NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 88, marzo de 2015, páginas 31-53

Límites indeterminados mediante el uso de tablas de valores y gráficas

Víctor Ignacio Espíritu Montiel y Catalina Navarro Sandoval
(Universidad Autónoma de Guerrero. México)

Fecha de recepción: 29 de enero de 2014
Fecha de aceptación: 29 de agosto de 2014

Resumen

En este documento se propone una alternativa para el cálculo de límites indeterminados mediante el uso de tablas de valores y gráficas, dirigida a alumnos del Nivel Medio Superior (cuyas edades oscilan entre 17 y 18 años). Para esto, nos hemos dado a la tarea de analizar investigaciones considerando los aspectos histórico-epistemológico, didáctico y cognitivo. Así mismo, se elaboró un cuestionario preliminar con el objetivo de indagar sobre los procedimientos que usan los alumnos al resolver límites indeterminados, una vez aplicado y analizados los resultados, se identificaron diversas problemáticas y con base en éstas se diseñó una propuesta didáctica atendiendo en particular el cálculo de límites indeterminados, presentando también en este escrito, los resultados de la puesta en escena.

Palabras clave Límite, indeterminado, función, tabla de valores, gráfica.

Title **Indeterminate limits through using tables of values and graphs**

Abstract

This document proposes an alternative for calculating indeterminate limits through using tables of values and graphs, to pre-university students (aged between 17 and 18 years). For this, we have been given the task of analyzing research considering the historical-epistemological aspects, didactic and cognitive. Furthermore, was elaborated a questionnaire preliminary with the objective of exploring the procedures used by students to solve indeterminate limits, once applied and analyzed the results, we identified various problematic and according to these was designed a didactic proposal covering in particular the calculation of indeterminate limits, also presented in this paper, the results of the staging.

Keywords Limit, indeterminate, function, table of values, graph.

1. Introducción

El concepto límite es fundamental en el estudio del Cálculo, además, es propio del tipo de pensamiento requerido para el estudio de Matemáticas avanzadas. Es decir, el estudio y trabajo de este concepto dentro del cálculo es la base para la Matemática básica de grados más avanzados. El concepto límite de una función en un punto forma parte de los contenidos que deben ser abordados desde el Nivel Medio Superior (NMS) en la escuela mexicana. Este concepto es esencial ya que ocupa una posición central en el campo conceptual del Cálculo Diferencial e Integral, así como en la Teoría de Aproximaciones y la Continuidad. Su complejidad resulta ser fuente de dificultades tanto para la enseñanza como para el aprendizaje (Ferrante, 2009, pp.2).

Cabe señalar que existe una diversidad de investigaciones respecto del concepto límite, sin embargo, el proceso de enseñanza-aprendizaje (e-a) sigue siendo tema de preocupación, debido a que las dificultades siguen estando presentes en la mayoría de los aprendices. En este sentido, nuestro trabajo se centra en atender la manera de calcular límites indeterminados por parte de los alumnos de NMS ya que éste es uno de los objetos de aprendizaje en este nivel, de acuerdo a lo citado en los Planes y Programas de Estudio de la escuela mexicana.

En general este trabajo está constituido por antecedentes en los que se consideran aspectos histórico-epistemológicos, didácticos y cognitivos, con la intención de mirar lo que han atendido ya algunas investigaciones reportadas sobre el tema de interés, así mismo, éstos son parte de la etapa del análisis preliminar de la Ingeniería Didáctica (ID), esta última es la metodología a usar en el presente trabajo de investigación. En general los antecedentes permitieron identificar diversas problemáticas en cuanto al tema de límite, al mismo tiempo permitieron especificar el problema a estudiar y el objetivo de la investigación. Con base en el problema y el objetivo, la teoría idónea a usar es la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la metodología la ID, de las cuales se presenta un esbozo en este reporte. Se presenta también el diseño de la propuesta didáctica, se describe la puesta en escena y los resultados obtenidos.

2. Antecedentes

2.1. Desarrollo Histórico-Epistemológico

En primer lugar se presenta una reseña histórica del concepto límite, considerando el origen y evolución a lo largo de su desarrollo. Esta evolución está dividida en tres etapas, las que se diferencian por la concepción de límite que subyace en cada una. A lo largo de la evolución de este concepto, se observa claramente la necesidad de explicar y formalizar la noción para validar resultados obtenidos y para demostrar otros más generales (Ferrante, 2009, pp. 03-10).

Primera etapa: Primera mitad del siglo XVIII

En esta etapa emerge una idea intuitiva del proceso del concepto límite, pues aun no existía el concepto como tal, ya que ni siquiera se había explicitado el concepto de función, pero apareció como proceso implícito en algunos métodos para resolver problemas de velocidad, tangentes a curvas, cálculo de áreas. Sin embargo, estos métodos funcionaban de manera separada, faltaba algo que los armonizara y además les diera el carácter de universalidad, faltaba el concepto límite. Newton (1648-1727), en 1704 en su obra Tractatus Quadratura Curvarum explicó el método de las razones primeras y últimas, en la que el incremento de la variable se desvanece, lo que supone la explicación de una idea de límite un tanto metafísica. En su obra Principia Mathematica Newton aclaró el concepto límite: *"Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales"*. Por otra parte, Leibnitz (1646-1716) con su teoría sobre las Diferenciales, se dio cuenta que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. La noción de límite se encuentra implícita, se nota una evolución pasando de ser una noción a una herramienta para resolver problemas, pero esta idea de límite como aproximación no era suficiente. Dado que en esta etapa se trabajó más con problemas de índole geométrico por lo que la concepción que subyace de límite es de tipo geométrica.

Segunda etapa: Segunda mitad del siglo XVIII

Los matemáticos del siglo XVIII necesitaban una idea clara del concepto función para poder extender las operaciones a un mayor número de funciones, no se dieron cuenta de la necesidad del concepto límite. Euler (1707-1743) estudió los procesos infinitos, se planteó la regularidad de las funciones, introduciendo la función continua como sumas, productos y composiciones de funciones elementales. D'Alembert (1717-1783) creó la teoría de los límites, en el tomo IX de la Encyclopédie, escribe la siguiente definición de límite: *"Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable"*. Tiempo después, Lagrange (1736-1813) trabajó en el desarrollo de funciones en series de potencias, los resultados que consiguió le hicieron creer que se podían evitar los límites y continuó haciendo desarrollos en series de potencias, sin darse cuenta de que la convergencia de las mismas necesitaba del concepto de límite. En esta etapa el concepto límite resultó ser más intuitivo, aun no servía de apoyo para resolver problemas más avanzados, no se dieron cuenta que en la resolución de diversos problemas el concepto límite estaba ahí y que solamente hacía falta en dicho concepto el carácter de generalidad.

Tercera etapa: finales del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX

En estos años las obras de un gran número de matemáticos ya reflejaban la necesidad de construir la teoría de límites, en la que fueron determinantes la clarificación del concepto de función, la aparición de nuevos problemas matemáticos y la evolución de la enseñanza de las matemáticas. Cauchy (1789-1857) retoma el concepto de límite de D'Alembert, dándole un carácter más aritmético, pero aún impreciso. La definición que propone es la siguiente: *"..., cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás"*. Weierstrass (1815-1897) da una definición satisfactoria del concepto límite, una definición métrica, puramente estática: *"Si, dado cualquier* ε, *existe un* n_0, *tal que para* $0 < n < n_0$, *la diferencia* $f(x_0 \pm n) - L$ *es menor en valor absoluto que* ε, *entonces se dice que L es el límite de* $f(x)$ *para* $x = x_0$*"* (Ferrante, 2009). En esta etapa el concepto límite, formaba parte de la estructura matemática y sirvió de soporte para otros conceptos, tales como: continuidad, derivada e integral.

2.2. Aspectos Didácticos

Con el objetivo de identificar en que semestre se aborda el concepto límite y cuáles son los contenidos que involucra, se realizó un análisis de los Planes y Programas de Estudio de Matemáticas del Bachillerato Tecnológico en México. De igual manera, se revisaron al menos tres libros de texto de matemáticas sugeridos en la bibliografía del plan y programa antes mencionado, con la intención de mirar cómo se presenta el concepto límite en los mismos, retomando información de dos libros más reportados en López (2011), correspondientes al Nivel Superior. A continuación se muestra lo encontrado en cada uno de los documentos mencionados.

2.2.1. Planes y Programas de Estudio

En los Planes y Programas de Estudio de Matemáticas del Bachillerato Tecnológico se encontró que el concepto límite se aborda en el quinto semestre en la asignatura Cálculo Diferencial, específicamente en la unidad III. La secuencia de los temas que se abordan en este semestre es: función, límite y derivada. El curso de Calculo Diferencial está distribuido en cuatro bloques, el concepto límite se incluye en el bloque II "Resuelves problemas de límites en situaciones de carácter económico, administrativo, natural y social" (para el cual están destinadas 15 horas), es aquí donde se trabaja con límites indeterminados. El objetivo general del bloque II es buscar que el alumno resuelva problemas sobre límites en las ciencias naturales, económico-administrativas y sociales; mediante el análisis de tablas, gráficas y la aplicación de propiedades de los límites. Los objetos de aprendizaje para este bloque son:

- Los límites: su interpretación en una tabla, en una gráfica y su aplicación en funciones algebraicas.
- El cálculo de límites en funciones algebraicas y trascendentes.

