LA CONJETURA DE BIEBERBACH LLEGA A SER EL TEOREMA DE L. DE BRANGES

David Drasin

El análisis complejo tiene un efecto profundo tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Como parte fundamental del análisis complejo, la teoría de las aplicaciones conformes también exhibe estas dos caras. Sea

$$f\colon D \to G \tag{1}$$

una aplicación lisa (suave) e inyectiva. Si f conserva los ángulos, entonces $f(z)$ o $f(\bar{z})$ (siendo $\bar{z}$ el conjugado de z) debe ser analítica (según si f conserva o no la orientación).

Riemann afirmó en su famosa disertación (Gotinga, 1851): si D y G son dominios simplemente conexos propios del plano, entonces existe una aplicación conforme de D sobre G. La demostración dada por Riemann no era rigurosa: la aplicación f deseada se obtiene como un cierto límite, pero las matemáticas de su tiempo no eran suficientes para asegurar la existencia de este límite. En la década que comienza en 1910 varios matemáticos obtuvieron demostraciones rigurosas: P. Koebe, W. Osgood, D. Hilbert, entre otros. Las demostraciones que se presentan actualmente son muy cortas y sofisticadas: podemos manipular muy bien los procesos de límite. Una consecuencia es que, por lo general, existen soluciones a los problemas extremales sobre funciones inyectivas. Sin embargo, el teorema de Riemann es en muchos sentidos una anomalía: (a) no existe una función inyectiva analítica $f\colon \{1 < |z| < R_1\} \to \{1 < |z| < R_2\}$, excepto si $R_1 = R_2$; (b) si D y G son dominios en R^n ($n > 2$), existe una aplicación conforme del tipo (1) sólo si f es una isometría euclídea.

84

Mientras que la teoría de las aplicaciones conformes se basa en el teorema de Riemann, su papel en las matemáticas aplicadas depende en general de la construcción de funciones específicas.

Elegimos siempre uno de nuestros dominios como $D = \Delta = \{|z| < 1\}$. La condición de que f sea inyectiva implica que $f'(z) \neq 0$ $(z \in D)$ y, además, f es inyectiva si y sólo si $Af + B$ $(A \neq 0)$ es inyectiva. Entonces, imponemos la convención que f se expresa como

$$f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < 1) \tag{2}$$

lo que se suele indicar escribiendo $f \in S$, y el problema que nos concierne es la relación entre f y sus coeficientes a_n. Lo que es obvio es lo siguiente: para cada $n \geq 2$, $inf_S|a_n| = 0$, siendo $f(z) = z$ la (única) función extremal, y $G = \Delta$. También, es claro que $sup_S|a_n| = max_S|a_n|$ existe para cada n, y ya demostró Littlewood en 1924 que $|a_n| < en$.

Teorema (de Branges; antes, conjetura de Bieberbach).

Si $f \in S$, *entonces* $|a_n| \leq n \qquad (n = 2, 3\ldots)$ (3)

Esta cota es exacta.

El problema de determinar los a_n que son posibles en (2) también fue planteado por Bieberbach, pero todavía queda fuera del alcance de nuestras matemáticas.

Para ver los ejemplos que exhiben igualdad en (3), tomamos G tan "grande" como sea posible a la vista de (2). Sea $G_0 = \mathbb{C} \setminus \{ \frac{1}{4} \leq x\}$. Entonces, si $|a_n| = n$ para un n fijo, $n \geq 2$, se sigue que $G = G_0$ (o una rotación de G_0), y que

