Recibido: martes, 04 septiembre 2007

pasatiempos ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 3, no. 2 (abr. 2007)

¿Qué pasaría si... (*)

Pinche sobre una fórmula para ampliarla. Vuelva a pinchar sobre ella para reducirla, o pinche manteniendo pulsada la tecla [shift] para reducir todas las que permanezcan ampliadas.

...construyéramos una "torre exponencial"

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$$

de la siguiente manera? El primer número es $a_1 = \sqrt{2}$; el segundo número es $a_2 = \sqrt{2}^{a_1}$; el tercer número es $a_3 = \sqrt{2}^{a_2}$; en general,

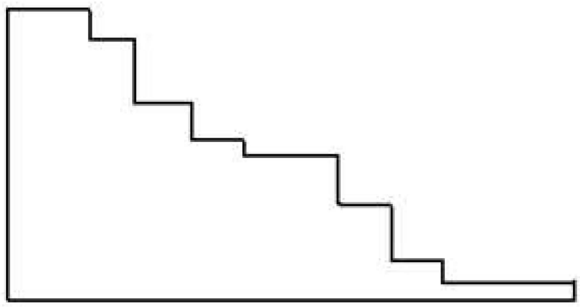
$$a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}.$$

¿Cuán grandes se hacen estos números a medida que n crece?

[La solución, en el próximo número]

Solución al problema anterior

...quisiéramos calcular la longitud de la "hipotenusa" en este "triángulo" rectángulo?



¿Qué fórmula obtendríamos?

Respuesta: La longitud de la "hipotenusa" es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. Aquí va la justificación.

Indiquemos las tres longitudes con a, b, c, como se ve en la Figura 1:

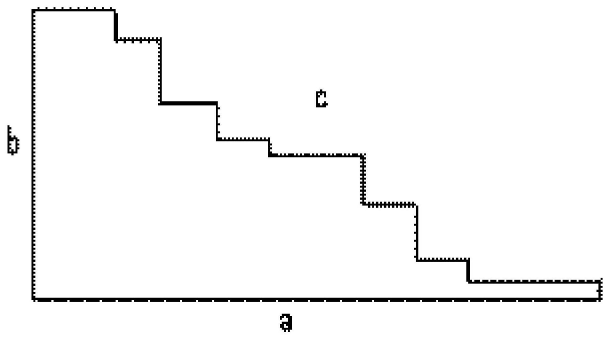


Figura 1.

Independientemente de cómo construyamos los escalones que forman el “lado” c, la suma de las longitudes de todos los segmentos verticales debe ser igual a b; de la misma manera, las longitudes de todos los segmentos horizontales debe darnos a. ¡O sea que

$$c = a + b\,!$$

Observemos que esto no puede cumplirse en ningún triángulo rectángulo (Figura 2),

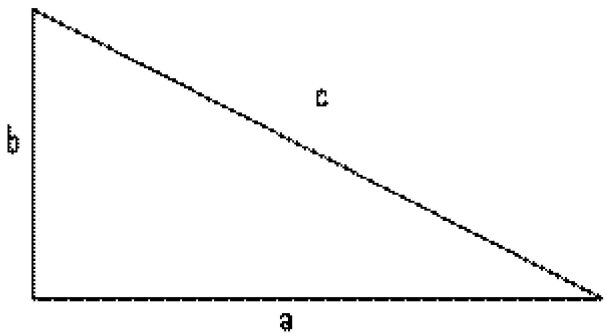


Figura 2.

pues por una parte tendríamos $a + b = c$, mientras que el teorema de Pitágoras nos diría que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

O sea,

$$a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

lo cual implicaría que $2ab = 0$ ó que uno de los lados, a ó b, debe tener longitud cero. Es decir, que no tendríamos un verdadero triángulo.