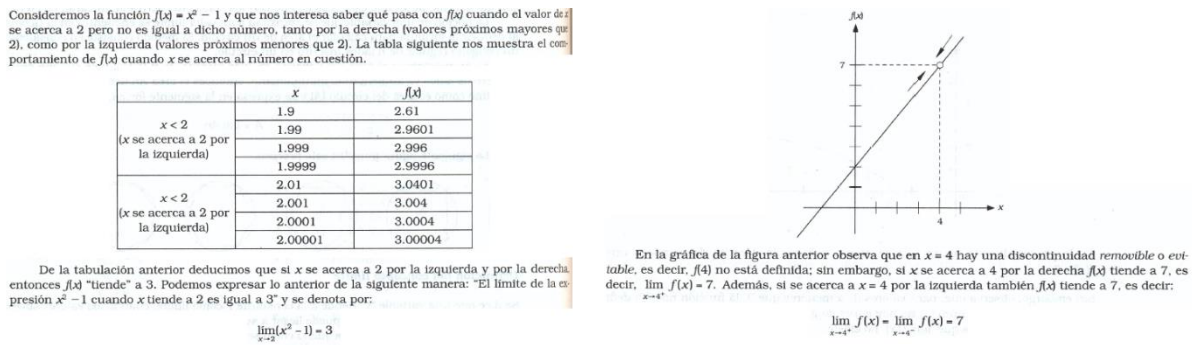
Cabe resaltar que en los Planes y Programas de Estudio del NMS indican primero el trabajo con el tema de límite y posteriormente con el tema de derivada, sin embargo, en la primera parte de este escrito se menciona que históricamente el concepto de derivada se trabajó antes de que se formalizara por completo el concepto de límite. Es decir, es evidente un cambio en la secuencia de presentación de las temáticas (derivada y límite) entre lo declarado históricamente con lo declarado en los Planes y Programas de Estudio vigentes en México.

En particular en este trabajo interesó trabajar la temática de límites tal y como se presenta en los planes y programas de estudio del NMS en México, en particular límites indeterminados, así mismo se tomó en cuenta que los alumnos no tenían conocimiento acerca de derivadas.

2.2.2. Libros de Texto

Para el desarrollo de este trabajo fue necesario realizar un análisis de algunos libros de texto, ya que éstos son el apoyo principal tanto para el profesor en la enseñanza como para el alumno en su aprendizaje y guía las actividades que se realizan en el aula, dado que éstos son la herramienta más cercana con la que cuentan dichos actores, más de lo que se dice o se indica en los Planes y Programas de Estudio.

Los libros analizados del NMS fueron: Anfossi y Flores (2006); Cuellar (2006) y Almazán, Espinosa, Fitz y Rodríguez (2005). En estos libros observamos que proponen problemas que pudieran desarrollar ideas intuitivas respecto del concepto límite, posteriormente hacen aclaraciones sobre la notación y por último presentan la definición de límite apoyándose del concepto de vecindad. En el libro de Almazán et al. (2005) además de ésta definición también presenta otra definición con mayor rigor matemático donde usan ε y δ.



Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$ y que nos interesa saber qué pasa con $f(x)$ cuando el valor de x se acerca a 2 pero no es igual a dicho número, tanto por la derecha (valores próximos mayores que 2), como por la izquierda (valores próximos menores que 2). La tabla siguiente nos muestra el comportamiento de $f(x)$ cuando x se acerca al número en cuestión.

	x	$f(x)$
$x < 2$ (x se acerca a 2 por la izquierda)	1.9	2.61
	1.99	2.9601
	1.999	2.996
	1.9999	2.9996
$x < 2$ (x se acerca a 2 por la izquierda)	2.01	3.0401
	2.001	3.004
	2.0001	3.0004
	2.00001	3.00004

De la tabulación anterior deducimos que si x se acerca a 2 por la izquierda y por la derecha, entonces $f(x)$ "tiende" a 3. Podemos expresar lo anterior de la siguiente manera: "El límite de la expresión $x^2 - 1$ cuando x tiende a 2 es igual a 3" y se denota por:

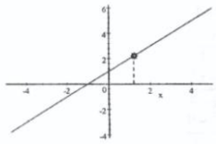
$$\lim_{x \to 2}(x^2 - 1) = 3$$

En la gráfica de la figura anterior observa que en $x = 4$ hay una discontinuidad *removible* o *evitable*, es decir, $f(4)$ no está definida; sin embargo, si x se acerca a 4 por la derecha $f(x)$ tiende a 7, es decir, $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 7$. Además, si se acerca a $x = 4$ por la izquierda también $f(x)$ tiende a 7, es decir:

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = 7$$

Figura 1. Cuellar (2006)

Cabe señalar que estos libros proporcionan ejemplos de cómo se utiliza la definición de límite en funciones racionales, los tres coinciden en realizarlo de manera algebraica, pero Almazán et al. (2005) y Cuellar (2006) van más allá de lo tradicional, dado que proponen el uso de tablas de valores y gráficas. Ver figura 1 y figura 2.



Si definimos $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ e intentamos calcular $f(1)$, no obtendríamos ningún resultado porque estaríamos intentando la división por cero.

Si elaboramos una tabla de valores para graficar la función tendremos:

x	-4	-2	0	1	2	4
$f(x)$	-3	-1	1	∞	3	5
(x, y)	$(-4, -3)$	$(-2, -1)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$	$(2, 3)$	$(4, 5)$

Los pares de valores parecen comportarse normalmente, pero cuando x se toma el valor de 1, la gráfica se corta. En estos casos pueden usarse los Límites para estudiar el comportamiento de $f(x)$ para valores de x muy cercanos a 1 y de ese modo obtener un valor que represente a $f(1)$.

Una situación numérica donde se evoca al **límite** puede ser el intento de calcular el valor $f(1)$ de la función del ejemplo anterior:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \qquad f(x)=\frac{(1)^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

Puesto que la división es entre cero, la función no estaría definida para $x=1$; sin embargo, en la vecindad de 1 donde $x \neq 1$ la función sí estaría definida, como se muestra en la tabla.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$	1	1.2	1.4	1.6	1.8	∞	2.2	2.4	2.6	2.8	3

Como ésta, en la matemática se encuentran situaciones donde resulta de interés conocer el comportamiento de las funciones cuando su variable independiente se acerca a cierto valor fijo; pero sin ser exactamente dicho valor.

Figura 2. Almazán et al. (2005)

Por otro lado, respecto de los libros del Nivel Superior como ya se mencionó, la información fue retomada de López (2011); los libros son: Stewart (2002) y Spivak (1992). En el primero se presenta el tema de límite de manera algebraica y de manera gráfica, igualmente, proporciona el uso de tablas de valores. Mientras que en el segundo se presentan gráficas para generar una idea de límite, posteriormente profundiza con la definición de límite y su aplicación en funciones algebraicas, pero el lenguaje matemático que utiliza es más complejo (López, 2011, pp. 54-62).

Como se puede observar de los cinco libros de texto, tres corresponden con lo declarado en los Planes y Programas de Estudio de NMS en México con lo que respecta al tema de límite. Uno de estos libros corresponde al Nivel Superior el cual podría servir de apoyo a los profesores de NMS para abordar este tema. En la siguiente tabla se muestran las definiciones de límite que proporcionan estos libros de texto:

Libro	Definición de Límite
Almazán et al. (2005)	*Definición de límite de un función:* Si f es la función, decimos que $\lim_{x\to a} f(x)=A$ si el valor de *f(x)* se aproxima $(\rightarrow)$ al valor *A*, cuando x toma valores cada vez más cercano al de a.
	Definición de límite con más rigor matemático: $\lim_{x\to a} f(x)=A$ si y solo si para cualquier número positivo elegido ε, por pequeño que sea, existe un número positivo δ tal que, siempre que $0<\lvert x-a\rvert<\delta$, entonces $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.
Cuellar (2006)	*Definición del concepto límite:* Se dice que una variable "v" tiende a la constante *L* como límite, cuando los valores sucesivos de "v" son tales que la diferencia $(v-L)$ puede llegar a ser menor que cualquier número infinitesimal positivo, denotado por "ε", prefijado tan pequeño como se quiera. La relación anterior se denota por "$v\rightarrow L$" y se lee "v tiende al límite *L*" o simplemente "v tiende a *L*"