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2} \quad ,$$

siendo α real. Estas aplicaciones f se llaman *funciones de Koebe.*

Este problema fue examinado por muchos matemáticos; véanse, por ejemplo, los libros de Pommerenke (1975), Duren (1983), Hayman (1958, 1994), Bernardi (1982: una bibliografía de funciones inyectivas). Estas referencias contienen conexiones muy interesantes con las teorías de variaciones de dominios, puntos extremales (y la teoría de operadores), simetrización, métricas extremales, etc. Sin embargo, la solución dada por de Branges utiliza muy
84 pocos resultados de los trabajos precedentes. (Por supuesto que se han logrado muchos resultados relevantes en esas investigaciones, y todavía quedan problemas importantes que están fuera de estas consideraciones). De Branges presentó su demostración en Leningrado (San Petersburgo, Rusia) en 1984. Leningrado ha sido durante muchos años centro de investigaciones sobre la teoría de funciones analíticas (una escuela fundada por Goluzin). Allí la confirmó y, después de negociar, transformó su manuscrito original (de 385 páginas) en un manuscrito con menos de 20 páginas; al final de esta nota volveremos a tratar este tema. Hay varios informes sobre el proceso, poco común, mediante el cual la comunidad matemática aceptó la solución de L. de Branges; ver, por ejemplo, Fomenko-Kuzmina (*Math. Intelligencer,* v. 8) y el final del libro *The Bieberbach Conjecture* (1986). Al fin y al cabo, de Branges era un matemático experto, y si bien gran parte de su trabajo se dedicó a las relaciones entre el análisis complejo y el análisis funcional, trabajó con funciones enteras —y no funciones inyectivas—. Además, una versión anterior del teorema, de hacía pocos años, era errónea, y... ¡las 385 páginas! Con todo, después de algunas semanas, su teorema fue aceptado por los matemáticos en Leningrado.

La demostración de 16 páginas que publicó de Branges (*Acta Mathematica,* v. 154) muestra la influencia de sus colegas de Leningrado. Actualmente, hay otras demostraciones del teorema, pero todas siguen el plan básico de la original, incluyendo la esbozada en esta nota.

L. de Branges demuestra en realidad una desigualdad más complicada, formulada por I. M. Milin (de Leningrado) en el año 1971. Para $f \in S$, escribamos

$$log \ \frac{f(z)}{z} = \sum_{1}^{\infty} c_k z^k \tag{4}$$

(c_k son los coeficientes logarítmicos). Empleando una idea de M. Robertson, Milin demostró: si para un n fijo, $n \geq 1$, se tiene

$$\sum_{1}^{n} \left(k\,|c_k|^2 - \frac{4}{k} \right) (n - k + 1) \leq 0 \tag{5}$$

entonces $|a_n| \leq n$. Aunque (4) parece más complicado que (3), es en realidad una formulación muy natural. De hecho, en el siglo XX gran parte del progreso en análisis complejo se ha basado en la observación de que $log\ |f(z)|$ es *subarmónica* cuando f es analítica. De ahí que la función analítica del lado izquierdo de (4) sea muy sugerente a los investigadores. Representaciones tales como (4) no son posibles para clases más generales de las funciones inyectivas, y (5) no fue interesante para muchos investigadores hasta el año 1984.

La estrategia de L. de Branges para deducir (5) no es difícil ahora de verificar. Está basada en un método de C. Loewner, descrito por L. Ahlfors (1973) como "una hazaña notable... en 1923 cuando nada se conocía sobre funciones inyectivas, salvo los resultados más elementales". Loewner lo utilizó para verificar que $|a_3| \leq 3$.

Teorema (de Loewner).

Sea $f \in S$. Entonces f puede ser incluída en una *cadena* 84

$$\{f(t,z) : z \in \Delta,\ 0 \leq t < \infty\}$$

de funciones inyectivas tales que $f(0,z) \equiv f$. Además

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,z) = z\, p(t,z) \frac{\partial}{\partial z} f(t,z) \tag{6}$$

con p *analítica* en Δ, $p(t,0) \equiv 1$, $Re(p(z)) \geq 0$.

(Esa clase P de funciones p está bien entendida, teniendo una representación explícita muy clásica).

Este *teorema* tiene una interpretación geométrica que justifica un breve comentario. Llamemos $D_r = \{\,|z| < r\}$, $G = f(\Delta) = G_0$ y, para $t \geq 0$, $r < 1$, $G_t = f(t,z)$ $(z \in \Delta)$, $G_t\,(r) = f(t,z)$ $(z \in \Delta_r)$. Entonces, los dominios G_t se extienden desde nuestro original G_0 en el plano. La ecuación (6) gobierna este proceso (flujo) de un modo específico: para cada punto ζ, $|\zeta| = r$, y cada instante t, el vector de velocidad $\frac{\partial}{\partial t} f(\zeta,t)$ en el punto ζ está orientado hacia fuera del domino $G_t(r)$.

