Recibido: miércoles, 11 octubre 2006; revisado: martes, 17 octubre 2006

economía ::

matematicalia

revista digital de divulgación matemática

Vol. 3, no. 1 (feb. 2007)

Las matemáticas y la "mano invisible" de Adam Smith[1]

Julio Segura
Universidad Complutense de Madrid y Comisión Nacional del Mercado de Valores
e-mail: jsegura@cnmv.es
página web: http://www.ucm.es/info/anaeco

Pinche sobre una fórmula para ampliarla. Vuelva a pinchar sobre ella para reducirla, o pinche manteniendo pulsada la tecla [shift] para reducir todas las que permanezcan ampliadas.

1. Introducción

Todas las mañanas entro en un pequeño bar del barrio, pido café y churros, desayuno, pago 1,95 euros y me voy a trabajar. Esto es algo que hacemos cientos de miles de personas cada día sin reflexionar sobre un acto tan simple y cotidiano, de igual forma que nunca pensamos qué principios físico-químicos rigen el acto de arrancar el coche. Pero, ¿qué contestaría un economista si le preguntaran qué hay detrás de la acción descrita desde el punto de vista del análisis microeconómico?

El café viene de Brasil, la cafetera fue fabricada en Italia, las tazas y vasos en Manises, los churros a pocas manzanas del bar (han de estar recientes), el camarero es colombiano... Esto implica la conexión entre los productores de café brasileños, el transporte transoceánico, la importación de maquinaria europea, la industria de la loza valenciana, los harineros y productores de aceite, el mercado de trabajo, la inmigración... Tras un acto tan simple como desayunar y pagar 1,95 euros hay, literalmente, varios miles de decisiones individuales de personas y empresas (microeconómicas) que se han tenido que coordinar con precisión para que en un lugar exacto (el bar concreto) y en un momento preciso (las 7:00 am) de un día específico (hoy) pueda desayunar. *¿Cómo se logra la coordinación de estas decisiones individuales?* Esta es la pregunta del microeconomista, y la respuesta es: *a través de mecanismos de asignación, de entre los que el más extendido es* ***el mercado***.

Por lo tanto, la tarea del microeconomista es el análisis de las *decisiones de los agentes individuales* (consumidores y empresas) y el estudio de los *mecanismos de coordinación de dichas decisiones* (mecanismos de asignación).

2. ¿Qué es la "mano invisible"?

Adam Smith, profesor escocés de ética de la segunda mitad del s. XVIII, considerado como fundador de la teoría económica moderna, en su más famosa obra, *La riqueza de las naciones* (1776), formuló el *principio de la mano invisible*: si cada consumidor y cada empresa persiguen como objetivo su beneficio individual, el libre intercambio en mercados competitivos logrará que todos los bienes y servicios alcancen un precio al cual todos los planes individuales de compra y venta se podrán cumplir, y la asignación resultante será eficiente[2].

El mercado competitivo, desde este punto de vista, es un mecanismo de asignación con características precisas. En primer lugar, obviamente ha de ser competitivo, lo que quiere decir que ningún agente individual tiene capacidad para influir sobre el precio al que se intercambian los bienes, lo que normalmente se califica como *comportamiento paramétrico de los agentes respecto a los precios*. En segundo lugar, los precios deben transmitir toda la información necesaria para que los agentes tomen sus decisiones, lo que asegura que todos los agentes tienen la misma información (no existen asimetrías informativas que pueden beneficiar a unos agentes respecto de otros).

Pues bien, desde la formulación por Adam Smith, una parte sustancial de la investigación microeconómica se ha dedicado a tratar de probar y refinar el resultado de que un sistema de mercados competitivos logra una asignación eficiente de los recursos. ¿Cómo?