	Intuitivamente podemos escribir que si una función *f(x)* se aproxima a un valor único *L* cuando x se aproxima a un número c tanto por la derecha como por la izquierda, entonces diremos que el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a c es *L* y lo denotamos por: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$.
Stewart (2002)	***Límite de una función:*** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ $\text{lím}_{x\to a}$ f(x) = L y se dice "el límite de *f(x)* es igual a *L* cuando *x* tiende a a" si podemos acercar arbitrariamente los valores de *f(x)* a *L* (tanto como queramos) aproximando *x* a a" pero sin igualar a a.
	Definición precisa de límite: Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al número a, excepto quizá a a mismo. Se dice que el límite de *f(x)* es *L*, cuando *x* tiende a a y se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, si para cada número $\varepsilon>0$ hay un número correspondiente $\delta>0$ tal que $\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$ siempre que $0<\lvert x-a\rvert<\delta$

Tabla 1. Definición de límite

2.3. Concepciones de los Alumnos Sobre el Límite

Es abundante la información que la investigación y la reflexión teórica en Didáctica de la Matemática han proporcionado respecto a las dificultades que se presentan en la adquisición del concepto límite. Por ejemplo, Sierpinska (1985) señala cinco clases de obstáculos: los ligados al concepto infinito, los que se refieren al concepto función, los relacionados con la intuición geométrica, los estrictamente lógicos asociados al uso de cuantificadores y finalmente, los que tienen que ver con el uso de símbolos. Por otra parte, Artigue (1995) señala otra dificultad, donde se observa la doble naturaleza, estructural y operacional, que tiene el concepto límite, que consiste en mostrar que en la definición formal de límite se concibe un solo proceso, mientras que en las producciones de los alumnos se dejan ver dos, uno que se efectúa sobre la variable y otro sobre los valores de la función.

Para indagar sobre los procedimientos que usan los alumnos al resolver límites indeterminados, se diseñó un cuestionario[1] el cual está constituido de nueve preguntas, en éstas se consideraron el cálculo de límites de manera algebraica, usando tablas de valores y gráficas. Las primeras dos preguntas involucran la simbología $x\to L$, la tercera implica el uso de una tabla de valores respecto de una función para determinar el comportamiento de su imagen, la cuarta, quinta, sexta y octava permiten observar los procedimientos de los alumnos al calcular límites de funciones. La séptima y la novena involucran al cálculo de límites dada la gráfica de la función.

El cuestionario se aplicó a un grupo de 23 alumnos de tercer año de NMS, de un Colegio de Bachilleres ubicado en la zona centro del estado de Guerrero, México. Cabe señalar que estos alumnos ya habían trabajado con el tema de límite. A continuación se presentan algunos resultados:

Preguntas 1 y 2: Con estas preguntas se quiso observar que tan familiarizados estaban los alumnos con la notación $x\to L$, en sus producciones se observó que la mayoría está familiarizada con dicha notación, pero no comprenden su significado (ver figura 3).

[1] El cuestionario se muestra en el anexo 1.

Cuando se dice que "x se acerca al número L" es equivalente a decir que "x tiende al número L" en lenguaje algebraico esto se escribe como:

a) $x = L$ b) $x \to L$ c) $x \leftarrow L$ d) $x \leftrightarrow L$

Para el caso particular cuando $L = 7$, ¿qué entiendes con la frase "x tiende a 7"?

que se va a sustituir x por siete

Figura 3. Preguntas 1 y 2

Pregunta 3: el objetivo de esta pregunta fue que los alumnos al llenar la tabla de valores donde la x está dada, determinaran cierta tendencia en los valores de $f(x)$. En sus producciones pudimos observar que la mayoría de ellos no logran mirar esta tendencia, es decir, no lograron ver que $f(x)$ se acerca a 3 cuando los valores de x se acercan a 2, tanto por la izquierda como por la derecha (ver figura 4).

Completa la siguiente tabla y contesta lo que se te pide:

¿Qué pasa con $f(x)$ cuando el valor de x se acerca a 2 pero que no es igual a dicho número?

Que va aumentando las decimas.

x	$f(x) = x^2 - 1$
1.9	2.61
1.99	2.9601
1.999	2.996001
1.9999	2.99960001
2.01	3.0401
2.001	3.004001
2.0001	3.00040001
2.00001	3.00004

Figura 4. Pregunta 3

Preguntas 4, 5, y 6: con estas preguntas se pretendía saber qué métodos utilizan los alumnos para calcular un determinado límite. De acuerdo a las producciones notamos que todos utilizaron el método de sustitución para el cálculo de los límites indicados (ver figura 5).

Calcula el límite de la función $2x - 5$ cuando x tiende a 3.

$\lim 2(3) - 5 = 1$

Describe el procedimiento para calcular el siguiente límite: $\lim_{x \to 1}(x^3 + 2)$

Primero tenemos que sustituir en la x o tenemos que colocar el numero que debe ir y empezar a hacer la operacion para obtener el resultado

De acuerdo con tu procedimiento descrito en la pregunta anterior calcula el siguiente límite:
$\lim_{x \to 2}(x^2 - 1) =$

$\lim ((2)^2 - 1) = \lim ((4) - 1) = 3$

Figura 5. Preguntas 4, 5 y 6

Pregunta 8: El objetivo de esta pregunta fue mirar si los alumnos hacían uso de otros métodos para calcular límites, ya que si empleaban el método de sustitución llegarían a resultados indeterminados. De acuerdo con las producciones de los alumnos, se pudo observar que ningún alumno hizo uso de otro método para el cálculo de los mismos (ver figura 6).

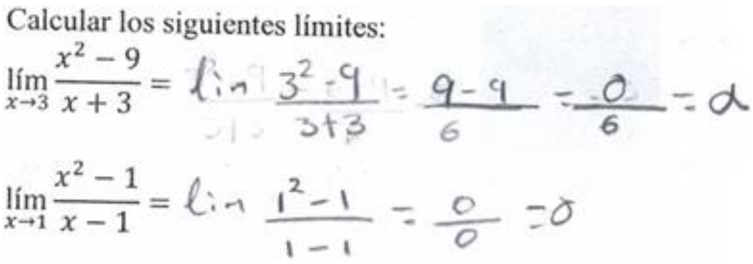


Figura 6. Pregunta 8

Preguntas 7 y 9: El objetivo de estas preguntas fue observar si los alumnos estaban familiarizados con el cálculo de límites empleando gráficas de algunas funciones. De acuerdo con lo realizado por ellos, notamos que en esta parte se presentaron mayores dificultades, ya que no se identificaron procedimientos donde se observará el apoyo en los gráficos proporcionados, para el cálculo de límites (ver figura 7).

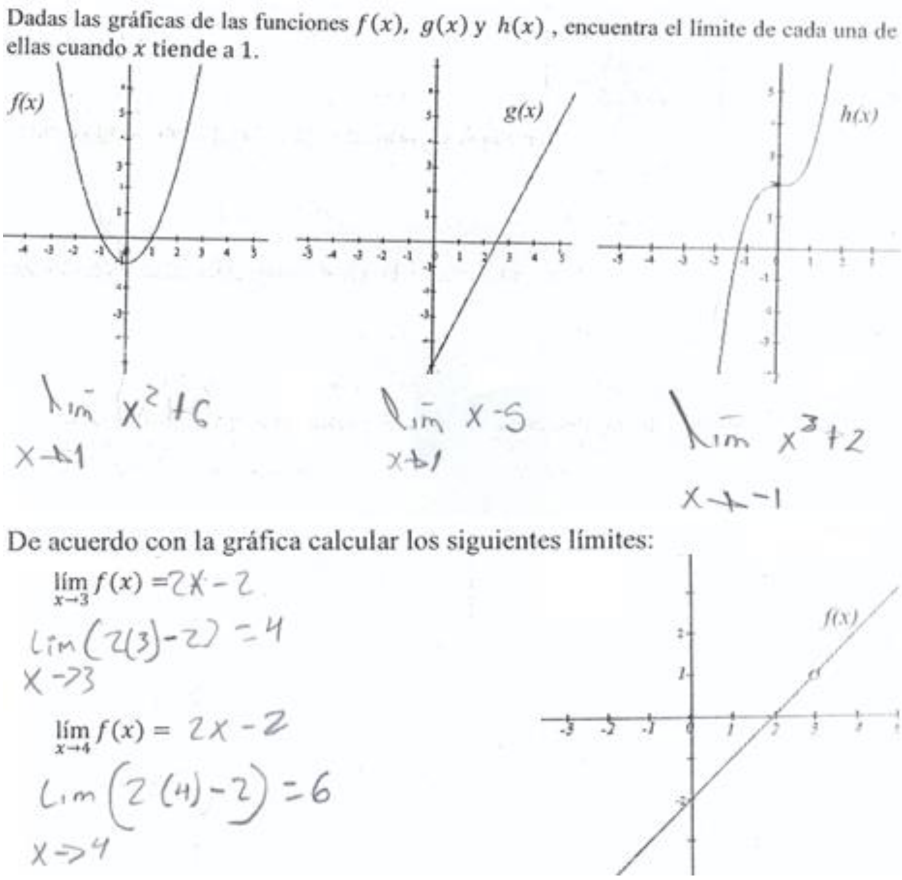


Figura 7. Preguntas 7 y 9

Los resultados de este cuestionario, muestran la existencia de dificultades para involucrar a la vez, aspectos algebraicos, el uso de tablas de valores y gráficas de parte de los alumnos al calcular límites indeterminados, tal y como se declara en los Planes y Programas de Estudio del NMS. Así mismo, se observó también, que hay dificultades para usar tanto tablas de valores como gráficos, por separado, para calcular dicho tipo de límites. Finalmente se observó que el grupo explorado abusa del uso del algoritmo de sustitución para calcular límites, en consecuencia, el cálculo de límites indeterminados se complica aún más.

