}g_{ik} - \varphi_i^r\varphi_j^s(L_\omega)_{rk}g_{sl} +$$

$$+ \varphi_j^r\varphi_i^s(L_\omega)_{rk}g_{sl} + \varphi_j^r\varphi_i^s(L_\omega)_{sl}g_{rk} - \varphi_i^r\varphi_j^s(L_\omega)_{sl}g_{rk}\} +$$

$$+ \|\omega\|^2 \{\varphi_j^r\varphi_i^s g_{sl}g_{rk} - \varphi_i^r\varphi_j^s g_{rk}g_{sl} - g_{jk}g_{il} + g_{ik}g_{jl}\} = 0.$$

Contrayendo con $g^{ik}g^{jl}$ resulta:

$$\{4n\ (L_\omega)_{ik}g^{ik} - \varphi_i^r\varphi_j^j(L_\omega)_{rk}g^{ik} + \varphi_j^r\varphi_i^j(L_\omega)_{rk}g^{ik} + \varphi_i^s\varphi_j^i(L_\omega)_{sl}g^{jl} -$$

$$- \varphi_j^s\varphi_i^i(L_\omega)_{sl}g^{jl}\} + \|\omega\|^2\{\varphi_j^i\varphi_i^j - \varphi_j^j\varphi_i^i + 2n(2n+1)\} = 0.$$

Se puede suponer que la base local de campos de vectores es una φ-base, y así resulta

$$(4n)\sum_{i=1}^{2n+1}(L_\omega)_{ii} - 2\sum_{i=1}^{2n}(L_\omega)_{ii} + 4n^2\|\omega\|^2 = 0$$

con lo que

$$(4n - 2)(\text{div } B - \|\omega\|^2) + 2(L_\omega)(\xi,\xi) + 4n^2\|\omega\|^2 = 0,$$

es decir,

$$(3.5)\quad (2n - 1)(\text{div } B - \|\omega\|^2) + (L_\omega)(\xi,\xi) + 2n^2\|\omega\|^2 = 0.$$

Por otra parte, de (3.4) y ya que $R(X,\xi,X,\xi) = 0$ para X ortogonal a ξ, se sigue que

$$(L_\omega)(\xi,\xi) = -((L_\omega)(X,X) + \|\omega\|^2)$$

para todo X ortogonal a ξ y unitario. De aquí,

$$(L_\omega)(\xi,\xi) = -\text{div}B/(2n-1) - \|\omega\|^2$$

con lo cual, de (3.5) y por ser $n \geq 2$,

(3.6) $\quad 2\mathrm{div}B + (2n-1)\|\omega\|^2 = 0.$

Por tanto, si M es compacta, ya que $\int_M \mathrm{div}B = 0$, se tiene integrando la expresión (3.6) que $\|\omega\| = 0$ es decir, $\omega = 0$ y la variedad es co-Kähler.

Si $\mathrm{div}B \geq 0$, de (3.6) se deduce directamente que $\omega = 0$, es decir, la variedad M es también co-Kähler.■

En lo que se refiere a las condiciones de curvatura $K_{2\varphi}$ y $K_{3\varphi}$, probamos el siguiente resultado.

Teorema 3.2:

M es de clase C_5 *si y solo si satisface la condición de curvatura* $K_{2\varphi}$ *ó* $K_{3\varphi}$ *para campos de vectores ortogonales a* ξ *y* $(L_B\varphi)X$ *está en la dirección de* ξ *para todo X campo de vectores ortogonal a* ξ.

Demostración:

Si M es de clase C_5, entonces, de (1.4), (3.2) y ya que $\omega = \delta\eta/2n$, se tiene que

(3.7) $\quad L_\omega(X,Y) = -(\delta\eta/2n)^2 g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y)\xi(\delta\eta/2n).$

Así, de (3.4), se prueba que M satisface la condición de curvatura $K_{2\varphi}$ y $K_{3\varphi}$ para campos de vectores ortogonales a ξ.

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Usando el teorema 2.1 y al ser $B = \delta\eta/2n\ \xi$ se deduce que

$$(L_B\varphi)X = \delta\eta/2n\ (\nabla_{\varphi X}\xi + \varphi\nabla_X\xi)$$

con lo que, de (1.4), $(L_B\varphi)X = 0$.

Queda demostrada entonces la implicación directa del teorema.

Reciprocamente, supongamos que M es una variedad l.c.c-K. que satisface $R(\varphi X,\varphi Y,\varphi Z,\varphi W) = R(X,Y,Z,W)$ para X, Y, Z, W ortogonales a ξ. Razonando como en el teorema 3.1 se deduce que

(3.8) $\quad P_\omega(X,Z)g(Y,W) - P_\omega(Y,Z)g(X,W) + P_\omega(Y,W)g(X,Z) - P_\omega(X,W)g(Y,Z) = 0$

para X, Y, Z, W ortogonales a ξ, donde ω es la forma de Lee de M y P_ω es el tensor de tipo (0,2) definido por

$$P_\omega(X,Y) = L_\omega(X,Y) - L_\omega(\varphi X,\varphi Y).$$

Pasando a coordenadas la expresión (3.8) se tiene

$$(P_\omega)_{lk}g_{jl} - (P_\omega)_{jk}g_{ll} + (P_\omega)_{jl}g_{lk} - (P_\omega)_{ll}g_{jk} = 0.$$

Contrayendo primero con g^{lk} y despues con g^{jl} se obtiene de la expresión anterior que $(n-1)\ (P_\omega)_{rs} = 0$ de lo que se deduce, por ser $\dim M \geq 5$, que $P_\omega = 0$, es decir, $L_\omega(X,Y) = L_\omega(\varphi X,\varphi Y)$ para X,Y ortogonales a ξ. Usando este resultado y (3.2) se sigue que