En primer lugar, hay que formular una teoría del comportamiento de los agentes individuales, en nuestro caso, consumidores[3], es decir, modelar las acciones de los consumidores de forma que sepamos cómo dependerán sus demandas de las variaciones en las variables exógenas: precios y cantidades iniciales de los bienes de consumo que poseen, o de la renta. En segundo lugar, habrá que *agregar* las demandas de todos los consumidores para cada bien y ver cómo se fijan los precios en cada mercado. En tercer lugar, habrá que comprobar si, a los precios determinados por los mercados competitivos, los planes individuales de demanda son o no realizables, y también probar que el sistema de precios finalmente resultante presenta propiedades de eficiencia. Y la presentación estará orientada a explicitar los instrumentos matemáticos que se utilizan para todo ello.

3. El comportamiento de los consumidores: teoría de la demanda individual

Para formalizar el comportamiento del consumidor representativo, supondremos que actúa racionalmente. Esto quiere decir, en lo esencial, que es capaz de valorar comparativamente las posibles decisiones y que, dada la limitación que implica disponer inicialmente de una cantidad finita de bienes de consumo y los precios a los que puede intercambiarlos, elegirá, de entre las opciones accesibles, aquella que más valore.

El primer paso, por lo tanto, será ver cómo ordena sus posibles alternativas el consumidor. Puesto que el consumidor elige cantidades de los bienes a consumir, si suponemos que existen n bienes $(X_1,\ldots,X_n)$, se trata de discutir cómo comparará el consumidor los distintos posibles vectores de cantidades no negativas de los bienes de consumo $x^r=\left(x_1^r,\ldots,x_n^r\right)\in\Re_+^n$, donde x_j^r $(j=1,\ldots,n)$ es la cantidad del bien j -ésimo que contiene el vector de consumo r -ésimo.

Para ello, se define una relación binaria $\succsim$ entre dos vectores cualesquiera de consumo, tal que $x^0\succsim x^1$ significa que el vector x^0 es al menos tan valorado como el vector x^1 por el consumidor. Los llamados *axiomas de elección del consumidor* proporcionan una estructura definida a la relación binaria $\succsim$.

Los de *completitud* (cualesquiera dos vectores posibles de consumo son ordenables según $\succsim$), *reflexividad* y *transitividad* garantizan que $\succsim$ constituye un *orden completo débil* en $\Re_+^n$; el de *monotonía* (el consumidor prefiere mayores a menores cantidades de los bienes) asegura que $\succsim$ es monótona creciente; el de *convexidad estricta* de las preferencias indica que se prefieren “mezclas” de dos vectores de consumo a uno de ellos. Si se añaden el de *continuidad* (los conjuntos $B(x^0)=\left\{x\,/\,x\succsim x^0\right\}$ y $W(x^0)=\left\{x\,/\,x^0\succsim x\right\}$ son cerrados) y el de *diferenciabilidad*, podremos disponer de una función $U(x)$, llamada *función de utilidad*, que asigna un número real a cada vector de consumo de forma tal que $U(x^0)\geq U(x^1)$ implica que x^0 es estrictamente preferido a x^1, y $U(x^0)=U(x^1)$ indica que ambos vectores son indiferentes para el consumidor. $U(x)$ es, además, una función C^2.

Ahora ya se está en condiciones de formular el problema del equilibrio del consumidor representativo como un problema de *maximización condicionada*: el consumidor tratará de maximizar $U(x)$ sometida a la restricción de sus disponibilidades, es decir:

$$\begin{aligned}&Max\,U(x)\\&s.a: p^0x=p^0x^I=y^0,\end{aligned}\tag{1}$$

donde p^0 es el vector fila de precios de los n bienes[4] y x^I es el vector columna de las cantidades inicialmente poseídas de los bienes por el consumidor. Como es obvio, el primer miembro de la restricción de (1) es el gasto en que incurrirá el consumidor por adquirir el vector de consumo x a los precios existentes y el segundo el valor a dichos precios de sus tenencias iniciales, es decir, su renta disponible para el gasto (y^0) a los precios dados.

Utilizando multiplicadores de Lagrange en (1) y aplicando el teorema de la función implícita, se demuestra la existencia de funciones de demanda de los bienes:

$$x=x(p,y),\tag{2}$$

que son funciones C^2, homogéneas de grado cero en (p,y) [5].