3. Problema de investigación

Con base en los apartados anteriores, podemos señalar que existen diversas problemáticas referentes a la e-a del tema de límite, lo cual conllevaría a una investigación extensa para trabajar con todos ellos. Nosotros nos ocuparemos solamente del siguiente problema específico:

> ***Existen dificultades en alumnos del NMS al calcular límites indeterminados que involucran a su vez procedimientos algebraicos, el uso de tablas de valores y gráficas.***

Objetivo

Por lo que interesa formular y valorar una propuesta didáctica que permita desarrollar en alumnos de NMS la capacidad-habilidad de calcular límites indeterminados aplicando procedimientos algebraicos y haciendo uso de tablas de valores y gráficas.

4. Marco Teórico y Metodología

La teoría que sustenta nuestro trabajo de investigación es la TSD y la metodología a usar es la ID, ya que ambas nos conducen a cumplir el objetivo de nuestra investigación.

Por una parte, la TSD desarrollada por Guy Brousseau, aparece como un medio privilegiado, tanto para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, cómo para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos. Brousseau (1986), parte de ideas Piagetianas respecto de la construcción del conocimiento por parte de un sujeto, él cree que el alumno aprende, adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986, pp. 41-43).

Por otra parte, la ID permite construir lo que se denomina génesis artificial de un saber, en este génesis artificial se busca el camino más rápido y seguro para que el alumno construya con sentido un concepto matemático, evitando los retrocesos y estancamiento que históricamente hayan podido producirse, y reordenando los procesos de construcción de ese saber de acuerdo con pautas didácticas, haciendo su transposición didáctica de la manera más rigurosa posible, desde un punto de vista epistemológico (Chamorro, 2006, pp. 50-52).

4.1. Teoría de Situaciones Didácticas

De acuerdo a Brousseau (1986) una *situación a-didáctica* es aquella en la cual el alumno por iniciativa propia enfrenta cierto problema por sí solo, es decir, el alumno sólo habrá adquirido verdaderamente el conocimiento cuando sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. Una *situación didáctica* tiene la intención de que el alumno construya un conocimiento matemático específico, y nada mejor para ello que tal conocimiento aparezca a los ojos del alumno como la solución óptima del problema que se va a resolver. Dicha construcción depende de las actividades que desempeñan tanto el alumno como el profesor y va más allá de la idea de mera actividad práctica. Las situaciones didácticas se clasifican en situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

Situación de acción, aquí se genera la interacción entre el alumno y el medio físico. El alumno debe tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado. En esta fase el alumno se envía un mensaje así mismo mediante los ensayos y errores que hacen para resolver el problema.

Situación de formulación, cuyo objetivo es el intercambio de informaciones, con uno o varios alumnos. Para esto, deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que desean comunicar, lo cual admite la producción de un lenguaje, mismo que a su vez permite la generación de un modelo explícito.

Situación de validación, aquí es donde los alumnos deben justificar y validar sus estrategias puestas en marcha, para esto ellos elaboran pruebas para demostrar sus afirmaciones y de esa forma convencer a uno o varios compañeros de la validez de las afirmaciones que se hacen.

Situación de institucionalización, ésta situación está bajo la responsabilidad del profesor, en esta situación los alumnos asumen la significación socialmente establecida del conocimiento que ha sido elaborado por ellos en las situaciones de acción, formulación y validación.

4.2. Ingeniería Didáctica

De acuerdo a Douady (1995) una ID es un conjunto de secuencias de clase diseñadas, organizadas y articuladas coherentemente por un "profesor-ingeniero", para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo de alumnos específico. El diseño y la organización de situaciones didácticas, es el objeto de la ID. Su nombre evoca la necesidad de controlar herramientas profesionales, para producir secuencias de aprendizaje con ciertas garantías de éxito.

La ID será la metodología que nos conduzca a determinar aquellos elementos que serán esenciales para el logro del objetivo de nuestro trabajo de investigación. Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en la elaboración de una ID, estas son:

- Análisis preliminar
- Diseño y análisis a-priori
- Experimentación
- Análisis a-posteriori y validación

En el *análisis preliminar*, se analizan y determinan, desde una aproximación sistémica, dimensiones epistemológicas: el desarrollo histórico del concepto a tratar. Didácticas: como y cuando se debe de enseñar el concepto de acuerdo al sistema educativo. Y cognitivas: las concepciones de los alumnos, sus dificultades y obstáculos que enfrentan para apropiarse del concepto.

En el *diseño y análisis a-priori*, se decide sobre que variables didácticas son pertinentes y sobre cuales se actuará. Con esto se hace un análisis de restricciones y se determinan las variables de control y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. El objetivo del análisis a priori es determinar el comportamiento posterior de los alumnos, las selecciones hechas y su significado, este análisis se basa en la hipótesis "qué esperamos que suceda". Este análisis debe constar de una parte tanto descriptiva como predictiva. Una vez determinadas las variables didácticas y establecido el objetivo, se pasa al diseño de la propuesta didáctica la cual debe crear un medio propicio para que el alumno acepte la "invitación" al juego y se sienta desafiado a apropiarse del saber puesto sobre la mesa.

Experimentación, esta fase se lleva acabo con una cierta población de alumnos, en la cual el profesor implementa la propuesta didáctica y realiza los ajustes y adaptaciones necesarios según la dinámica de la clase lo exija, así como también observa y recolecta información útil para su posterior análisis.

Análisis a-posteriori y validación, esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación y de las producciones de los alumnos. Consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos ocurridos en la puesta en escena de la propuesta didáctica, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuánto se desvían de los resultados que se esperaban. De esta confrontación entre los análisis a priori y a posteriori surge la fase de validación de la propuesta didáctica. En dicha validación se confronta lo esperado y lo que se obtuvo en realidad.

5. Propuesta Didáctica

Dentro de la investigación desarrollada nos planteamos formular y valorar una propuesta didáctica[2], en la cual fueron consideradas cada una de las fases de la ID. Esta propuesta está constituida por cinco actividades, las cuales en conjunto conducen a desarrollar en alumnos de NMS la capacidad-habilidad de calcular límites indeterminados aplicando procedimientos algebraicos y haciendo uso de tablas de valores y gráficas. Dicha propuesta está pensada para desarrollarse en dos sesiones, en la primera se trabajarán las tres primeras actividades y en la segunda las dos restantes.

5.1. Diseño

A continuación se describe la fase de diseño y análisis a-priori de la ID, considerando cada una de las actividades que constituyen la propuesta didáctica así como los objetivos que se persiguen en cada una. Se mencionan también, las variables didácticas tomadas en cuenta y lo que se espera que los alumnos realicen en las mismas.

En *la actividad I* se propone el cálculo de ciertos límites, donde se busca que los alumnos usen el método por sustitución y obtengan la forma indeterminada ${}^{0}\!/_{0}$. Esta actividad corresponde a la situación de acción en la que se genera una interacción entre el alumno y el cálculo de límites. Posteriormente se integrarán equipos, en los que se consideran procedimientos diferentes (para generar discusión entre los integrantes) realizados por los alumnos, para poder integrar los mismos.

En *la actividad II* se considera la situación de formulación, en ésta los alumnos trabajarán en binas con la intención de intercambiar ideas, de forma tal que, los alumnos se darán cuenta que existen otros métodos para el cálculo de límites, tales como, el uso de tablas de valores y gráficas. En esta actividad las variables de control serán los diferentes valores que toma x al acercarse a un número. Tanto en esta actividad como en la IV se involucra intuitivamente a la noción de límite como un proceso de aproximación entre cantidades, optamos por considerar esta manera ya que el desarrollo histórico de este concepto inicia con ideas muy intuitivas y las concepciones de Newton, D'Alembert y Cauchy sobre el límite eran precisamente como aproximación entre cantidades.

La actividad III consiste en confrontar los resultados obtenidos en las actividades I y II, cuyo objetivo es que el alumno compruebe y mire que algunos límites “indeterminados” en realidad no lo son y sí tienen límite, y para ello se usarán como apoyo tablas de valores y gráficas, las variables de

[2] En el anexo 2 se encuentra la propuesta didáctica.

control son las funciones algebraicas de la forma $p(x)/q(x)$, que al factorizar se cancela el denominador. Esta actividad corresponde a la situación de validación ya que los alumnos tratan de convencer a uno o varios compañeros en la validez de sus resultados.