Recordemos que lo que sí es verdad en cualquier triángulo, rectángulo o no, es que la longitud de cada lado no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Es decir (Figura 3),

$$c \leq a + b.$$

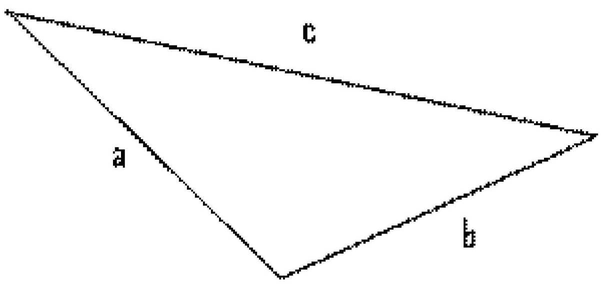


Figura 3.

Podemos preguntarnos si habrá algún triángulo para el cual esta desigualdad se convertirá en una igualdad. La respuesta es que no, si queremos tener un verdadero triángulo. Efectivamente, el teorema del coseno (Figura 4) nos dice:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

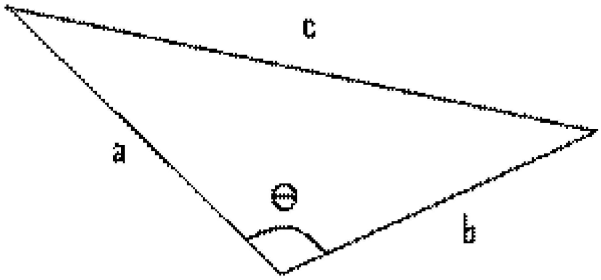


Figura 4.

Si fuera $c = a + b$, tendríamos

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta\ .$$

O sea,

$$ab \;=\; -\,ab\cos\theta\ .$$

Como las longitudes a y b son ambas mayores que cero debe ser $\cos\theta = -1$, de donde resulta que el ángulo θ tiene que valer 180°. Es decir, que el triángulo tiene que reducirse a:

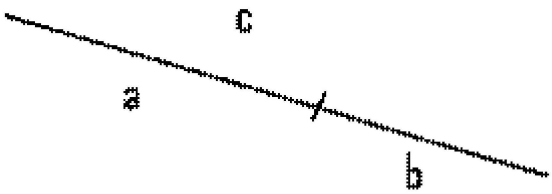
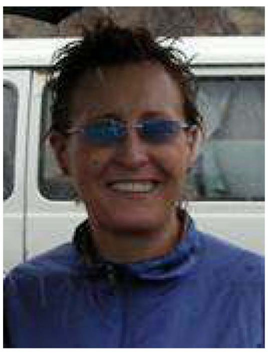


Figura 5.

Sobre la autora



Josefina (Lolina) Álvarez es Professor of Mathematics en New Mexico State University (USA). Especialista en análisis armónico y funcional, se doctoró en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires (Argentina), bajo la dirección de A.P. Calderón. Ha ocupado diversos puestos y cargos académicos en la Universidad de Buenos Aires y en las estadounidenses de Princeton, Chicago, Florida Atlantic University y New Mexico. Ha sido investigadora del CONICET (Argentina). Miembro de la Unión Matemática Argentina, Mathematical Association of America y American Mathematical Society, formó parte del *Committee on Committees* de esta última entre 1999 y 2002. Ha dictado numerosas conferencias en congresos y sesiones especiales e impartido seminarios en Alemania, Argentina, Bélgica, Brasil, Canadá, Colombia, España, Estados Unidos, México, Perú, Polonia, Suecia y Venezuela. Ha pertenecido y en varias ocasiones presidido los comités organizadores de distintos congresos y minisimposia. Ha ejercido como evaluadora para prestigiosas revistas especializadas. Desde 2002 hasta 2007 ha sido Editora Asociada del *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. Autora o coautora de numerosos artículos científicos y varias monografías en análisis armónico y funcional y directora de cinco tesis doctorales, ha desarrollado asimismo una intensa actividad en el campo de la educación matemática, habiendo recibido diversos galardones a la excelencia docente.