4. La agregación de las funciones de demanda individuales y la definición de equilibrio general competitivo (EGC)

Supongamos ahora una economía de intercambio en la que existen H consumidores. ¿Cuánto demandarán de cada bien el conjunto de H consumidores? Utilizando superíndices para identificar al consumidor y subíndices para identificar a cada bien, la demanda total de, por ejemplo, el bien X_r será:

$$x_r=\sum_{h=1}^{H}x_r^h(p)=x_r(p)\ ^{[6]}\qquad(r=1,\ldots,n),\tag{3}$$

siendo obviamente las funciones agregadas de demanda C^2 y homogéneas de grado cero en p.

Ahora estamos en disposición de definir un *vector de precios de equilibrio* p^* como aquel para el que las cantidades demandadas de cada bien se igualan a las cantidades disponibles para el intercambio, es decir:

$$z_r(p^*)=x_r(p^*)-\sum_{h=1}^{H}x_r^{Ih}=0\ ^{[7]}\qquad(r=1,\ldots,n),\tag{4}$$

donde $z_r(p)$ es la función de *exceso de demanda* del bien X_r, x_r^{Ih} es el vector de cantidades inicialmente poseídas de los n bienes por el consumidor h -ésimo, y (4) indica que a los precios p^* (no negativos) resultan simultáneamente compatibles los programas de optimización individuales de tipo (1) de todos y cada uno de los consumidores. En otras palabras, si p^* es un vector de EGC, ningún consumidor tendrá incentivos a realizar otras demandas que las $x_r^h(p^*)$.

5. El equilibrio general competitivo: la mano invisible

¿Qué interesa saber/demostrar del EGC? Lo primero y fundamental, si bajo las condiciones establecidas se puede asegurar que *existe* al menos un vector de precios que satisface (4). Un mecanismo de asignación que careciera de equilibrio no pasaría de ser un divertimento abstracto sin utilidad alguna. Pero también otro resultado de cierto interés: si el (los) equilibrio(s) es (son) *estable(s)* o no. Empecemos por el problema de la existencia.

La expresión (4) es un sistema de n ecuaciones (una para cada bien) con n incógnitas (un precio por cada bien). Sin embargo, las n ecuaciones no son linealmente independientes. En efecto, si sumamos las restricciones de (1) para todos los consumidores se obtiene:

$$\sum_{h=1}^{H} p(x^h - x^{Ih}) = p\,z(p) = 0 \qquad (\forall p \geq 0), \tag{5}$$

donde $z(p)$ es el vector columna de excesos de demanda, expresión válida para cualquier vector de precios, sea o no de equilibrio, y conocida como la *Ley de Walras*[8]. Su significado económico es claro: para cualesquiera precios, la suma de los *valores* de todos los excesos de demanda es nulo. Lo que significa que si para unos precios p^*, $n-1$ mercados están en equilibrio, el n -ésimo tendrá necesariamente que estarlo. Por lo tanto, el sistema (4) es de $n-1$ ecuaciones linealmente independientes con n incógnitas, y tenemos un grado de libertad.

Desde el punto de vista económico esto es un reflejo de que, dado que las funciones de demanda y exceso de demanda son homogéneas de grado cero en precios, lo relevante son los precios relativos (p_r / p_s, $\forall r \neq s$). ¿Cómo podemos eliminar el grado de libertad? Para ciertos problemas se supone que el precio de uno de los bienes vale la unidad, con lo que ese bien se convierte en *numerario*, es decir en unidad de medida de todos los restantes precios. Pero para probar la existencia de solución de (4) es conveniente eliminar el grado de libertad suponiendo que nos movemos en el simplex n -dimensional de precios. En esencia, la estructura de la demostración de existencia del EGC es suponer que se elige aleatoriamente un vector de precios cualquiera, que no será de equilibrio, y se transforma en otro en el que se aumentan (disminuyen) los precios de los bienes con exceso de demanda positivo (negativo), y este proceso se repite hasta que se llega a un vector de precios en que todos los excesos de demanda son nulos y, por tanto, es de equilibrio. Esto equivale a postular una aplicación del simplex de precios en sí mismo del tipo:

