Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 125-132 (1990)

SOBRE ELECCION DE DENOMINADORES EN APROXIMACION TIPO-PADÉ

Ramón A. Orive Rodríguez , Pablo González Vera y Luis Casasús Latorre

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

Abstract

In [1],Gammel et al. propose to approximate an analytical function in those points of the segment joining two branch points of such a funtion,making use of certain Padé-type Approximants,in view of the poor results obtained via Padé Approximants. In this paper,the power of such method is proved,by giving some results about geometric convergence for sequences of these Approximants.

Keywords: Padé-type Approximation, Orthogonal Polynomials.

1.INTRODUCCION

En un artículo de 1.981 ([1]),Baumel,Gammel y Nuttall proponen un método para aproximar a una función en un intervalo situado entre dos puntos de rami- -ficación. Dicho método consiste en construir sucesiones de ATPs (Aproximantes tipo-Padé),de manera que los denominadores sean polinomios ortogonales sobre un arco que conecte ambos puntos. Nuestro propósito es extender esta idea a casos más generales. Asimismo,será probada la convergencia geométrica de tales Aproximantes a la función de partida,fuera de dicho arco.

A fin de fijar ideas,sea $f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$ una función analítica en un dominio D que contenga al origen. Sea,asimismo,$P_n(z)$ un polinomio arbitrario de grado n. Considérese el funcional lineal c: $c(x^l) = c_l$, actuando sobre el espacio de los polinomios Π. Entonces se tiene,al menos formalmente que: $f(z) = c\left(\frac{1}{x - z}\right)$. Por otra parte,puede probarse que:

$Q_n(z) = c\left(\dfrac{P_n(x) - P_n(z)}{x - z}\right) \in \Pi_{n-1}$. Entoces,si definimos:

$\overline{P}_n(z) = z^n P_n(z^{-1})$ y $\overline{Q}_n(z) = z^{n-1} Q_n(z^{-1})$, se obtiene que la función racio-

-nal $\dfrac{\overline{Q}_n(z)}{\overline{P}_n(z)} \in R_{n-1,n}$, verifica:

$$\left(f - \frac{\overline{Q}_n}{\overline{P}_n}\right)(z) = O(z^n) \qquad (1.1)$$

Se dice entonces que $\dfrac{\overline{Q}_n}{\overline{P}_n}$ es un (n-1/n) - ATP a f y se denota:

$\dfrac{\overline{Q}_n(z)}{\overline{P}_n(z)} = (n\text{-}1/n)_f\,(z)$. Si en particular $\overline{P}_n$ se elige tal que: $c\left(x^i P_n(x)\right) = 0$

para i = 0,1,...,n-1 (es decir,si P_n es el n-simo polinomio ortogonal respec-

to del funcional c), entoncesd (1.1) se transforma en:

$$\left(f - \frac{\overline{Q}_n}{\overline{P}_n}\right)(z) = O(z^{2n}) \quad (z \to 0) \qquad (1.2)$$

En tal caso se dice que la función racional resultante es un Aproximante de Padé (AP). Así pues,los APs son un caso particular de los ATPs con los que se consigue un mayor orden en la aproximación. No obstante,son de sobra conocidos muchos casos en que los APs se muestran ineficaces a la hora de aproximar una función en ciertos conjuntos. A modo de ejemplo,citemos:

- Aproximar el valor de una función en el segmento comprendido entre dos puntos de rama. Los polos y ceros se van a situar en dicho segmento,haciendo imposible la aproximación. Este es el caso estudiado en [1].
- Si f es una función de Stieltjes (ver por ejemplo [2]),cuya medida ϕ tenga soporte I = [a,b],sabemos que la convergencia de los (n+J/n) - APs (J≥-1) está probada fuera de $[-a^{-1},-b^{-1}]$.
- Una función f con un conjunto de singularidades $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$, con punto de

acumulación en uno de los extremos del intervalo. Habrá problemas en las cercanías de dicho punto.

- Una función con un conjunto de singularidades denso en un intervalo. Habrá problemas en las inmediaciones del mismo.

En síntesis,el problema queda planteado de la siguiente forma: Dada una función f con estructura de singularidades conocida,se trata de elegir los denominadores de los ATP s (por ejemplo,diagonales) a fin de que haya convergencia a la función de partida.

2. PRELIMINARES

Empecemos por recordar la expresión integral (ver [1] y [3]) del error de aproximación,siendo f analítica y univalente en $\overline{\mathbb{C}}$ - S, S compacto y conexo que no contenga al origen , y siendo $t \in \mathbb{C}$ - S:

$$E_n(t) = \left(f - (n-1/n)_f\right)(z) = \frac{1}{2\pi i P_n(t^{-1})}\int_C \frac{x^{-1}f(x^{-1})P_n(x)}{1-xt}\,dx \qquad (2.1)$$

donde C es una curva de Jordan que encierra a todas las singularidades de f pero no al punto t^{-1}.