Posteriormente se realiza la situación de institucionalización, en la que el maestro formaliza lo trabajado en las actividades anteriores, es decir, se explica cómo se calcula el límite indeterminado de una función mediante el uso de tablas de valores y gráficas y la relación de éstas con el procedimiento algebraico. Para esto se considera o retoman resultados acertados de los mismos alumnos que se presentaron durante las situaciones de acción, formulación y validación.

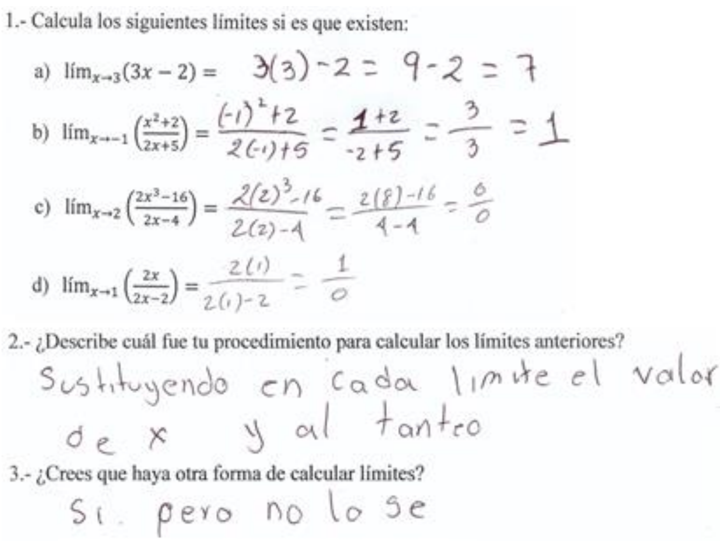
La actividad IV, tiene como objetivo que el alumno aplique lo realizado en las actividades anteriores, es decir, que determine la existencia o no del límite de una función, al completar y posteriormente analizar tanto la tabla de valores como la gráfica correspondiente. El trabajo a realizar es en binas para que los alumnos intercambien ideas para resolver la actividad.

La actividad V consiste en confrontar los resultados obtenidos en la actividad IV con los obtenidos en la actividad I, el objetivo de esta actividad es que el alumno compruebe y mire que la existencia del límite de una función se puede determinar mediante el comportamiento de su tabla de valores o su gráfica.

Por último, nuevamente se recurre a la situación de institucionalización, en donde el maestro formaliza lo trabajado en las actividades IV y V, explicando cómo se determina la existencia o no del límite de una función mediante el uso de tablas de valores y gráficas. Ver la propuesta completa en el anexo II.

5.2. Puesta en Escena y Resultados

En este apartado se muestran conjuntamente las fases de experimentación y análisis a-posteriori y validación que señala la ID. En cuanto a la experimentación ésta se llevó acabo con ocho alumnos de NMS que cursaban el tercer año en un Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de servicio (CBTis) ubicado en la zona centro del estado de Guerrero, México. Como se tenía pensado, la puesta en escena se llevó acabo en dos sesiones; a continuación se describe lo ocurrido en cada una de estas.


1.- Calcula los siguientes límites si es que existen:

a) $\lim_{x\to 3}(3x-2) = 3(3)-2 = 9-2 = 7$

b) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+2}{2x+5}\right) = \frac{(-1)^2+2}{2(-1)+5} = \frac{1+2}{-2+5} = \frac{3}{3} = 1$

c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^3-16}{2x-4}\right) = \frac{2(2)^3-16}{2(2)-4} = \frac{2(8)-16}{4-4} = \frac{0}{0}$

d) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{2x-2}\right) = \frac{2(1)}{2(1)-2} = \frac{1}{0}$

2.- ¿Describe cuál fue tu procedimiento para calcular los límites anteriores?

Sustituyendo en cada limite el valor de x y al tanteo

3.- ¿Crees que haya otra forma de calcular límites?

Si pero no lo se

Figura 8. Actividad I

En la *sesión 1*: se desarrolló el trabajo de las tres primeras actividades de la propuesta, en la actividad I, la mayoría de los alumnos realizaron el cálculo de los límites por medio de la sustitución (ver figura 8), a excepción de uno que realizó la factorización. Una vez terminada esta actividad el maestro formó binas para trabajar con la actividad II, cabe señalar que al alumno que realizó la factorización se le pidió trabajar con uno que presentó mayores dificultades en el cálculo de los límites.

Una vez formadas las binas se les proporcionó la actividad II, la cual está constituida por una parte tabular y otra gráfica. Respecto a la parte tabular, algunos alumnos tuvieron dificultades en el uso de la calculadora para el rellenado de la tabla, por lo cual fue necesario orientarlos. Durante el desarrollo no se presentó mayor dificultad, debido a que los alumnos se apoyaron de la tabla de valores para concordar que la función *g(x)* se acercaba a ***12*** cuando *x* tomaba valores cercanos a ***2***, por lo cual dedujeron que el límite de la función era ***12*** (ver figura 9). Para los que no tenían claro esto, fue necesario hacer uso de las variables de control, es decir, se les dijo que le dieran valores cada vez más cercanos a ***2***, por ejemplo ***1.9999***, ***2.0001*** y que observaran que pasaba con el valor de ***g(x).***

Dada la función $g(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$ completa la siguiente tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 2, **pero que nunca son 2.**

Por la izquierda ⟶ ⟵ Por la derecha

x	1	1.5	1.75	1.999		2.001	2.25	2.5	3
$g(x)$	7	9.25	10.5625	11.994001		12.006001	13.5625	15.25	19

De acuerdo con la tabla anterior, contesta las siguientes preguntas:

4.- ¿A qué valor se acerca $g(x)$ cuando los valores de x se acercan por la izquierda a 2, pero que nunca son 2? a 12

5.- ¿A qué valor se acerca $g(x)$ cuando los valores de x se acercan por la derecha a 2, pero que nunca son 2? a 12

6.- Cuándo los valores de x se acercan tanto por la izquierda como por la derecha a 2, ¿a qué número se acerca $g(x)$? a 12

7.- De acuerdo a las preguntas anteriores, cual es límite de la función $g(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$ cuando x se acerca 2, es decir, ¿cuál es el $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)$? Argumenta tu respuesta.

Seria 12 porque en la tabla se muestra que ningon nomero llega a "12" ni tampoco a "2" solo esos dos nomeros faltan para que se acomplete la tabla y por eso dedocamos que el valor del limite es "12"

Figura 9. Actividad II, tabla de valores

Con respecto a la parte gráfica, los alumnos dedujeron que el límite de la función cuando $x\to 2$ es 12 esto con el apoyo de la gráfica de la función. Algunos alumnos tuvieron dificultades al inicio para saber qué valor le corresponde a $g(x)$, para ello se les indicó que se apoyaran con trazos auxiliares (ver figura 10). El objetivo de esta actividad no se cumplió del todo, ya que un equipo no logró comprender que el límite de una función puede existir en un punto aunque en ese punto la gráfica no sea continua (ver figura 11). Esto deja ver algunas concepciones erróneas que tienen ciertos alumnos sobre los conceptos de límite y continuidad.