$$T(p) = \frac{p + M(p)}{[p + M(p)]i}, \tag{6}$$

en la que i es el vector de unos y $M(p)$ un vector de variaciones de precios según la regla comentada. El numerador de (6) es, por tanto, el "nuevo" vector de precios, que pertenece al simplex por la normalización que implica el denominador. Y como $T(p)$ está definido en el simplex de precios, por el teorema del punto fijo de Kakutani (6) tendrá al menos un punto fijo $T(p^*) = p^*$, que será un EGC. En consecuencia, si las funciones de exceso de demanda son continuas en el simplex de precios, homogéneas de grado cero en precios y se cumple la Ley de Walras, existe al menos un EGC en una economía de intercambio[9].

Obsérvese que la demostración de existencia del EGC no asegura que un sistema de mercados competitivos sea capaz, por sí mismo, de alcanzar dicho equilibrio. Aquí es donde aparece el tema de la *estabilidad*. Imaginemos que los mercados "prueban" unos precios que no son de equilibrio: sólo si éste es estable la economía generará una dinámica de precios que conduzca al equilibrio[10].

Si el problema lo planteamos en términos de estabilidad *local*, es decir, para precios iniciales en un entorno de los de equilibrio, el instrumental a utilizar es el de sistemas de ecuaciones diferenciales. Formularemos una regla que describa la dinámica de los precios y que responda al principio ya comentado de aumentar (disminuir) los precios de los bienes cuyo exceso de demanda es positivo (negativo), lo que puede formalizarse de la siguiente manera:

$$\frac{dp_r(t)}{dt} = k_r(z_r)\, z_r(p(t)) \quad \text{[11]} \quad (k_r > 0,\ k_r' > 0,\ r = 2,\ldots,n), \tag{7}$$

donde t indica tiempo. Desarrollando por Taylor (7) en un entorno del equilibrio y eliminando infinitésimos de segundo orden, que implica aproximar linealmente las funciones de exceso de demanda en el entorno del equilibrio, teniendo en cuenta que $z(p^*) = 0$ y llamando $P_r(t)$ a $p_r(t) - p_r^*$, se obtiene:

$$\frac{dP_r(t)}{dt} = k_r'(p^*) \sum_j \left| \frac{\partial z_r(p(t))}{\partial p_j} \right|_{p^*} P_r(t) \qquad (r = 2,\ldots,n), \tag{8}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales. Aplicando un teorema bien conocido por los lectores, para que el límite de $P_r(t)$ cuando $t \to \infty$ sea cero –es decir, para que los precios converjan a sus valores de EGC– será preciso que todas las raíces características del jacobiano del sistema (8) sean negativas en su parte real. Si, por ejemplo, este jacobiano tiene diagonal dominante negativa (d.d.n.), la condición se cumple.

Hasta aquí las matemáticas, pero ¿tiene algún sentido económico que el jacobiano en (8) tenga d.d.n.? Lo tiene, y es fácil de intuir. Los elementos de la diagonal del jacobiano son los efectos que la variación del precio de cada bien tienen sobre los excesos de demanda de *ese mismo* bien, y los restantes elementos de cada fila son los efectos que sobre el exceso de demanda de ese bien tienen las variaciones de los precios de los *otros* bienes. Sabemos que los elementos de la diagonal son negativos, porque la demanda de un bien es decreciente con su propio precio y, por tanto, la regla (7) opera en la “buena” dirección para la estabilidad. Pero la demanda de un bien puede ser creciente o decreciente respecto a los precios de otros bienes, por lo que los restantes elementos de cada fila pueden ser positivos y actuar en la “mala” dirección. Pues bien, la condición de d.d.n. garantiza que el efecto “bueno” domina a la suma de los posibles efectos “malos”, lo que garantiza la estabilidad.

Hasta aquí las matemáticas y algo de economía, pero ¿existen condiciones con sentido económico para que el jacobiano de (8) tenga d.d.n.? Tranquilizaré al lector diciendo que la respuesta es afirmativa y que, fundamentalmente, existen dos tipos de condiciones económicas que son suficientes para la d.d.n.[12].

