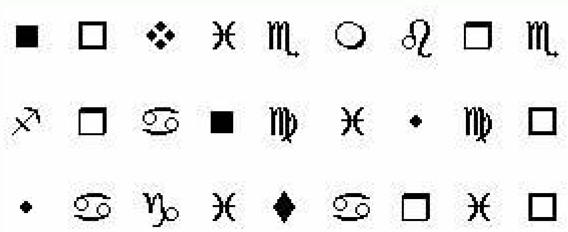
Problemas Comentados (XIX)

J.A. Rupérez Padrón y M.García Déniz
-Club Matemático-

Algunos problemas nos atraen independientemente de la dificultad de su resolución. El que vamos a presentar lleva como título **¿CÓMO SE LLAMA EL PROFE?** Y lo hemos encontrado en el libro de Agustín Fonseca: “El rompecocos” (Ed. Temas de Hoy). Y dice así:

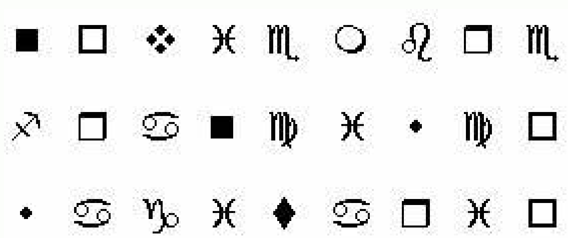
Dice el profesor: “Os propongo un juego con el que nos divertiremos mucho. El juego consiste en adivinar mi nombre.



Cada símbolo corresponde a una letra y a una misma letra le corresponde siempre el mismo signo. Para dar más facilidades también os he escrito mi signo del zodiaco, siguiendo la misma clave, y, por si fuera poco, añado el mes en el que nací.”

¿Cómo se llama el profesor?
¿En qué mes nació?
¿Cuál es su signo del zodiaco?

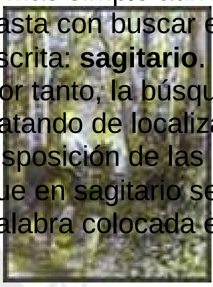
COMENTARIO Y SOLUCIÓN:
En el primer paso de la estrategia general (COMPRENDER) debe llegarse a las siguientes conclusiones:
Los datos son tres palabras de nueve letras cada una, presentadas mediante un código simbólico. Esas palabras corresponden a un nombre de persona, al nombre de un mes y al nombre de un signo del zodiaco, pero no necesariamente en ese orden (no hay nada en el problema que lo indique así).
El objetivo es descodificar las tres palabras.
La relación es que **cada símbolo corresponde a una letra y a una misma letra le corresponde siempre el mismo signo**, como debe suceder en todos los códigos.
El gráfico que presenta el propio problema nos va a ayudar en el desarrollo de la resolución, destacando convenientemente los símbolos y cambiándolos por la letra adecuada en cada paso:



El segundo paso (PENSAR) deberá ser elegir una estrategia de pensamiento adecuada. Podría ser ENSAYO Y ERROR, pero sería muy lenta. Es más fácil utilizar ELIMINAR, para lo cual debemos realizar listados adecuados de nombres para cada una de las palabras a buscar.

El tercer paso (EJECUTAR) deberá comenzar así, haciendo las listas. Los alumnos tienden a empezar con la lista de nombres del profesor, bien por creer que es la primera palabra, bien porque les parece fácil de adivinar. Suelen dar uno y aferrarse a él de manera curiosa. Basta con hacer una lista de posibles nombres de nueve letras para despejar cualquier empecinamiento. Sin buscar mucho y sin salirse del santoral cristiano, tenemos: **Eustaquio, Cristóbal, Marcelino, Benedicto, Prudencio, Victorino, Inocencio, Ildefonso, Silvestre, Valeriano, Saturnino, Sebastián, Guillermo, Francisco, Severiano, Florencio, Wenceslao**, etc.
Más simple es la lista de meses del año. Aunque suelen escribirla toda, desde enero a diciembre, resulta fácil darse