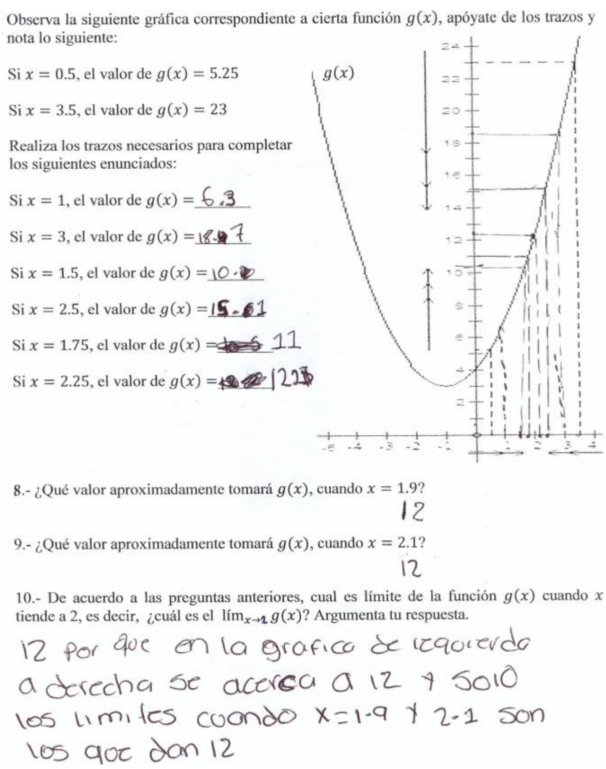


Figura 10. Actividad II, gráfica

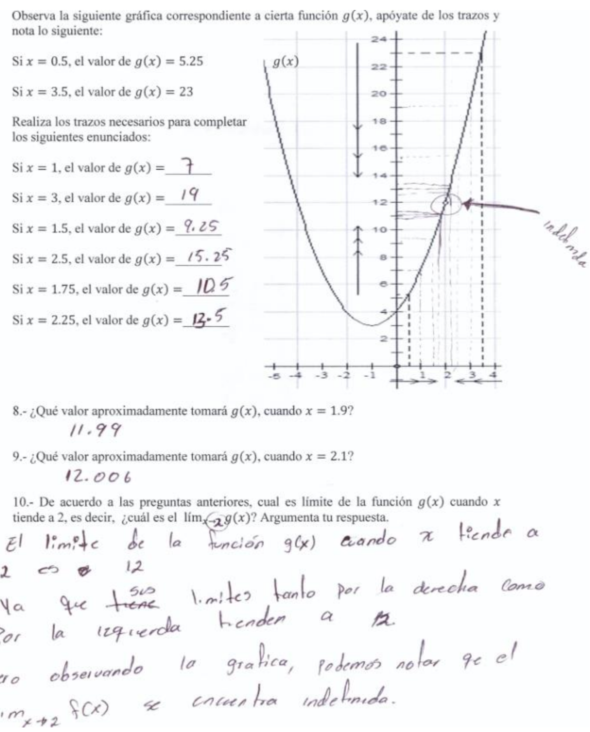


Figura 11. Actividad II, gráfica

En la actividad III, los alumnos confrontaron lo que hicieron en la actividad I y II, con lo cual se dieron cuenta que la función del inciso (*c*) de la actividad I y las funciones (de la tabla y gráfica) de la actividad II eran las mismas, por lo cual se les pidió que compararan los límites y emitieran una conclusión respecto al verdadero límite de la función (ver figura 12). El objetivo de esta actividad se cumplió ya que los alumnos se dieron cuenta que es válido identificar la tendencia del límite de una función mediante el uso de gráficas y/o por el comportamiento en su tabla de valores.

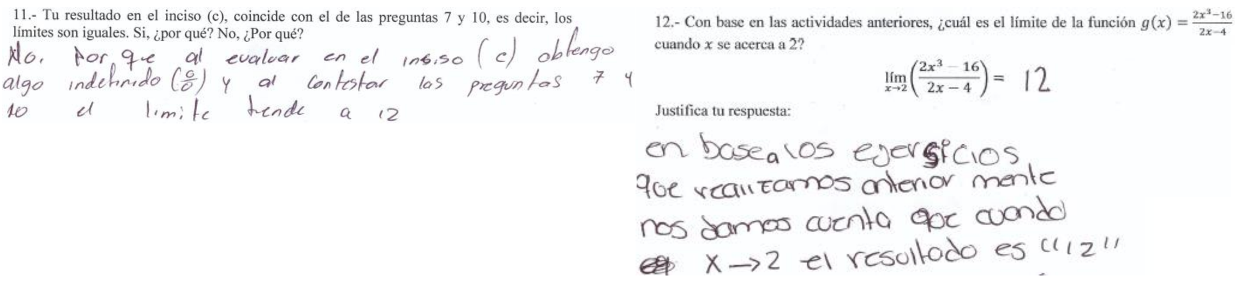


Figura 12. Actividad III

Posterior a esto se realizó la institucionalización por parte del profesor, donde se retomaron cosas interesantes ocurridas durante la realización de las tres actividades y con ello, indicar al alumno que la tendencia de límites indeterminados mediante el uso de tablas de valores, o mediante su gráfica, es otra opción o recurso del que se pueden apoyar para encontrar o resolver limites indeterminados, además, de no dejar de lado los procedimientos algebraicos.

En la *sesión 2*: se desarrollaron las dos actividades restantes de la propuesta, en la actividad IV los alumnos continuaron trabajando en binas, está actividad se constituye por una parte tabular y otra gráfica. Respecto a la parte tabular, los alumnos lograron deducir (con el apoyo y análisis de la tabla de valores) que el límite de la función no existe (ver figura 13). En esta parte no se logró que los alumnos observaran que por la derecha y por la izquierda $f(x)$ tiende a ∞ y $-\infty$, respectivamente cuando $x \to 1$, es necesario modificar las preguntas o agregar otras más.

Dada la función $f(x) = \frac{x}{x-1}$ completa la siguiente tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 1, **pero que nunca son 1.**

Por la izquierda ⟶ ⟵ Por la derecha

x	0	0.5	0.75	0.999	1.001	1.25	1.5	2
$f(x)$	0	-1	-3	-999	1001	5	3	2

De acuerdo con la tabla anterior, contesta las siguientes preguntas:

13.- ¿Qué valor toma $f(x)$ cuando los valores de x se acercan por la izquierda a 1, pero que nunca son 1?

-1000

14.- ¿Qué valor toma $f(x)$ cuando los valores de x se acercan por la derecha a 1, pero que nunca son 1?

1000

15.- Cuándo los valores de x se acercan tanto por la izquierda como por la derecha a 1, ¿se acerca a algún número $f(x)$?

No

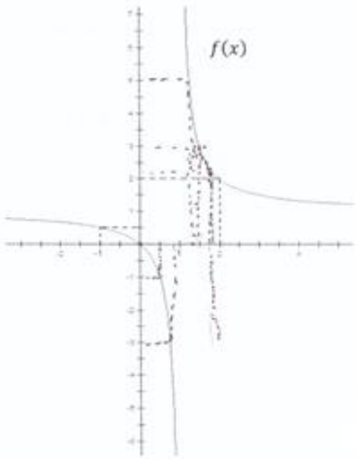
16.- De acuerdo a las preguntas anteriores, ¿existirá el límite de la función $f(x) = \frac{x}{x-1}$ cuando x se acerca 1?, es decir, ¿el $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}\right)$ existe? Argumenta tu respuesta.

NO existe ya que es un limite indeterminado ya que los signos son distintos al sercandose a la derecha y a la izquierda.

Figura 13. Actividad IV, tabla de valores

Con respecto a la parte gráfica, los alumnos apoyándose de la gráfica de la función pudieron observar que el límite no existe (ver figura 14). El objetivo de esta actividad se cumplió, debido a que los alumnos lograron deducir que el límite de las funciones no existía al recurrir al uso y análisis tanto de tablas de valores como de gráficas.

Observa la siguiente gráfica correspondiente a cierta función $f(x)$, apóyate de los trazos y nota lo siguiente:



Si $x = -1$, el valor de $f(x) = 0.5$

Si $x = 2$, el valor de $f(x) = 2$

Realiza los trazos necesarios para completar los siguientes enunciados:

Si $x = 0$, el valor de $f(x) =$ 0

Si $x = 1.75$, el valor de $f(x) =$ 2.333

Si $x = 0.5$, el valor de $f(x) =$ -1

Si $x = 1.5$, el valor de $f(x) =$ 3

Si $x = 0.75$, el valor de $f(x) =$ -3

Si $x = 1.25$, el valor de $f(x) =$ 5

17.- ¿Qué valor aproximadamente tomara $f(x)$, cuando $x = 0.9$?

-9...

18.- ¿Qué valor aproximadamente tomara $f(x)$, cuando $x = 1.1$?

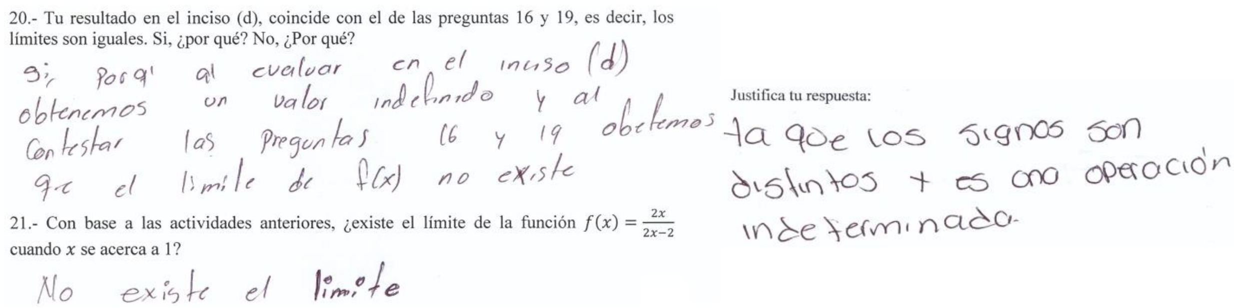
11

19.- De acuerdo a las preguntas anteriores, ¿existirá el límite de la función $f(x) = \frac{x}{x-1}$ cuando x tiende a 1?, es decir, ¿el $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}\right)$ existe? Argumenta tu respuesta.

No, porque no se acerca a ningun número.

Figura 14. Actividad IV, gráfica

En la actividad V, los alumnos confrontaron el resultado del inciso (*d*) de la actividad I con lo que obtuvieron en la actividad IV, se les pidió que compararan los límites y emitieran una conclusión respecto a la existencia o no del límite de la función (ver figura 15). El objetivo de esta actividad se cumplió ya que los alumnos lograron identificar la existencia o no del límite de una función mediante el uso de gráficas y/o por el comportamiento en su tabla de valores.