Pero hemos hablado de estabilidad local: ¿y si los precios iniciales están muy alejados del EGC? Entonces no nos vale Taylor y tenemos que utilizar resultados de las funciones de Liapunov, pero las mismas condiciones suficientes que permiten demostrar la estabilidad local son condiciones suficientes para la global.

Aún queda una pregunta por contestar: ¿es deseable el EGC? Como he señalado, la renta de cada agente y, por tanto, la distribución personal de la renta en los modelos discutidos está dada, y puede no ser conforme a los criterios de equidad que cada uno defienda. Pero en nuestro contexto la deseabilidad del EGC tiene una perspectiva menos ambiciosa y se refiere a la eficiencia técnica de la asignación de bienes resultante del EGC (véanse notas 2 y 3), y esto conduce a lo que en la literatura se denomina los *dos teoremas de la economía del bienestar clásica*. El primero reza que *todo EGC es una asignación eficiente y sólo requiere aritmética para su demostración*. El segundo, algo más complejo, es que *cualquier asignación eficiente puede alcanzarse como EGC si y sólo si es posible redistribuir la renta entre los agentes*, y para su demostración hay que utilizar teoremas de hiperplanos, separación y apoyo (Minkovski).

6. Conclusiones

El análisis de EGC es una de las claves de bóveda de la teoría económica desarrollada desde mediados del siglo pasado. Sin embargo, con frecuencia se escuchan voces críticas respecto a varios puntos: lo irreal de suponer que los agentes son racionales; el uso desmedido del instrumental matemático en el análisis de un problema menor, ya que los mercados en el mundo real presentan numerosas imperfecciones no competitivas; la inutilidad del análisis de EGC con fines prácticos y, por último, su supuesta función apologética de los mercados competitivos.

Respecto al supuesto de racionalidad, dos comentarios. El primero, que el análisis económico no persigue *describir* el comportamiento de los agentes, sino determinar cuáles son las variables que influyen en sus decisiones y de qué forma lo hacen. El segundo, que ciertamente muchos consumidores no son racionales en el sentido estricto, pero la ley de los grandes números ayuda a compensar en términos agregados las desviaciones en distintos sentidos del comportamiento racional, y la teoría económica más reciente, utilizando poderosos instrumentos matemáticos, ha sido capaz de modelar muchos comportamientos irracionales encontrando nuevas explicaciones analíticas a los mismos.

Respecto al hecho de que en el mundo real muchos mercados no son competitivos, es claro que el EGC es una *referencia* básica, un origen de medida. Los mercados imperfectos asignan con ineficiencias, pero ¿cómo medir la ineficiencia si se desconoce cuál es la posible asignación eficiente? Además, de nuevo, el análisis económico ha desarrollado en su rama de economía industrial, y utilizando complejos instrumentos matemáticos tales como la teoría de juegos, numerosos modelos de competencia imperfecta que difícilmente habrían visto luz sin los desarrollos analíticos previos telegrafiados en este artículo.

Sobre el EGC y su inutilidad para resolver problemas de política económica, señalar tan sólo que, desde hace un par de décadas, se han desarrollado con fuerza modelos de computación de equilibrio general con imperfecciones –*calibración*– que constituyen un instrumental muy poderoso para la evaluación de los efectos de políticas económicas alternativas.

Para terminar, la teoría del equilibrio general y el adecuado uso de instrumentos matemáticos y estadísticos para resolver problemas económicos, han aumentando considerablemente los estándares de rigor de las discusiones económicas, han mejorado nuestro conocimiento del mundo real, constituyen instrumentos muy poderosos para aprender a plantearse problemas económicos y, además, ayudan a pensar mejor. No parece poco.

Referencias

K.J. Arrow, G. Debreu (1954): Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica* 22, 265-290.

G. Debreu (1959): *Theory of value. An axiomatic analysis of economic equilibrium*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

J. Segura (1994): *Análisis macroeconómico*. Madrid: Alianza Editorial.

A. Smith (1776): *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations.* Reimpresión de W.B. Todd (ed.) (1981): *The Glasgow Edition of the Works and Correspondence of Adam Smith.* Indianapolis: Liberty Classics.