cuenta de que basta con escribir los meses cuyos nombres tienen nueve letras: **noviembre** y **diciembre**.
Y más simple aún la lista de signos del zodiaco. Aunque puede tener dificultades por no conocerla bien o completa, basta con buscar el horóscopo de un periódico o una enciclopedia para tener la lista completa y correctamente escrita: **sagitario**. Alguno suele incluir escorpión por confundirlo con el nombre correcto que es escorpio.
Por tanto, la búsqueda debe empezar por esta última lista (también podría empezarse por la lista de los meses) tratando de localizar cuál de las tres palabras se corresponde con sagitario. Para deducirlo debemos fijarnos en la disposición de las letras de la palabra y de los signos en el diagrama (BUSCAR REGULARIDADES). Observamos que en sagitario se repite la **a** en 2ª y 6ª posiciones, así como la **i** en 4ª y 8ª posiciones. Eso sólo ocurre en la palabra colocada en tercer lugar. Veamos:



$$D = \frac{10 \cdot n}{n+3}$$

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª
■	□	❖	♓	♏	❍	♌	❒	♏
♐	❒	♋	■	♍	♓	⬧	♍	□
⬧	♋	♑	♓	⧫	♋	❒	♓	□

Por lo tanto, tenemos localizada una palabra y podemos cambiar los símbolos por letras:

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª
●	⛴	🚍	ⓘ	🎁	🕯	🚲	✖	🎁
🚆	✖	✔	●	□	ⓘ	?	□	⛴
S	A	G	I	T	A	R	I	O

El siguiente paso podría consistir en repetir el razonamiento anterior para el mes (mediante el análisis de la repetición de la ***e*** en 5ª y 9ª posición, independientemente de que sea noviembre o diciembre). Nos daría que el mes correspondería a la primera de las palabras. También, de inmediato, deducimos que no puede ser diciembre, según la disposición de los símbolos, al no verse la ***i*** repetida en 2ª y 4ª posición. Es por tanto noviembre la solución y podemos cambiar los símbolos por las letras:

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª
N	O	V	I	E	M	B	R	E
♐	❒	♋	■	♍	♓	⬧	♍	□
S	A	G	I	T	A	R	I	O

Para determinar la segunda palabra, el nombre del profesor, basta con sustituir los símbolos ya conocidos por las letras correspondientes y tendríamos:

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª
N	O	V	I	E	M	B	R	E
♐	R	A	N	♍	I	S	♍	O
S	A	G	I	T	A	R	I	O

Y, comparando con la lista que habíamos hecho al principio y teniendo en cuenta que los símbolos en 5ª y 8ª posiciones deben ser iguales, resulta fácil deducir que el nombre del profesor ha de ser Francisco.

N O V I E M B R E
F R A N C I S C O
S A G I T A R I O

Lo cual constituye la solución del problema. Pero, ¿es la respuesta?

No, naturalmente; queda la cuarta y última fase (RESPONDER) de la estrategia general. Para ello basta con comprobar que todos los símbolos han sido sustituidos por letras según las condiciones de la relación inicial, es decir, símbolos iguales letras iguales, letras distintas símbolos distintos. Se comprueba fácilmente. Pero ¿es una solución adecuada? Deberíamos disponer de alguna manera de comprobar que la solución es coherente con los términos de la realidad del problema.. El nombre del profesor no lo podemos asegurar, pero sí la coexistencia del mes de nacimiento (noviembre) con el signo del zodiaco (sagitario). Y efectivamente así es, puesto que las personas que se corresponden con dicho signo han de haber nacido entre el 22 o 23 de noviembre y el 21 o 22 de diciembre. Satisfechas, pues, todas las condiciones ya podemos convertir la solución en respuesta:

¿Cómo se llama el profesor? Francisco
¿En qué mes nació? Noviembre
¿Cuál es su signo del zodiaco? Sagitario

Y ahora corresponde dar las respuestas a los problemas planteados en el número anterior de la revista.

LAS EDADES DE LAS HIJAS DEL CANÍBAL (2).

(Revista ARCHIMEDE, 3/2004)

En el curso de una exploración en una isla perdida, tú y un amigo sois capturados por una tribu de aborígenes. Se trata de feroces caníbales, que además tienen una gran pasión por las matemáticas. Las cosas se ponen mal, pero el rey de los caníbales os ofrece una posibilidad de salvación.