L. de Branges transforma (5) en un problema dinámico. Sea $f \in S$ y $n \geq 2$ fijo. De acuerdo al Teorema de Loewner tenemos los coeficientes $c_k(t)$, donde $c_k(0) = c_k$ son los de (4). Entonces, de Branges crea una familia mágica Σ de funciones reales $\{\sigma_j(t)\}$ $(t \geq 0)$ para demostrar que

$$\varphi(t) \equiv \sum_1^n \left(\mathrm{k} \,|c_k(t)|^2 - \frac{4}{k} \right) \sigma_k(t) \leq 0 \tag{7}$$

para cada $t \geq 0$. Dado (7), de

$$\sigma_k(0) = n + 1 - k \tag{8}$$

sigue en particular (5) y, por tanto, también (3). Las condiciones que se imponen a las funciones σ_j son (8),

$$\sigma'_k(t) \leq 0 \qquad (t \geq 0)\,, \tag{9}$$

$$\sigma_k(t) \to 0 \qquad (t \to \infty)\,, \tag{10}$$

y, la más importante:

$$\sigma_k - \sigma_{k-1} = -\left(\frac{\sigma'_k}{k} + \frac{\sigma'_{k+1}}{k+1} \right), \tag{11}$$

(donde definimos $\sigma_{n+1} \equiv 0$). Supongamos que existe un sistema Σ que cumpla esas condiciones y, para simplificar, que las funciones $p(t,z)$ en (6) tienen la forma especial

$$p(t,z) = \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z},$$

donde $|\kappa(t)| \equiv 1$; tales funciones son los puntos extremales de la clase P. Se tiene que

84

$$\varphi'(t) = -\sum_1^n |b_k + b_{k-1} + 2|^2 \frac{\sigma'_k}{k}$$

siendo $$b_k(t) = \sum_1^k m\kappa(t)^{-m} c_m(t).$$

Entonces (9) implica que j crece. La acotación de las $c_k(t)$ implica que $\varphi(\infty) = 0$ y, finalmente, deducimos que $\varphi(0) \leq 0$: la conjetura de Milin. (L. De Branges presenta una demostración más larga, que es válida para funciones arbitrarias de P).

Por supuesto, nuestras condiciones (8)-(11) ya determinan Σ, y no es obvio que estas condiciones sean mutuamente compatibles. De hecho, ya lo habían demostrado R. Askey y G. Gasper unos años antes, y ahora hay muchas verificaciones (algunas de ellas ¡por ordenador!).

Nuestro esbozo, así como el de otros autores (quizás el de L. Weinstein (1991) es el más conciso), evita el uso de la teoría de operadores que inspiró a L. de Branges. N. Nikolskii y V. Vasyunin, de la escuela de Leningrado, presentaron en los años 1991-2 sus interpretaciones de la orientación que inspiró (3), e incluso ilustraron cómo los pasos hacia (3) correspondían a objetos naturales en el análisis funcional. Presentaron, en el libro *Progress in Approximation Theory* (1992), un informe corto y asequible incluyendo un diccionario que relaciona las dos situaciones. J. W. Helton y F. Weening (1996) presentaron su interpretación del teorema de L. de Branges para los analistas de sistemas de control, y D. Bertilsson, en su tesis (1999), lo aplica a medias integrales de aplicaciones conformes.

Ludwig Bierberbach

Nikolski cree (carta de primavera del año 2000) que “hay ideas importantes que todavía no han sido agotadas”. El manuscrito que De Branges llevó a Leningrado fue escrito originalmente en forma de libro, y consideraba (3) como una aplicación más de la teoría desarrollada allí. L. de Branges, en su artículo en *Acta,* describe (5) como transformaciones de los espacios de Grunsky con

$$\|f\|^2 = \sum k\sigma_k |c_k|^2 < \infty$$

por funciones $B : \Delta \to \Delta$. Los números σ_k provienen de las familias $\sigma_k(t)$ ya introducidas. Confiamos en profundizar nuestra apreciación de la demostración de L. de Branges de la conjetura de Bieberbach, así como en el desarrollo de aplicaciones nuevas, una vez que aparezca este libro.

84