Seguidamente,hacemos una breve síntesis acerca de las prinicipales propiedades de los polinomios ortogonales en un arco o curva de Jordan,asociados a cierta medida μ (ver Szegö [7] y también [4]). Sea C un arco o curva de Jordan y considérese el producto interior: $\langle f,g\rangle = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,d\mu(x)$. La familia de polinomios $P_n(z)$, dada por: $P_0(z) = 1$ y para $n \geq 1$:

$$P_n(z) = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{10} & --- & c_{n0} \\ c_{01} & c_{11} & --- & c_{n1} \\ - & - & --- & - \\ c_{0,n-1} & --- & & c_{n,n-1} \\ 1 & z & ---- & z^n \end{vmatrix}$$

constituye un sistema de polinomios ortogonales respecto a μ, siendo $c_{ij} = \int z^{i}\bar{z}^{j}\, d\mu(z)$. Además, la correspondiente familia de polinomios ortogonales mónicos, $P_n(z)$, son polinomios minimales de $\langle Q(z),Q(z)\rangle_{\mu}$, para cada n. Por último, señalemos que los ceros de los polinomios ortogonales se sitúan en la envolvente convexa de C.

Sea, pues, f analítica fuera de un arco de Jordan S. Sea, como antes, T la imagen de S mediante la aplicación $t \longrightarrow 1/t$. T también será un arco de Jordan. Teniendo en cuenta (2.1), el error $E_n(t)$ se minimizará si elegimos P_n de manera que : $|P_n(t^{-1})| \gg \sup_{x \in C} |P_n(x)|$. Como C puede aproximarse tanto como se quiera a T, el problema se traduce en elegir P_n de forma que se minimice su norma uniforme en C. Esto nos conduciría a los polinomios de Tchebycheff asociados a T. Si en vez de trabajar con esta norma lo hacemos con norma L^2, los correspondientes polinomios minimales serían los polinomios ortogonales en la curva o arco T. Queda, pues, justificada la idea expuesta por Baumel, Gammel y Nuttall en [1].

3. CONVERGENCIA

Sea f analítica y univalente en $\bar{\mathbb{C}} - S$, S arco de Jordan que no contenga al origen y sea T el correspondiente arco de Jordan, imagen de S mediante la aplicación $t \longrightarrow 1/t$. Sabemos que existe una función ϕ que aplica conformemente el exterior de T en el exterior del círculo unidad, conservando el punto del infinito. Asimismo, T es regular, en el sentido de que posee función de Green G(z) con polo en el infinito, positiva y armónica en el exterior de T y tal que $G(z) \equiv 0$ en T y $\lim_{z \to \zeta} G(z) = 0$, para $\zeta \in T$. En particular, $G(z) = L|\phi(z)|$ (ver [9]).

En [10], Widom define los "polinomios extremales" en T, como aquéllos que minimizan $\int_T \varphi(|P_n(z)|)d\mu(z)$, verificando la función φ condiciones poco restrictivas. Si en particular T es un arco de Jordan y $\varphi(t) = t^2$, tenemos los polinomios ortogonales en T asociados a la medida μ. En este caso, si μ domina a la medida lineal sobre T, los correspondientes polinimios ortogonales mónicos $P_n(z)$ verifican que:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{T} |P_n(z)|^{1/n} = \mathrm{Cap}\,(T) \tag{3.1}$$

donde Cap(T) indica la capacidad logarítmica o diámetro transfinito de T. Asimismo, Widom obtiene el siguiente resultado fundamental para nosotros:

LEMA 1 ([10])

"En las condiciones anteriores, los ceros de los correspondientes polinomios ortogonales no tienen puntos de acumulación en $\mathbb{C} - T$".

Estamos entonces en condiciones de aplicar el siguiente:

LEMA 2 ([9])

"Sea E cerrado y acotado, tal que $K = \mathbb{C} - E$ sea conexo y regular. Sea ϕ la aplicación conforme de K en el exterior del disco unidad que conserva el infi--nito. Supongamos que C(E)>0. Si los puntos $(\beta_i^{(j)})$ (j=1,2,... , i=1,...,j) no tienen puntos de acumulación fuera de E, se tiene que para los polinomios móni--cos $P_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - \beta_i^{(n)})$, con $M_n = \max |P_n(z)|$, $(z \in E)$, son equivalentes:

a) $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \mathrm{Cap}\,(E)$

b) $\lim_{n\to\infty} |P_n(z)|^{1/n} = \mathrm{Cap}\,(E)\,|\phi(z)| = \mathrm{Cap}\,(E)\, e^{G(z)}$."

Como consecuencia inmediata, se tiene:

COROLARIO

"Si T es un arco de Jordan y $P_n(z)$ $(n \in \mathbb{N})$ son los correspondientes polinomios ortogonales mónicos respecto a cualquier medida que domine a la lineal en T, se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} |P_n(z)|^{1/n} = \text{Cap}(E)\ |\phi(z)| \tag{3.2}$$

uniformemente,en cada compacto de $\mathbb{C} - T$".