El rey tiene dos hijas, cuyas edades están expresadas por números enteros positivos. El rey comunica a tu amigo la suma de las dos edades, mientras a ti te dice que la diferencia entre las dos edades es 5.
Tu amigo dice que no está capacitado para responder con seguridad, porque –añade- está dudando entre 4 posibilidades. Ahora te toca a ti, ¿qué respondes?

COMENTARIO Y SOLUCIÓN:

Tu amigo ha dicho que la suma de los números es insegura entre 4 posibilidades. Tú inmediatamente debes saber que eso indica que dicha suma es 8 o 9.

En general, para escribir N como suma de dos enteros positivos, el número de posibilidades es [N/2].
Si N es par (N = 2x), los dos sumandos varían de (1, N-1) hasta (x, x). Hay x posibilidades, es decir, la mitad del valor de N.
Si N es impar (N = 2x+1), las posibilidades varían desde (1, N-1),..., (x, x+1). Igualmente hay x posibilidades, es decir, la mitad entera de N.
Razonando de manera inversa; si duda entre 4 posibilidades es que hay 4 sumas posibles y, por tanto, el valor de la suma es el doble de 4 (8) o el doble de 4 más 1 (9).
Si investigamos todos los casos posibles de parejas suma 8 tenemos las siguientes:

(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4).

Y si hacemos lo mismo para parejas de suma 9 tenemos:

(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5).

En nuestro caso, teniendo en cuenta que la diferencia entre las edades es 5, bastará con buscar entre todas las parejas posibles aquella que obtenga diferencia 5. Entre las de suma 8 no hay ninguna de esas características; dan diferencias respectivas de 6, 4, 2 y 0. Entre las de suma 9 hay una de diferencia 5 que es (2, 7); las otras dan diferencias de, respectivamente, 7, 3 y 1.
Como las edades son números enteros, hay una única solución. De hecho, la suma y la diferencia de dos enteros son ambas pares o ambas impares. En este caso, si la diferencia es 5, la suma debe ser 9, y **las edades requeridas son 2 y 7**. El otro conjunto de parejas, en el cual se tiene 8 como suma, no admite soluciones enteras.

LA EXPEDICIÓN AL PAÍS DE LOS CANÍBALES.

(Adaptado de: Bolt, Brian; *A Mathematical Jamboree*)

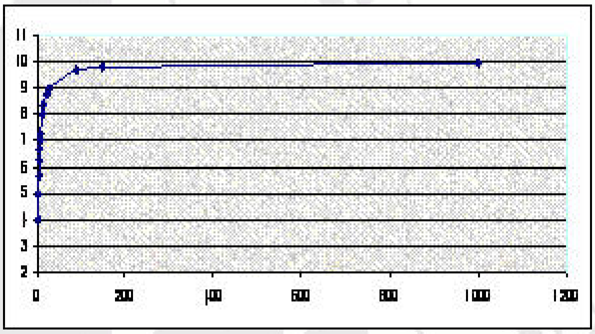
Una expedición formada por tres exploradores planea internarse en la isla a la búsqueda de la tribu de caníbales aficionados a las matemáticas. Piensan que se encuentran a doce días de marcha desde la costa hasta donde está la tribu. Los exploradores contratan porteadores para llevar el avituallamiento necesario mientras ellos cargan con el instrumental científico y audiovisual que necesitan. Saben, por expediciones anteriores que cada portador puede llevar lo equivalente a 10 días de avituallamiento para una persona y los porteadores pueden regresar a la costa al comienzo de cualquiera de los días. ¿Cuál es el mínimo de porteadores necesarios para llevar a cabo la expedición de 12 días?

COMENTARIO Y SOLUCIÓN:

Una forma de afrontar el problema consiste en calcular a qué distancia podría llegar la expedición en función del número de porteadores, si ninguno de ellos regresa a la base. Si suponemos que empezamos con ***n*** porteadores, estos llevarían ***10·n*** avituallamientos por persona y día, para abastecer a ***n+3*** personas diariamente. Por tanto el número de días que pueden caminar sería:

En la siguiente tabla hemos calculado el valor de D para diferentes valores de n,

n	2	3	4	5	6	7	8	12	15	21	27	90	150	1000	2000
D	4	5	5,71	6,25	6,67	7	7,27	8	8,33	8,75	9	9,68	9,8	9,97	9,99



y podemos comprobar que $\lim_{n\to\infty}\frac{10\cdot n}{n+3}=10$
También gráficamente:

Por ello, tenemos que concluir que el problema no se puede resolver sin que algunos de los porteadores regresen a la base. La mejor solución fue calculada por Maurice Godfrey de Millfield School, haciendo necesario únicamente el empleo de 21 porteadores y raciones para 204 personas/día. Su resultado lo resumimos en la siguiente tabla, indicando el número de porteadores que regresan y el que prosigue.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Regresan	3	3	2	3	3	0	0	0	0	0	0	0
Contínúan	18	15	13	10	7	7	7	7	7	7	7	7

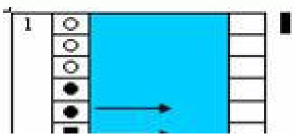
Hay otras soluciones que implican el mismo número de porteadores pero cargando más provisiones. ¿Puede encontrar alguna de ellas?

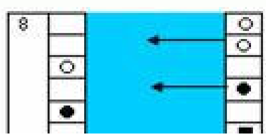
CRUZANDO EL RÍO, NO TODOS SABEN REMAR.

(Adaptado de: http://www.unlu.edu.ar)

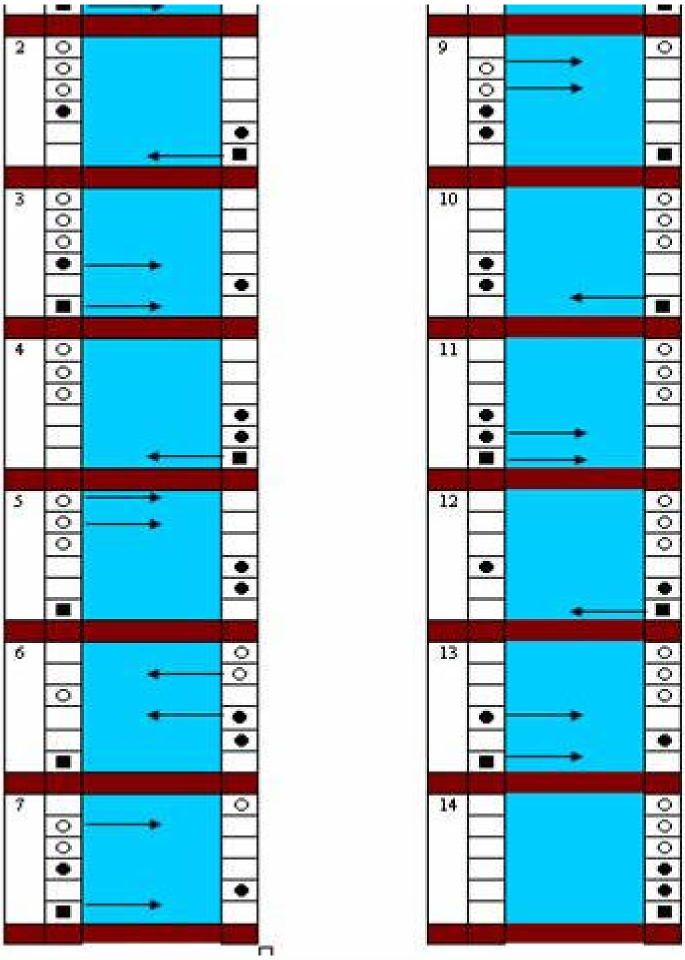
Los tres exploradores del problema anterior llegan, ya sin porteadores, a la orilla de un río que han de cruzar. Se encuentran con tres caníbales y una barca en la que sólo caben dos personas. Los tres exploradores saben remar, pero solo uno de los caníbales sabe hacerlo. Por otra parte, han de efectuar el traslado de forma que en ningún momento los caníbales superen en número a los exploradores, pues en tal caso se los comerían.
¿Cuál es el mínimo número de viajes que habrán de efectuar para cruzar todos al otro lado sin que los caníbales se coman ningún explorador?