(3.9) $\quad g(\nabla_X B,Y) - g(\nabla_{\varphi X}B,\varphi Y) - (\omega(X)\omega(Y) - \theta(X)\theta(Y)) = 0$

donde $\theta = \omega\circ\varphi$. Ahora, puesto que $\nabla_B\varphi = 0$ (ver teorema 2.1) se tiene

$$\nabla_{\varphi X}B = \varphi(\nabla_B X) - [B,\varphi X].$$

Utilizando esta relación en (3.9) resulta

$$(3.10)\quad g([B,\varphi X] - \varphi[B,X], \varphi Y) - (\omega(X)\omega(Y) - \theta(X)\theta(Y)) = 0$$

para X,Y ortogonales a ξ. Así, al estar $(L_B\varphi)X$ en la dirección de ξ para todo X ortogonal a ξ se deduce de (3.10) que $\omega(X)\omega(Y) = \theta(X)\theta(Y)$ para X, Y ortogonales a ξ, es decir $\theta = 0$, con lo que M es de clase C_5.■

Observación:

En el teorema 2.1 se probó que en los puntos donde $B \neq 0$ y $\eta(B) = 0$, el subespacio $C(m)$ es 2-dimensional y está generado por B y φB. Observese entonces que si M satisface la condición $K_{2\varphi}$ ó $K_{3\varphi}$ para campos de vectores ortogonales a ξ y $\eta(B) = 0$, tomando en (3.10) X = B se sigue

$$(3.11)\quad g([B,\varphi B],\varphi Y) = \|\omega\|^2\omega(Y)$$

para Y ortogonal a ξ. Puesto que de (1.3) se deduce que $\eta([B,\varphi B]) = 0$, obtenemos de (3.11) que $[B,\varphi B] = \|\omega\|^2\varphi B$. Por consiguiente, si $\omega \neq 0$ en todo punto la distribución co-Kähler nullity $m \longrightarrow C(m)$ es completamente integrable.■

Del teorema anterior se sigue

Corolario 3.1:

Si M satisface la identidad de curvatura $K_{2\varphi}$ ó $K_{3\varphi}$, $(L_B\varphi)X$ está en la dirección de ξ para todo X campo de vectores ortogonal a ξ y $\eta(B)$ es constante entonces M es co-Kähler.

Demostración:

En las hipotesis del corolario y usando el teorema 3.2 se deduce que M es de clase C_5. Por tanto, si $\eta(B)$ es constante, al ser $\omega = \delta\eta/2n\ \eta$, se sigue que $\delta\eta/2n = -\alpha$ constante. Así, de (3.4) y (3.7) se tiene que $R(X,\xi,X,\xi) = -\alpha^2$ para X ortogonal a ξ y unitario. Por consiguiente, si M satisface la identidad de curvatura $K_{2\varphi}$ ó $K_{3\varphi}$ entonces $\alpha = 0$, es decir $\omega = 0$, y M es co-Kähler.■

También es cierto

Proposición 3.3:

Si B y ξ son ortogonales, M satisface la condición $K_{2\varphi}$ ó $K_{3\varphi}$ para campos de vectores ortogonales a ξ y las curvas integrales de B y φB son geodésicas entonces M es co-Kähler.

Demostración:

De (3.11) resulta

$$(3.12)\quad g(\nabla_B\varphi B - \nabla_{\varphi B}B, \varphi Y) = \|\omega\|^2\omega(Y)$$

para Y ortogonal a ξ.

Puesto que $\nabla_B\varphi = \nabla_{\varphi B}\varphi = 0$ (ver teorema 2.1), (3.12) se transforma en

$$(3.13)\quad g(\varphi(\nabla_B B + \nabla_{\varphi B}\varphi B), \varphi Y) = \|\omega\|^2\omega(Y)$$

Usando que las curvas integrales de B y φB son geodésicas se deduce que $\omega(Y) = 0$ para Y ortogonal a ξ y así, ya que $\omega(\xi) = 0$, M es co-Kähler.■

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su agradecimiento a D.Chinea por sus útiles comentarios en la preparación de este trabajo.

REFERENCIAS

(1) Tricerri, F.:"Some examples of locally conformal Kähler manifolds". Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, vol.40, 1 (1982), 81-92.

(2) Vaisman I.:"On locally conformal almost Kähler manifolds". Israel J. Math. 24 (1976) 338-351.

(3) Vaisman I.:"Some curvature properties of locally conformal Kähler manifolds". Transactions of the American Mathematical Society 259 2 (1980) 439-447.

(4) Vaisman I.:"Generalized Hopf manifolds". Geometriae Dedicata 13 (1982), 231-255.

(5) Cordero, L.A.; Fernandez, M.; de León, M.:"Compact locally conformal Kähler nilmanifolds". Geometriae Dedicata 21 (1986) 187-192.

(6) Gray, A.:"Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds". Tôhoku Math. J. 28 (1976), 601-612.

(7) Vaisman I.:"Conformal changes of almost contact metric structures". Lecture Notes in Math. 792 (1979), Springer.

(8) Chinea, D.; Marrero, J.C.:"Conformal changes of almost contact metric structures". Preprint.

(9) Chinea, D.; Marrero J.C.:"Conformal changes of almost cosymplectic manifolds". Preprint.

(10) Chinea, D.; Marrero J.C.:"Invariant submanifolds of locally conformal almost cosymplectic manifolds".Preprint.

(11) Rozas de Miguel, J.I.:"Estructura casi hermítica del fibrado tangente de una variedad casi hermítica o casi contacto". Publ. Dpto. Geometría y Topología n.64, Univ. Santiago de Compostela 1984.

(12) Goldberg, S.I.:"Curvature and homology". Academic Press, New York, 1962.