Pasamos ahora a enunciar nuestro resultado fundamental:

TEOREMA

"Sea f analítica en $\overline{\mathbb{C}} - S$, siendo S y T como antes. Sea $P_n(t)$ ($n \in \mathbb{N}$) la suce--sión de polinomios ortogonales mónicos en T respecto a cualquier medida μ que cumpla las condiciones anteriores. Entonces,la sucesión de (n-1/n) - ATPs con denominadores $\overline{P}_n(t) = t^n P_n(t^{-1})$, converge geométricamente a f,para todo t perteneciente al exterior de S".

Demostración

Por ser C un compacto,se tendrá que: $\sup_{x\in C}|P_n(x)| = |P_n(x_0)|$, $x_0 \in C$. Si el punto (t^{-1}) está en la envolvente convexa de T puede ser cero de los polinomios ortogonales,pero teniendo en cuenta el corolario anterior,sólo pue--de serlo de,a lo sumo,un número finito de éllos. Por ello,y recordando la ex--presión integral del error dada en (2.1),se tiene,de un cierto N en adelante:

$$|E_n(t)| \le \frac{|P_n(x_0)|}{|P_n(t^{-1})|}\ \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|x^{-1}|\ |f(x^{-1})|}{|1 - xt|}\, dx \le K\ \frac{|P_n(X_0)|}{|P_n(t^{-1})|}$$

siendo K dependiente de t,pero independiente de n. Entonces:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|E_n(t)|^{1/n} \le \frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ |P_n(x_0)|^{1/n}}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ |P_n(t^{-1})|^{1/n}}$$

Como $x_0 \in C$ y por tanto está en $\mathbb{C} - T$, al igual que (t^{-1}),se tiene por (3.2):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |E_n(t)| \le \frac{|\phi(x_0)|}{|\phi(t^{-1})|}.$$

Como C puede tomarse tan próxima como se quiera a T,siempre podrá asegurarse que el anterior cociente es menor que uno. Más específicamente,como t^{-1} no pertenece a T, $|\phi(t^{-1})| = 1+\alpha$,con $\alpha > 0$. Entonces podemos tomar como C a la curva de nivel C_R,para la cual $|\phi(x)| = R = 1+\frac{\alpha}{2}$,

y entonces,se tendría que: $\overline{\lim_{n\to\infty}} |E_n(t)|^{1/n} < 1$. ■

Como consecuencia inmediata se tiene:

COROLARIO

"La convergencia será uniforme en compactos de $\mathbb{C}$ - T"

Observaciones

Hemos probado la validez teórica del método expuesto en [1]. Con mayor generalidad,si f es una funcióp n de Stieltjes: $f(z) = \int_0^\infty \frac{d\omega(u)}{1+uz}$, ω con soporte [a,b],siendo $\omega \in C^1$ ([a,b)], el método anteriormente expuesto aproxima a f con convergencia geométrica en el exterior del arco elegido (por ejemplo,por comodidad,una semicircunferencia),y en particular,en cualquier punto del intervalo conflictivo. Asimismo,si quisiésemos aproximar el valor de la función en un punto situado fuera de $[-a^{-1},-b^{-1}]$,podríamos emplear polinomios ortogonales en dicho intervalo,garantizando la convergencia geométrica del método. Esta misma sería la situación si queremos aproximar una función fuera del intervalo donde tiene un conjunto denso de polos.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.T. BAUMEL , J.L. GAMMEL , J. NUTTALL: "Placement of cuts in Padé-like Approximation". J. of Compt. and Appl. Math.,vol 7,no 2,pp 135-140 (1.981).

[2] G.A. BAKER , P. GRAVES-MORRIS: "Padé Approximants:Basic Theory.Part I". Encyclopedia of Maths. and its Appls. Cambridge Univ. Press (1.984).

[3] C. BREZINSKI: "Padé-type Approximants and General Orthogonal Polynomials". Birkhauser,Berlin (1.980).

[4] E. GODOY: "Polinomios ortogonales asociados a modificaciones de medidas". Tesis Doctoral,Universidad de Santiago (1.987).

[5] P.GONZALEZ , F.PEREZ y R.ORIVE: "Cuadraturas para funciones peso complejas" (Enviado para publicación en este mismo número) (1.989).

[6] E. HILLE: "Analytic Function Theory",vol 2. Ginn & Co. (1.969)

[7] G. SZEGÖ: "Orthogonal Polynomials". Amer.Math.Soc. Providence, R.I. (1.975).

[8] M. TSUJI: "Potencial Theory in modern function theory". Maruzen,Tokyo (1.959).

p[9] J.L. WALSH: "Interpolation and Approximation by analytic functions in the complex domain". Amer.Math.Soc. Providence,R.I. (1.960).

[10] H. WIDOM: "Polynomials associated with measures in the complex plane". J. of Math. and Mech.,vol 16,no 9 (1.967).