COMENTARIO Y SOLUCIÓN:
Una forma entretenida de buscar la solución del problema puede ser el buscarse tres fichas blancas y tres de otro color, una de ellas con alguna marca, que representarán



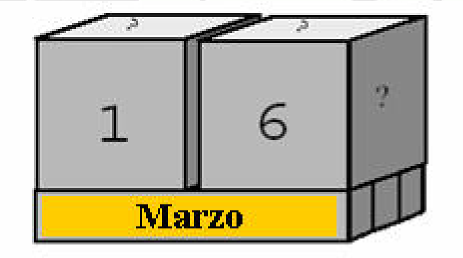


respectivamente a los misioneros y a los caníbales, siendo la ficha con la marca la que representa al caníbal que sabe remar. Luego las colocamos a un lado de un par de líneas paralelas que representarán el río y probamos a cruzar el mismo con las fichas en los dos sentidos y respetando las reglas del enunciado del problema.
Anotando las jugadas llegaríamos a un esquema parecido al que exponemos a continuación. El cuadrado negro indica al caníbal que sabe remar y las flechas quienes ocupan la barca en cada travesía. Como pueden comprobar, el río se puede cruzar en 13 travesías.



EL CALENDARIO.
(XXIII de Matemáticas para alumnos de 2º de la E.S.O., Primera Fase, organizado por la Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas, marzo/2007)

Un artesano quiere construir un calendario, como el de la figura, formado por dos cubos puestos uno al lado del otro sobre tres paralelepípedos. En cada cara de los cubos hay una cifra. Resulta así posible leer un número de dos cifras que indica un día del mes. En las caras de los paralelepípedos están indicados los nombres de los meses.



¿Qué cifras deberá escribir el artesano en las caras de los dos cubos para poder representar todos los días de los doce meses?
Explica tu razonamiento e indica las cifras escritas en las diferentes caras de los dos cubos.

COMENTARIO Y SOLUCIÓN:
El conocimiento y comprensión de los datos hace el problema más o menos fácil. Los alumnos suelen reparar poco en que los datos incluyen dos cubos y tres paralelepípedos que deben conocer y describir; se fijan de manera exclusiva en las cifras del 0 al 9 que deben incluir en las caras de los cubos, y poco en los nombres de los meses que deben incluir en las caras de los paralelepípedos. Tanto que no los nombran en la solución. El objetivo es colocar las cifras y los nombres en las caras de los cuerpos geométricos, de manera coherente. La relación es conseguir que se puedan leer todas las fechas del año con las cifras y nombres visualizados en las caras delanteras.

La estrategia adecuada pasa por un poco de ensayo y error, pero sobre todo por una adecuada organización de los datos.
Aunque fácil, es bueno comenzar por comprender la estructura de los meses: tres paralelepípedos a cuatro caras laterales hacen doce caras, justo lo que necesitamos para los doce meses: cuatro en cada paralelepípedo. No hay dificultad.
Sí la hay para la escritura de los días. Cuando se ejecuta la estrategia de forma precipitada, olvidando las características de los datos, se alcanza una solución disparatada: en el primer cubo van el 0, el 1, el 2 y el 3; en el segundo cubo va el resto de las cifras (4, 5, 6, 7, 8, 9). Algunos recapacitan un poco y comprenden que han de repetir algunas de las cifras del primer cubo en el segundo y, por tanto, cambiar también algunas de las del segundo cubo para el primero. Así dan, como solución, para el primer cubo 0, 1, 2, 3, 4, 5, y para el segundo 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9. Y se quedan tan frescos. Un cubo sólo tiene seis caras y tenemos ocho cifras: hay que eliminar dos. El 1 y el 2 no se pueden eliminar, porque necesitamos escribir el 11 y el 22. Fácilmente se llega a la conclusión de que podemos eliminar el 3, ya que no hay que escribir el 33. El 0 no se puede eliminar porque necesitamos escribir 04 y 05, con las cifras 4 y 5 que están en el otro cubo. Por tanto, a estas alturas sólo nos queda eliminar una de las cifras 6, 7, 8 o 9. El gráfico que acompaña al problema nos da una última pista para entender la solución definitiva. Si utilizamos una grafía adecuada de las cifras podemos utilizar el mismo símbolo para dos cifras diferentes, girando el cubo apropiadamente. Eso sólo es posible con el 6 y el 9, que con un giro de 180º se transforman uno en el otro.