20.- Tu resultado en el inciso (d), coincide con el de las preguntas 16 y 19, es decir, los límites son iguales. Si, ¿por qué? No, ¿Por qué?

Si, porq' al evaluar en el inciso (d) obtenemos un valor indefinido y al contestar las preguntas 16 y 19 obtenemos q-e el limite de f(x) no existe

21.- Con base a las actividades anteriores, ¿existe el límite de la función $f(x) = \frac{2x}{2x-2}$ cuando x se acerca a 1?

No existe el limite

Justifica tu respuesta:

Ya qoe los signos son distintos + es ona operación indeterminada.

Figura 15. Actividad V

Por último, se realizó la situación de institucionalización por parte del profesor, donde se retomaron cosas interesantes ocurridas durante la realización de las dos actividades y con esto, indicar al alumno que la existencia de límites indeterminados se puede determinar mediante un análisis del comportamiento de su tabla de valores, o mediante la visualización de su gráfica.

6. Conclusiones

En esta investigación, el objetivo principal fue formular y valorar una propuesta didáctica que contribuyera al desarrollo de la habilidad-capacidad, de calcular límites indeterminados haciendo uso de tablas de valores y gráficas, de alumnos de NMS de la educación mexicana. Pero, a lo largo de dicha investigación resultaron ciertos aspectos que nos parecen importantes resaltar, estos son:

- La evolución histórica del concepto límite ha llevado un largo tiempo para llegar a su formalización. Observamos que este concepto no se desarrolló de forma independiente, ya que fue necesario de otros conceptos tales como, función, continuidad, infinito; para lograr su comprensión. Consideramos que es una verdadera proeza enseñar todo lo que implica el proceso de formación del concepto límite en unas cuantas clases, ya que generaciones de grandes matemáticos dedicaron mucho tiempo para poder desarrollar y entender dicho concepto.
- Se identificó, en algunos libros de texto, que en la presentación del concepto límite prioriza lo algebraico, mientras que los aspectos gráfico y tabular casi no son considerados. Creemos que este hecho favorece, que en su mayoría los alumnos, recurran a la aplicación del método de sustitución para calcular límites, lo cual agrava el problema cuando se encuentran con límites indeterminados.
- De los mismos resultados presentados, creemos que involucrar el uso de tablas de valores y gráficas, en el cálculo de límites, podría ayudar al alumno a desarrollar ideas intuitivas al calcular los mismos y con ello saber identificar cuando un límite es indeterminado o no.

Con respecto a la propuesta didáctica podemos decir que el objetivo se cumplió en gran medida, ya que al analizar las producciones de los alumnos, la mayoría de participantes lograron desarrollar la capacidad-habilidad para calcular límites indeterminados haciendo uso de tablas de valores y de gráficas, sin dejar de lado los métodos algebraicos. Sin embargo, nos damos cuenta que algunas preguntas planteadas en las actividades pueden ser mejoradas o ser replanteadas (por parte del profesor) de acuerdo a las problemáticas presentes en los alumnos y con ello lograr una mejor comprensión del tema en juego.

Bibliografía

Almazán, J., Espinosa, E., Fitz, E. y Rodríguez, O. (2005). *Matemáticas V Cálculo diferencial*. Distrito Federal, México: UAG.

Anfossi, A. y Flores, M. (2006). *Cálculo diferencial e integral*. Distrito Federal, México: Progreso.

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Distrito Federal, México: Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes des didactiques des mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematique,* 7(2), 33-115.

Chamorro, M. (2006). *Didáctica de las matemáticas*. Distrito Federal, México: Prentice Hall.

Cuellar, J. (2006). *Geometría analítica y cálculo diferencial*. Monterrey Nuevo León, México: THOMSON.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 61-96. Iberoamérica: Bogotá.

Ferrante, J. (2009). *Una introducción al concepto de límite (dos mil años en un renglón).* Buenos Aires: edUTecNe.

López, E. (2011). *Un estado del arte sobre investigaciones cognitivas acerca del concepto de límite. El caso de habla hispana*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, México.

SEP (2012). Bachillerato Tecnológico. Programa de Estudios. Matemáticas. Distrito Federal, México: DGME/SEP.

SEP (2012). Dirección General de Bachillerato. Programas de Estudio. México, Distrito Federal, México: DGME/SEP.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Reserches en Didactique des Mathématiques.6*, 45-79.

Spivak, M. (1992). *Cálculus*. España: Reverté S.A.

Stewart J. (2002). *Cálculo Multivariable*. Distrito Federal, México: THOMSON.

Víctor Ignacio Espíritu Montiel. Nació en Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México, el día 26 de abril de 1987. Es licenciado en Matemáticas, actualmente es estudiante de la maestría en Ciencias, Área: Docencia de la Matemática, de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro).

Catalina Navarro Sandoval. Nació en la Ciudad de México, el día 30 de marzo de 1977. Es maestra en Ciencias, en el área de Matemática Educativa por CINVESTAV-IPN, actualmente es profesora de Nivel Superior (licenciatura y posgrado) de la Unidad Académica de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro).

Anexo I (Cuestionario-Cognitivo)

Analiza cada uno de los siguientes enunciados y contesta lo que se te pide.

1.- Cuando se dice que "*x* se acerca al número *L*" lo que es equivalente a decir que "*x* tiende al número *L*", en lenguaje algebraico, esto se escribe como:

a) $x = L$ b) $x \to L$ c) $x \leftarrow L$ $x \leftrightarrow L$

2.- Para el caso particular cuando L=7, ¿qué entiendes con la frase "*x* tiende a 7"

3.- ¿Qué pasa con $f(x)$ cuando el valor de *x* se acerca a *2* pero no es igual a dicho número?
Completa la tabla y contesta lo que se te pide:

x	$f(x) = x^2 - 1$
1.9	
1.99	
1.999	
1.9999	
2.01	
2.001	
2.0001	
2.00001	

4.- Calcula el límite de la función $2x - 5$ cuando *x* tiende a *3.*

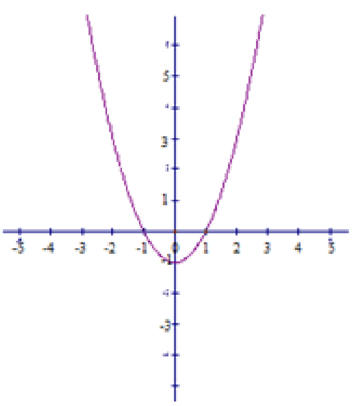
5.- Describe el procedimiento para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}(x^3 + 2)$$

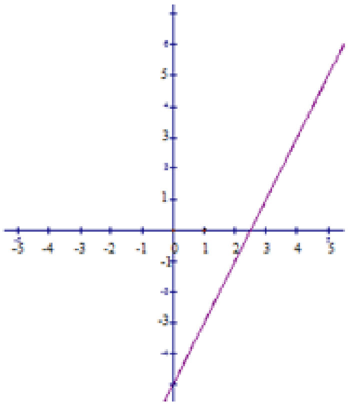
6.- De acuerdo con tu procedimiento descrito en la pregunta anterior calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 1) =$$

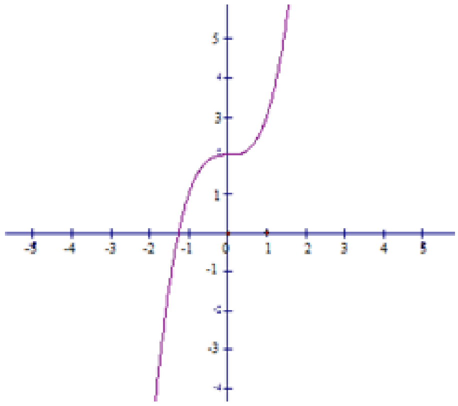
7.- Dadas las gráficas de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, encuentra el límite de cada una de ellas cuando x tiende a 1



$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$

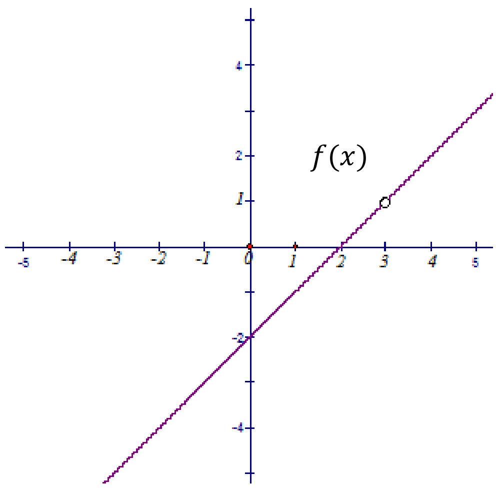
8.- Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}= \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=$$

9.- De acuerdo con la gráfica calcular los siguientes límites:

$\lim_{x\to 3} f(x) =$

$\lim_{x\to 4} f(x) =$



Anexo II (Propuesta Didáctica)

Actividad I

1.- Calcula los siguientes límites si es que existen:

a) $\text{lím}_{x\to 3}(3x-2) =$

b) $\text{lím}_{x\to -1}\left(\frac{x^2+2}{2x+5}\right) =$

c) $\text{lím}_{x\to 2}\left(\frac{2x^3-16}{2x-4}\right) =$

d) $\text{lím}_{x\to 1}\left(\frac{2x}{2x-2}\right) =$

2.- ¿Describe cuál fue tu procedimiento para calcular los límites anteriores?