A. Villar (1996): *Curso de microeconomía avanzada*. Barcelona: Antoni Bosch Ed.

L. Walras (1874-7): *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*. Lausanne: Rouge. Edición definitiva (1926): Paris: F. Pichon.

---

[1] El objetivo de este artículo es ejemplificar el uso de las matemáticas por parte de los economistas. Se ha elegido un tema canónico (el equilibrio general competitivo [EGC]) y se harán ciertas simplificaciones formales en aras de la inteligibilidad. El lector interesado en un planteamiento formalmente más riguroso puede consultar el trabajo seminal de Debreu (1959) o el tratamiento avanzado habitual en la actualidad en Segura (1994) o Villar (1996) –de quien está tomado el ejemplo del bar–. Cuando se utilicen vectores se supondrá que tienen las dimensiones adecuadas, sin utilizar el símbolo de transposición.

[2] *Eficiente* quiere decir que, dadas las cantidades de capital y trabajo disponibles, no se puede producir mayor cantidad de un bien sin disminuir la cantidad producida de, al menos, otro, y que no se puede mejorar a un consumidor sin, al menos, empeorar a otro.

[3] Para centrarnos en el caso más sencillo, supondremos una *economía de intercambio puro* en la que las cantidades totales de los bienes de consumo disponibles están dadas (es decir, se ha realizado *antes* la producción) y se han repartido aleatoriamente entre los consumidores. El problema se limita, por tanto, a probar que la determinación de los precios de los bienes de consumo en los mercados es eficiente, y la distribución personal de la renta es un subproducto.

[4] Un dato para el consumidor que en competencia perfecta actúa paramétricamente respecto a los precios de los bienes.

[5] Lo que significa, en términos económicos, que un cambio en la misma proporción de todos los precios y la renta monetaria (como, por ejemplo, el paso de la peseta al euro) no afecta a las cantidades de equilibrio demandadas. Lo que se llama *ausencia de ilusión monetaria*.

[6] Obsérvese que han desaparecido las rentas individuales. Ello es así porque al ser un parámetro las dotaciones iniciales de los bienes en manos de cada consumidor individual, también lo es su renta.

[7] Algunos valores de $z_r(p^*)$ pueden incluso ser negativos, en cuyo caso el bien X_r será un bien gratuito (su precio será nulo), pero omitimos esta posibilidad para no introducir complicaciones innecesarias.

[8] En honor de Léon Walras (1834-1910), economista francés, uno de los tres cofundadores del enfoque neoclásico en teoría económica y quien primero estudió con rigor analítico el problema del EGC en Walras (1874-7).

[9] La primera demostración original de existencia de EGC es Arrow-Debreu (1954).

[10] En lo que sigue supondremos que el EGC es único –lo que requiere algún supuesto adicional– para simplificar la discusión del problema de estabilidad.

[11] Se excluye $r = 1$ porque, como es inmediato por la Ley de Walras, si $n-1$ mercados tienen un equilibrio estable el restante también lo será.

[12] Que, por cierto, también garantizan la unicidad del EGC. Las condiciones, para el lector más familiarizado con el tema, son: o bien que todos los bienes sean sustitutos brutos, o que las funciones de de exceso de demanda cumplan el axioma débil de preferencia revelada (véase Segura (1994), pp. 241-253).

Sobre el autor

Julio Segura realizó su licenciatura (1965) y doctorado (1968) en Economía en la Universidad Complutense de Madrid (UCM). Estadístico Facultativo del Estado (1966), obtuvo la cátedra de Fundamentos del Análisis Económico en la UCM en 1970. Ha sido Director del Programa de Investigaciones Económicas de la Fundación de Empresa Pública (1973-1986) y Consejero del Banco de España (1990-2006) y de la Comisión Nacional del Mercado de Valores, que en la actualidad preside. Sus áreas de interés preferente son la economía industrial, el mercado de trabajo, y la teoría de la regulación, donde se han concentrado la mayor parte de sus publicaciones científicas. Premio Rey Juan Carlos de Economía (1990), es Académico de la Real Academia de Ciencias Morales y Políticas (1991).