Basta ahora con comprobar que, girando las caras de los cubos o intercambiándolos entre sí, podemos escribir todos los días de cualquier mes, entre 01 y 31, para dar por finalizada la resolución y obtener la respuesta.
Paralelepípedo 1º: enero, febrero, marzo, abril.
Paralelepípedo 2º: mayo, junio, julio, agosto.
Paralelepípedo 3º: septiembre, octubre, noviembre, diciembre.

Cubo 1º: 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Cubo 2º: 0, 1, 2, 6, 7, 8.

Y estas son todas las respuestas pendientes. Ahora toca proponer nuevos problemas para la reflexión. Como escribimos para profesores de todos los niveles educativos, damos mucha variedad en los contenidos y en la dificultad. Así todos pueden aprovechar estos recursos.
¿Les ha gustado la serie de los prisioneros? Pues aún quedan más. Ahí van.

Las edades de las hijas del rey y los prisioneros.

(Revista ARCHIMEDE, 3/2004)

Un rey (que alimenta una secreta pasión por las matemáticas) tiene dos hijas; sus edades están expresadas como números enteros positivos. Hay dos prisioneros, M y S, a cada uno de los cuales se le da, separadamente, una sola información:
- al prisionero S se le comunica la suma de las edades de las dos hijas,
- al prisionero M se le comunica el MCD de las edades de las dos hijas.
El rey convoca juntos a los dos prisioneros y promete liberar al que acierte a determinar las dos edades.
S sacude tristemente la cabeza: “No, majestad, no estoy capacitado para establecer las edades de sus hijas: estoy dudando entre 5 posibilidades”.
Oída esta respuesta, M hace rápidamente algunos cálculos, después sonríe y afirma: “Majestad, yo conozco las edades de sus hijas”.
Al fin, también S, oída la última respuesta, dice: “Ahora también yo sé las dos edades”.
¿Cuántos años tienen las hijas del rey?

Las edades de las hijas del rey y los prisioneros (2).

Un rey (que alimenta una secreta pasión por las matemáticas) tiene dos hijas; sus edades están expresadas como números enteros positivos. Hay dos prisioneros, M y S, a cada uno de los cuales se le da, separadamente, una sola información:
- al prisionero S se le comunica la suma de las edades de las dos hijas,
- al prisionero M se le comunica el MCD de las edades de las dos hijas.
El rey convoca juntos a los dos prisioneros y promete liberar al que acierte a determinar las dos edades.
S sacude tristemente la cabeza: “No, majestad, no estoy capacitado para establecer las edades de sus hijas: estoy dudando entre 4 posibilidades”.
Oída esta respuesta, M hace rápidamente algunos cálculos, después sonríe y afirma: “Majestad, yo conozco las edades de sus hijas”.
Al fin, también S, oída la última respuesta, dice: “Ahora también yo sé las dos edades”.
¿Cuántos años tienen las hijas del rey?

Y un problema de transporte, con el que abordamos otra línea de ejercicios y actividades que ya hemos tratado alguna vez.

La redistribución de la mercancía.

(A Mathematical Jamboree, de Brian Bolt)

Una empresa de venta de coches dispone de siete locales de exposición y venta que vamos a nombrar con las letras A, B, C, P, Q, R y S,. Pero se encuentra con un exceso de existencias en A, B y C mientras que le faltan coches en los otros locales. Exactamente los excesos y defectos son:

A: +9 coches; B: +6 coches; C: +8 coches
P: -5 coches; Q: -7 coches; R: -3 coches y S: -8 coches.

Ahora bien, el mover los coches de un local a otro les supone unos gastos que vienen dados (en €) en la siguiente tabla:

	P	Q	R	S
A	60	20	50	40

B	**40**	**50**	**30**	**80**
C	**30**	**40**	**70**	**50**

Y se trata de conseguir la redistribución de los coches con el mínimo de gastos. ¿De qué manera?

Y aquí queda todo de momento. Hágannos caso. Escriban mensajes a esta sección y cuenten sus soluciones y experiencias o, si lo prefieren, propongan sus propios problemas. Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera del próximo NÚMEROS.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**

El **Club Matemático** está formado por los profesores
José Antonio Rupérez Padrón, del **IES de Canarias-Cabrera Pinto** (La Laguna), y
Manuel García Déniz, del **IES Tomás de Iriarte** (Santa Cruz de Tenerife).
mgarden@gobiernodecanarias.org / jruppad@gobiernodecanarias.org