3.- ¿Crees que haya otra forma de calcular límites?

Actividad II

Dada la función $g(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ completa la siguiente tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 2, **pero que nunca son 2.**

Por la izquierda $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ Por la derecha

x	1	1.5	1.75	1.999		2.001	2.25	2.5	3
$g(x)$									

De acuerdo con la tabla anterior, contesta las siguientes preguntas:

4.- ¿A qué valor se acerca $g(x)$ cuando los valores de x se acercan por la izquierda a 2, pero que nunca son 2?

5.- ¿A qué valor se acerca $g(x)$ cuando los valores de x se acercan por la derecha a 2, pero que nunca son 2?

6.- Cuándo los valores de x se acercan tanto por la izquierda como por la derecha a 2, ¿a qué número se acerca $g(x)$?

Recuerda que en tus clases de Cálculo Diferencial trabajaste con la definición de límite de una función en un punto, a manera de recordatorio te presentamos dicha definición:

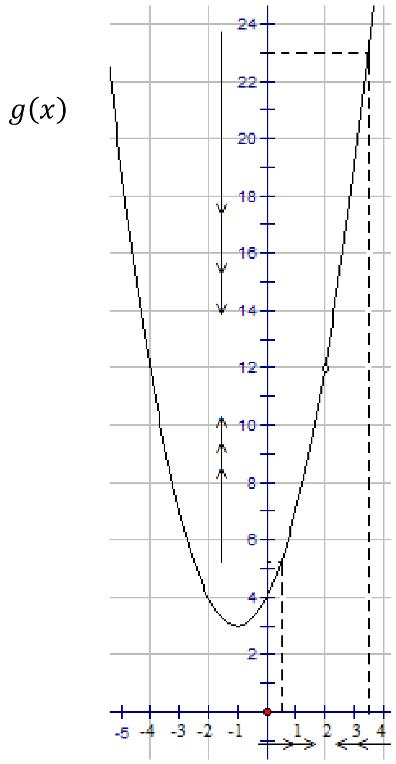
> *"Sí f es una función, decimos que $\lim_{x\to \boldsymbol{a}} f(x) = A$ si el valor de $f(x)$ se aproxima al valor A, cuando x toma valores cada vez más cercanos al de $\boldsymbol{a}$"*

7.- De acuerdo a las preguntas anteriores, cual es límite de la función $g(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ cuando x se acerca 2, es decir, ¿cuál es el $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)$? Argumenta tu respuesta.

Observa la siguiente gráfica correspondiente a cierta función $g(x)$, apóyate de los trazos y nota lo siguiente:

Si $x = 0.5$, el valor de $g(x) = 5.25$

Si $x = 3.5$, el valor de $g(x) = 23$



Realiza los trazos necesarios para completar los siguientes enunciados:

Si $x = 1$, el valor de $g(x) =$_______

Si $x = 3$, el valor de $g(x) =$_______

Si $x = 1.5$, el valor de $g(x) =$_______

Si $x = 2.5$, el valor de $g(x) =$_______

Si $x = 1.75$, el valor de $g(x) =$_______

Si $x = 2.25$, el valor de $g(x) =$_______

8.- ¿Qué valor aproximadamente tomará $g(x)$, cuando $x = 1.9$?

9.- ¿Qué valor aproximadamente tomará $g(x)$, cuando $x = 2.1$?

10.- De acuerdo a las preguntas anteriores, cual es límite de la función $g(x)$ cuando x tiende a 2, es decir, ¿cuál es el $\lim_{x\to 1} g(x)$? Argumenta tu respuesta.

Actividad III

Revisa la actividad I, en la pregunta 1 del inciso (c) nota que corresponde a la misma función que trabajamos en la actividad II

$$\frac{2x^3-16}{2x-4} = \frac{(2)(x^3-8)}{(2)(x-2)} = \frac{x^3-8}{x-2}$$

Además la gráfica mostrada en esta actividad también corresponde a esta función,

$$\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x)^3-(2)^3}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{x-2}=x^2+2x+4$$

De acuerdo con esto contesta lo siguiente:

11.- Tu resultado en el inciso (c), coincide con el de las preguntas 7 y 10, es decir, los límites son iguales. Si, ¿por qué? No, ¿Por qué?

12.- Con base en las actividades anteriores, ¿cuál es el límite de la función $g(x)=\frac{2x^3-16}{2x-4}$ cuando x se acerca a 2?

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^3-16}{2x-4}\right)=$$

Justifica tu respuesta:

Actividad IV

Dada la función $f(x)=\frac{x}{x-1}$ completa la siguiente tabla cuando los valores de x se acercan por la izquierda y por la derecha a 1, **pero que nunca son 1.**

Por la izquierda $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ Por la derecha

x	0	0.5	0.75	0.999		1.001	1.25	1.5	2
$f(x)$									

De acuerdo con la tabla anterior, contesta las siguientes preguntas:

13.- ¿Qué valor toma $f(x)$ cuando los valores de x se acercan por la izquierda a 1, pero que nunca son 1?

14.- ¿Qué valor toma $f(x)$ cuando los valores de x se acercan por la derecha a 1, pero que nunca son 1?

15.- Cuándo los valores de x se acercan tanto por la izquierda como por la derecha a 1, ¿se acerca a algún número $f(x)$?

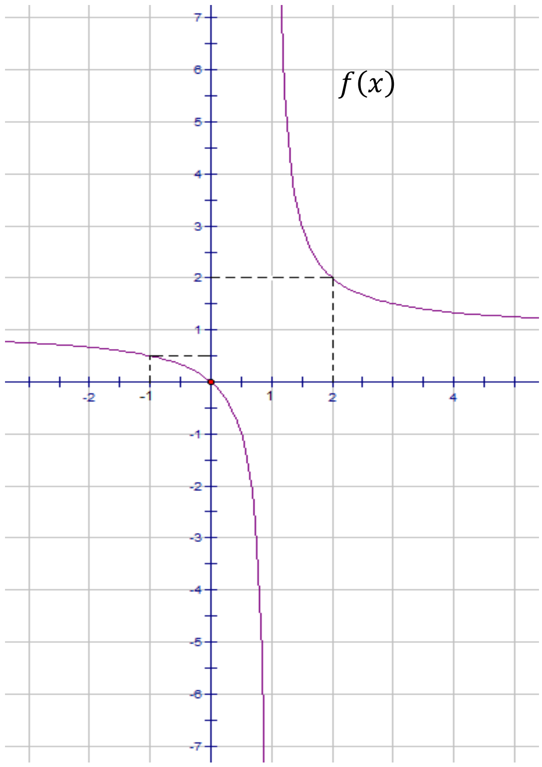
16.- De acuerdo a las preguntas anteriores, ¿existirá el límite de la función $f(x)=\frac{x}{x-1}$ cuando x se acerca 1?, es decir, ¿el $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}\right)$ existe? Argumenta tu respuesta.

Observa la siguiente gráfica correspondiente a cierta función $f(x)$, apóyate de los trazos y nota lo siguiente:

Si $x=-1$, el valor de $f(x)=0.5$

Si $x=2$, el valor de $f(x)=2$

Realiza los trazos necesarios para completar los siguientes enunciados:



Si $x = 0$, el valor de $f(x) =$_______

Si $x = 1.75$, el valor de $f(x) =$_______

Si $x = 0.5$, el valor de $f(x) =$_______

Si $x = 1.5$, el valor de $f(x) =$_______

Si $x = 0.75$, el valor de $f(x) =$_______

Si $x = 1.25$, el valor de $f(x) =$_______

17.- ¿Qué valor aproximadamente tomara $f(x)$, cuando $x = 0.9$?

18.- ¿Qué valor aproximadamente tomara $f(x)$, cuando $x = 1.1$?

19.- De acuerdo a las preguntas anteriores, ¿existirá el límite de la función $f(x) = \frac{x}{x-1}$ cuando x tiende a 1?, es decir, ¿el $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1}\right)$ existe? Argumenta tu respuesta.

Actividad V

Revisa la actividad I y fíjate en la pregunta 1, en el inciso (d), nota que corresponde a la misma función que trabajamos en la actividad IV

$$\frac{2x}{2x-2} = \frac{(2)(x)}{(2)(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

Además la gráfica mostrada en esta actividad también corresponde a esta función,

De acuerdo con esto contesta lo siguiente:

20.- Tu resultado en el inciso (d), coincide con el de las preguntas 16 y 19, es decir, los límites son iguales. Si, ¿por qué? No, ¿Por qué?

21.- Con base a las actividades anteriores, ¿existe el límite de la función $f(x) = \frac{2x}{2x-2}$ cuando x se acerca a 1?

Justifica tu respuesta: